Corrigé de l'examen du 10 janvier 2014

1. *Soit W un ensemble de vérité et φ une formule n'appartenant pas à W. Montrez que φ n'est pas conséquence sémantique de W.*

   Soit i l'interprétation correspondant à W et donc telle que, pour tout ψ, $\psi \in W$ ssi $v_i(\psi)=$ V. Comme par hypothèse, $\varphi \notin W$, il en résulte : $v_i(\varphi) =$ F. Donc i satisfait W mais pas φ ; d'où, par définition de « conséquence sémantique », φ n'est pas conséquence sémantique de W.

   Remarque : on pouvait difficilement faire plus facile ! ! ! !

2. *Montrez que si $\varphi \vDash \psi$ alors $\vDash (\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \varphi$ (« en mots » : si ψ est conséquence sémantique de φ, alors $(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \varphi$ est une tautologie).*

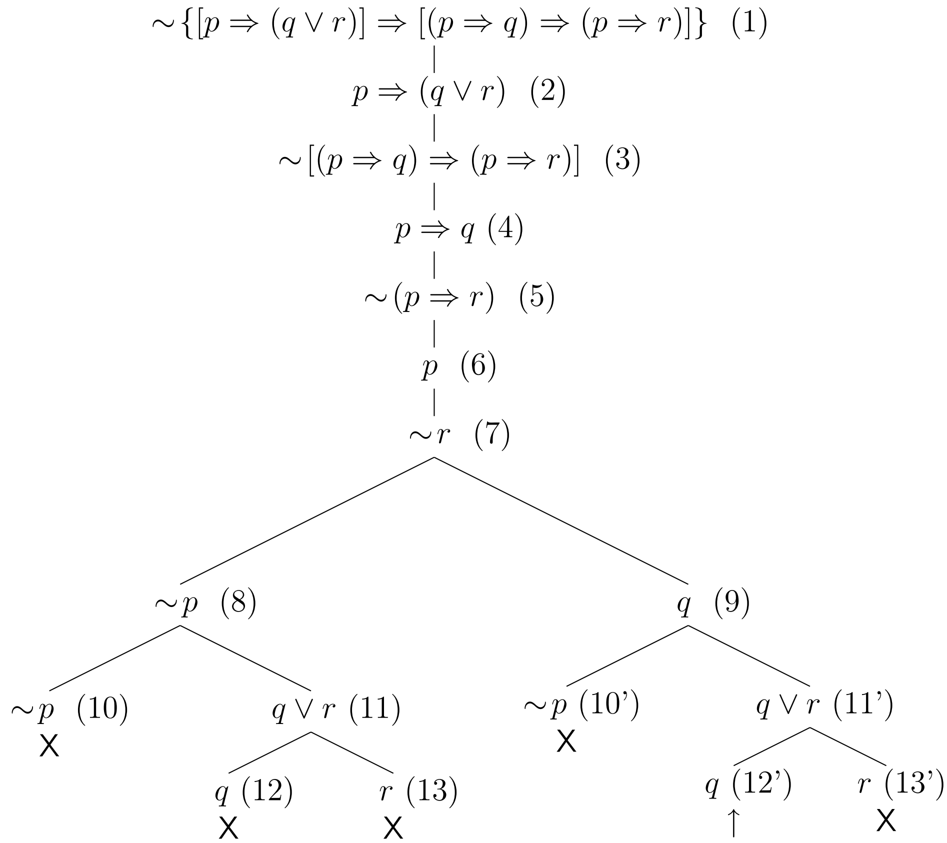
   Il suffit de montrer que si $\varphi \vDash \psi$ alors $\vDash \varphi \Rightarrow (\varphi \wedge \psi)$, puisque $(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \varphi$ est un brave schéma de tautologie. Puisque $\varphi \vDash \psi$, toute interprétation qui satisfait φ, satisfait ψ et donc satisfait à la fois φ et ψ, i.e. satisfait $\varphi \wedge \psi$. Il n'y a donc pas d'interprétation satisfaisant φ, mais pas $\varphi \wedge \psi$; d'où $\vDash \varphi \Rightarrow (\varphi \wedge \psi)$.

3. *Faites l'arbre pour la formule suivante (l'arbre sera complet et vous indiquerez les règles appliquées à chaque étape).*

   $$[p \Rightarrow (q \vee r)] \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$$

   Quelle Forme Normale Conjonctive pour cette formule peut-on tirer de l'arbre ? Cette formule est-elle une tautologie ? Si tel n'est pas le cas, pour quelle(s) interprétation(s) est-elle fausse ?

   Arbre pour $[p \Rightarrow (q \vee r)] \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$:



Règles utilisées :
(2), (3) sur (1) par la règle « $\sim\Rightarrow$ » ;
(4), (5) sur (3) par la règle « $\sim\Rightarrow$ » ;
(6), (7) sur (5) par la règle « $\sim\Rightarrow$ » ;
(8), (9) sur (4) par la règle « $\Rightarrow$ » ;
(10), (11) / (10'), (11') sur (2) par la règle « $\Rightarrow$ » ;
(12), (13) sur (11) / (12'), (13') sur (11') par la règle « $\vee$ ».

Dans un premier temps, on tire de l'arbre la forme normale disjonctive de la formule initiale en formant d'abord les conjonctions des formules élémentaires et négations de formule élémentaire figurant sur chaque branche, puis en formant la disjonction de ces six conjonctions, ce qui donne :

$$(\underline{p} \wedge \sim r \ \wedge \underline{\sim p} \wedge \sim p) \vee (\underline{p} \wedge \sim r \ \wedge \underline{\sim p} \wedge q) \vee (\underline{p} \wedge \sim r \ \wedge \underline{\sim p} \wedge r) \vee$$

$$(\underline{p} \wedge \sim r \wedge q \ \wedge \underline{\sim p}) \vee (p \wedge \sim r \wedge q \wedge q) \vee (p \ \wedge \underline{\sim r} \wedge q \wedge \underline{r} \ )$$

On peut tout de suite simplifier et supprimer les disjoints dans lesquels figurent une formule élémentaire et la négation de la même formule élémentaire (soulignées ci-dessus), ce qui réduit cette FND à :

$p \wedge \sim r \wedge q \wedge q$ que l'on peut encore simplifier en supprimant la redondance, ce qui donne :

$$p \wedge \sim r \wedge q.$$

Pour obtenir la forme normale conjonctive de la formule pour laquelle on a fait l'arbre, il suffit de prendre la négation de cette conjonction et d'appliquer de Morgan, ce qui donne :

$$\sim p \ \vee r \vee \sim q.$$

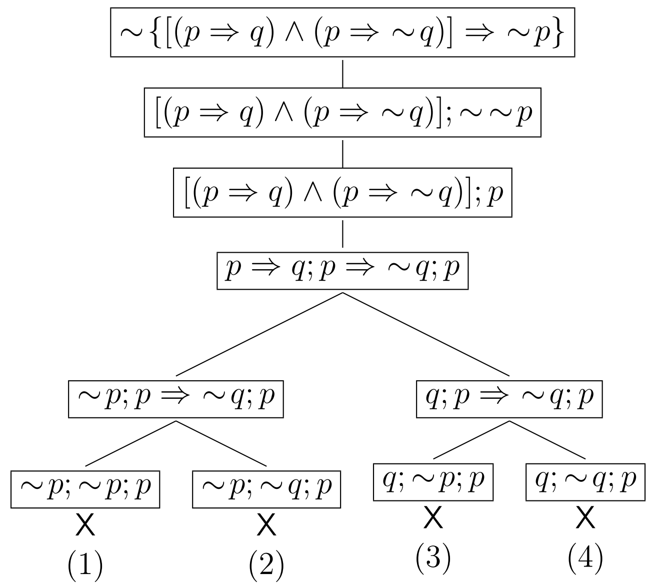
Cette disjonction est fausse pour l'interprétation : $i(p) = \text{V}$, $i(q) = \text{V}$ et $i(r) = \text{F}$; et donc pour la même interprétation la formule pour laquelle on a fait l'arbre est fausse (on aurait pu tirer directement cette interprétation de la branche ouverte de l'arbre) ; on le vérifie aisément en calculant la ligne correspondante de la table de vérité pour cette formule :

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
[p & \Rightarrow & (q & \vee & r)] & \Rightarrow & [(p & \Rightarrow & q) & \Rightarrow & (p & \Rightarrow & r)] \\
 & & \text{V} & & \text{F} & & \text{V} & & \text{V} & & \text{V} & & \text{F} \\
\text{V} & & & \text{V} & & & & \text{V} & & & & \text{F} & \\
 & \text{V} & & & & & & & & \text{F} & & & \\
 & & & & & \text{F} & & & & & & &
\end{array}$$

4. *Démontrez la loi logique suivante dans le calcul des séquents (en indiquant les règles utilisées)* :

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \sim q)] \Rightarrow \sim p.$$

On fait d'abord « l'arbre à vignettes » pour cette formule, qui servira de guide pour la démonstration dans le calcul des séquents (notons que l'on pourrait procéder directement) :



Des quatre vignettes terminales on tire les séquents élémentaires tautologiques :

(1) $\dashrightarrow p \rightarrow p, p$

(2) $\dashrightarrow p \rightarrow p, q$

(2) $\dashrightarrow p, q \rightarrow p$

(2) $\dashrightarrow p, q \rightarrow q$

Démonstration dans le calcul des séquents de $[(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \sim q)] \Rightarrow \sim p$:

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{c}
\quad\quad\quad p \overset{(2)}{\rightarrow} p, \underline{q} \\
\quad\quad\quad \sim\rightarrow \\
p \overset{(1)}{\rightarrow} p, \underline{p} \qquad p, \underline{\sim q} \rightarrow p \\
\Rightarrow\rightarrow \\
p, (p \Rightarrow \sim q) \rightarrow \underline{p}
\end{array}
&
\begin{array}{c}
\quad\quad\quad p, q \overset{(4)}{\rightarrow} \underline{q} \\
\quad\quad\quad \sim\rightarrow \\
p, q \overset{(3)}{\rightarrow} \underline{p} \qquad p, q, \underline{\sim q} \rightarrow \\
\Rightarrow\rightarrow \\
p, \underline{q}, (p \Rightarrow \sim q) \rightarrow
\end{array}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\Rightarrow\rightarrow \\
p, (p \Rightarrow q), (p \Rightarrow \sim q) \rightarrow \\
\wedge\ \rightarrow \\
p, (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \sim q) \rightarrow \\
\rightarrow\sim \\
(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \sim q) \rightarrow \sim p \\
\rightarrow\Rightarrow \\
\rightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \sim q)] \Rightarrow \sim p
\end{array}$$

« $\sim\rightarrow$ » : introduction à gauche de la négation.
« $\Rightarrow\ \rightarrow$ » : introduction à gauche de l'implication.
« $\wedge\ \ \rightarrow$ » : introduction à gauche de la conjonction.
« $\ \rightarrow\sim$» : introduction à droite de la négation.
« $\ \rightarrow\Rightarrow$ » : introduction à droite de l'implication.

Les trois introductions à gauche de l'implication sont conformes à la règle, puisque, pour la première (en haut à gauche), outre les formules soulignées (p et $\sim q$) qui forment l'implication, on trouve dans les deux séquents d'origine les mêmes antécédents, à savoir p et les mêmes conséquents, à savoir p également. Pour la seconde (en haut à droite), on a les mêmes antécédents, à savoir p, q et les mêmes conséquents, à savoir $\emptyset$. Enfin, pour la troisième (en dessous), on a les mêmes antécédents, à savoir $p, (p \Rightarrow \sim q)$ et les mêmes conséquents, à savoir $\emptyset$.