Eléments de théorie des modèles pour un langage du premier ordre avec égalité

1 Préliminaires logiques

1.1 Définition du langage $\mathcal{L}$

1.1.1 Les symboles de $\mathcal{L}$

a) un ensemble dénombrable de variables d'individu : $\{v_n : n \in \omega\}$; on utilisera $x, y, \ldots$ pour désigner les v_i ;
b) un ensemble dénombrable de lettres de prédicat : $\{P_n : n \in \omega\}$; à chaque P_n est associé son degré, $k(n)$, nombre de ses places d'argument (à ne pas confondre avec le degré d'une formule = le nombre des connecteurs et des quantificateurs de la formule) ;
c) le symbole d'égalité : $=$;
d) les connecteurs : $\sim$ (non) et $\wedge$ (et) ;
e) le quantificateur : $\exists$;
f) les parenthèses :), (.

1.1.2 Formules de $\mathcal{L}$

Une formule de $\mathcal{L}$ est une suite finie de symboles de $\mathcal{L}$.

- Une formule atomique de $\mathcal{L}$ est une suite de la forme :
$$x = y,$$
x, y étant deux variables non nécessairement distinctes,

ou de la forme :
$$P_n(x_1, \ldots x_{k(n)}).$$

- Définition récursive d'une formule :

  a) une formule atomique est une formule ;
  b) si φ, ψ sont des formules, alors $\sim\varphi$, $\varphi \wedge \psi$ et $\exists x\varphi$ sont des formules ;
  c) seules sont des formules les suites de symboles de $\mathcal{L}$ obtenues au terme d'un nombre fini d'applications de a)-b).

A noter :

– les lettres "x", "y", etc. sont des métavariables qui désignent des variables quelconques de $v_1, \ldots, v_n, \ldots$; les lettres φ, ψ, etc. sont des métavariables qui désignent des formules quelconques de $\mathcal{L}$.

– on utilisera librement les connecteurs $\Rightarrow$ et $\vee$ ainsi que le quantificateur universel, $\forall$, supposés avoir été introduits par définition à partir de $\sim$, $\wedge$ et $\exists$.

– rappel de la définition de "occurrence libre/liée d'une variable" :
Soit φ une formule de $\mathcal{L}$ et x une variable figurant dans φ ; on définit récursivement "x a une occurrence libre dans φ" par :

  – si φ est une formule atomique, x a une occurrence libre dans φ.
  – si φ est de la forme $\sim\psi$, x a une occurrence libre dans φ ssi x a une occurrence libre dans ψ.
  – si φ est de la forme $\psi \wedge \theta$, x a une occurrence libre dans φ ssi x a une occurrence libre dans ψ ou x a une occurrence libre dans θ.
  – si φ est de la forme $\exists y\psi$, x a une occurrence libre dans φ ssi x a une occurrence libre dans ψ et $x \neq y$.

– rappel de la définition de "portée" d'un quantificateur : dans une formule φ de la forme $\exists x\psi$, si x a une occurrence libre dans ψ, alors on dit que x est *liée* dans ψ par le quantificateur existentiel "$\exists x$" précédant immédiatement la formule ψ. La formule ψ est dite être la *portée* du quantificateur existentiel en x. En général, dans une formule, la portée d'un quantificateur est la plus petite sous-formule qui suit immédiatement le quantificateur.

– une formule dans laquelle aucune variable n'est libre est dite formule close ou phrase.

– une formule étant une suite finie de symboles de $\mathcal{L}$, l'ensemble des formules de

$\mathcal{L}$ a même cardinal que $\mathcal{L}$ (cardinal de $\mathcal{L}$ = cardinal de l'ensemble des symboles de $\mathcal{L}$).

1.2 Interprétation de $\mathcal{L}$, validité, conséquence sémantique

1. Une structure pour $\mathcal{L}$ est une paire ordonnée $\mathfrak{A} = \langle A, \{R_n : n \in \omega\}\rangle$, telle que : A, domaine de $\mathfrak{A}$, est un ensemble non-vide et, pour $n \in \omega$, R_n est une relation $l(n)$-aire sur A (i.e. $R_n \subseteq A^{l(n)}$, $l(n)$ étant le degré de R_n) de sorte que pour tout n, $l(n) = k(n)$ (R_n est, par convention, l'interprétation de P_n).

2. Une interprétation des variables de $\mathcal{L}$ est une suite d'éléments de A, notée :

   $$\mathsf{X} =< x_1, \ldots, x_n, ... >,$$

   telle qu'à v_n est donnée la valeur x_n. Si X est une interprétation et a un élément de A, on notera $\mathsf{X}({}^a/_n)$ l'interprétation : $< x_1, \ldots, x_{n-1}, a, x_{n+1}, ... >$.

   Attention : les x_n ici sont des variables du métalangage qui désignent des éléments de A.

3. On notera le fait qu'une formule φ est vraie dans une structure $\mathfrak{A}$ pour une interprétation X, par

   $$\mathfrak{A} \models_{\mathsf{X}} \varphi.$$

   Définition récursive de $\mathfrak{A} \models_{\mathsf{X}} \varphi$:
   - $\mathfrak{A} \models_{\mathsf{X}} v_m = v_n$, ssi x_m est le même élément que x_n ;
   - $\mathfrak{A} \models_{\mathsf{X}} P_n(v_{i_1}, \ldots v_{i_{k(n)}})$ ssi $< x_{i_1}, \ldots, x_{i_{k(n)}} >\in R_n$;
   - $\mathfrak{A} \models_{\mathsf{X}} \sim\varphi$ ssi $\mathfrak{A} \not\models_{\mathsf{X}} \sim\varphi$;
   - $\mathfrak{A} \models_{\mathsf{X}} \varphi \wedge \psi$ ssi $\mathfrak{A} \models_{\mathsf{X}} \varphi$ et $\mathfrak{A} \models_{\mathsf{X}} \psi$;
   - $\mathfrak{A} \models_{\mathsf{X}} \exists v_n \varphi$ ssi il existe un élément $a \in A$ tel que $\mathfrak{A} \models_{\mathsf{X}({}^a/_n)} \varphi$.

   Si σ est une phrase et si $\mathfrak{A} \models_{\mathsf{X}} \sigma$, pour une interprétation $\mathsf{X} \in A^\omega$, alors $\mathfrak{A} \models_{\mathsf{X}} \sigma$, pour toute interprétation, ce que l'on exprimera en disant que $\mathfrak{A}$ est modèle pour σ et que l'on notera : $\mathfrak{A} \models \sigma$ (rappel : la vérité d'une phrase dans une structure ne dépend plus d'une éventuelle interprétation, en vertu de la dernière clause de la définition ci-dessus).

Soit Σ un ensemble de phrases de $\mathcal{L}$; si $\mathfrak{A}$ est un modèle pour chaque phrase de Σ, on dit que $\mathfrak{A}$ est un modèle pour Σ, ce que l'on écrit : $\mathfrak{A} \models \Sigma$.

4. Une phrase σ est dite *valide* ssi elle est vraie dans toute structure pour $\mathcal{L}$, ce que l'on écrit :
$$\models \sigma$$
5. Soit Σ un ensemble de phrases de $\mathcal{L}$ et σ une phrase de $\mathcal{L}$; si tous les modèles pour Σ sont modèles pour σ, on dit que σ est *conséquence* (sémantique) de Σ, ce que l'on note :
$$\Sigma \models \sigma$$
Soit Σ un ensemble de phrases de $\mathcal{L}$ et φ une formule de $\mathcal{L}$; si tous les modèles de Σ sont modèles pour la *clôture universelle* de φ, on dit que φ est conséquence sémantique de Σ ($\Sigma \models \varphi$). Si $\Sigma \models \varphi \Leftrightarrow \psi$, on dit que φ et ψ sont Σ-*équivalents*[1].

1.3 Axiomes logiques, règles d'inférence et preuve.

1.3.1 Axiomes.

a) Toutes les formules obtenues par substitution uniforme de formules de $\mathcal{L}$ aux lettres de proposition dans les tautologies du calcul des propositions ;

b) Toutes les instances des schémas :
i) $\forall x\varphi[x] \Rightarrow \varphi[y]$, avec y libre pour x dans φ ;
ii) $\forall x(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \forall x\psi)$ avec x sans occurrence libre dans φ
.

c) Toutes les instances des schémas :
i) $\forall x(x = x)$
ii) $\forall x, \forall y[x = y \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi')]$, avec y libre pour x dans φ et φ' obtenue à partir de φ, par substitution de y à x en toutes ou en quelques unes de ses occurrences libres dans φ.

1.3.2 Règles d'inférence.

a) *Modus Ponens* : ψ est inféré de φ et $\varphi \Rightarrow \psi$;
b) Règle de généralisation : $\forall x\varphi$ est inféré de φ.

1. On pourrait ne pas se limiter aux ensembles de *phrases* : soit Γ une ensemble de *formules* de $\mathcal{L}$ et φ une formule de $\mathcal{L}$: $\Gamma \models \varphi$ ssi quelle que soit la structure $\mathfrak{A}$ et l'interprétation $\mathsf{X} \in A^\omega$, si, pour toute formule $\psi \in \Gamma$, $\mathfrak{A} \models_{\mathsf{X}} \psi$, alors $\mathfrak{A} \models_{\mathsf{X}} \varphi$.

1.3.3 Preuve, déduction, consistance.

1.3.3.1. Définition : une preuve d'une formule φ est une suite finie de formules, $\psi_1, \ldots, \psi_n$, telle que $\varphi = \psi_n$ et que pour tout $i \leq n$, ψ_i est soit un axiome, soit obtenue par *modus ponens* à partir de ψ_j, ψ_k, avec $j, k, < i$, ou par généralisation à partir de ψ_j, avec $j < i$.
Si une formule φ est prouvable, on dit qu'elle est un *théorème*, ce que l'on écrit :

$$\vdash \varphi$$

A noter : une formule est prouvable ssi sa clôture universelle est prouvable.

1.3.3.2. Soit Σ, un ensemble de formules de $\mathcal{L}$. Une formule φ est déductible de Σ s'il y a une suite finie de formules $\psi_1, \ldots, \psi_n$, telle que $\varphi = \psi_n$ et que pour tout $i \leq n$, ψ_i est soit un axiome, soit une formule de Σ, soit obtenue par *modus ponens* à partir de ψ_j, ψ_k, avec $j, k, < i$, ou par généralisation à partir de ψ_j, avec $j < i$.

Que φ soit déductible de Σ, s'écrit :

$$\Sigma \vdash \varphi$$

1.3.3.3. Consistance d'un ensemble de *phrases* : on retrouve sans changement les définitions **4.3.**, **4.4.**, ainsi que les résultats **4.2.1.**, **4.3.1.**, **4.4.1.**, **4.4.2.**, **4.4.3.**, du premier chapitre.

1.4 Quelques résultats importants.

1.4.1. Une phrase σ est un théorème ssi σ est valide (Gödel).

1.4.2. Un ensemble Σ de phrases de $\mathcal{L}$ est consistant ssi Σ a un modèle.

1.4.3. Un ensemble Σ de phrases de $\mathcal{L}$ a un modèle ssi tout sous-ensemble fini de Σ a un modèle (compacité).

2 Quelques notions de théorie des modèles

Dans ce qui précède, nous étions partis du langage pour le calcul des prédicats puis nous avions cherché quelles pouvaient en être les interprétations. Nous allons dans ce qui suit procéder dans l'autre sens : étant donné une structure, quel est le langage approprié pour "en parler".

On admettra dans ce qui suit qu'est fixé le *type* des structures dont on parlera (autrement dit les structures dont on parlera sont toutes de même type) et que le langage évoqué est approprié pour en parler. Par *type* d'une structure, on entend ce qui suit :

soit une structure $\mathfrak{A} = \langle A, \{R_n : n \leq \alpha\} \rangle$ (α cardinal quelconque, la plupart du temps très petit !), le type de $\mathfrak{A}$ est donné par la fonction $l : \alpha \to \omega$, qui définit pour chaque R_n son degré ; le langage approprié pour en parler est un langage du premier ordre comportant des constantes de prédicat P_n, tel que pour chaque n, le degré de $P_n = l(n)$. Ainsi, par ex., si $\mathfrak{A}$ ne comporte qu'une relation à deux places ($\alpha = 1$), le langage approprié ne comporte qu'une constante de prédicat à deux places (exemple : théorie de l'ordre).

On admettra dans ce qui suit, sans le rappeler à chaque fois, que dans toutes les structures, on trouve la relation à deux places d'égalité.

Remarque : on pourrait introduire, en plus des relations, des fonctions à un ou plusieurs arguments, ce qui permettrait, en particulier, de traiter directement d'opérations définies sur le domaine d'une structure. Ainsi, par ex., si l'on considère une structure toute simple comme $\langle \mathbb{Z}, 0, + \rangle$, elle a pour domaine l'ensemble des entiers relatifs, et deux fonctions : une fonction "zéro-aire" que l'on traite comme un "élément distingué" de $\mathbb{Z}$, ici : 0, et une fonction à deux arguments, ici "addition". Cette structure ne comporte pas de relation.

Il faudrait alors définir une structure $\mathfrak{A}$ comme un triplet :

$$\langle A, \{f_m : m < \beta\}, \{R_n : n < \alpha\} \rangle$$

dont le type est donné par les deux fonctions $l' : \beta \to \omega$ et $l : \alpha \to \omega$ qui définissent, pour chaque fonction d'indice $j \leq \beta$ son nombre d'arguments (l') et pour chaque relation d'indice $i \leq \alpha$ son nombre de places (l).

Cela est souvent plus commode (mais plus lourd à manier !), et l'on en aura l'usage plus tard. Mais théoriquement, il est tout à fait possible de se passer des fonctions car on peut traiter une fonction à n arguments comme une relation à $n+1$ places. Par exemple, l'addition sur $\mathbb{Z}$, qui va de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{Z}$ peut être considérée comme une relation à trois places R^+ définit par : $< x_1, x_2, x_3 > \in R^+$ ssi $x_1 + x_2 = x_3$.

En général, à une fonction f_m à $l'(m)$ argument correspond donc une relation R à $l'(m)+1$ places, de telle sorte que :

$$< x_1, \ldots, x_{l'(m)+1} > \in R \text{ ssi } f_m(x_1, \ldots x_{l'(m)}) = x_{l'(m)+1}$$

Pour plus de simplicité, on ne considérera dans ce qui suit que des "structures relationnelles" dans lesquelles on ne trouve que des relations.

2.1 Définitions de quelques relations entre structures.

2.1.1 Sous-structure / extension.

Soit $\mathfrak{A} = \langle A, \{R_n : n \leq \alpha\}\rangle$ et $\mathfrak{B} = \langle B, \{S_n : n \leq \alpha\}\rangle$ (α cardinal quelconque) ; on dit que $\mathfrak{A}$ est une sous-structure de $\mathfrak{B}$ ou que $\mathfrak{B}$ est une extension de $\mathfrak{A}$ (noté : $\mathfrak{A} \sqsubseteq \mathfrak{B}$), si l'on a :

- $A \subseteq B$ et
- pour tout n, $R_n = S_n \cap A^{l(n)}$ (rappel : $A^{l(n)}$ est l'ensemble des $l(n)$-uplets d'éléments de A) ; ce que l'on peut également exprimer par : pour tout n, $< a_1, \ldots, a_{l(n)} > \in R_n$ ssi $< a_1, \ldots, a_{l(n)} > \in S_n \cap A^{l(n)}$.

En particulier, à chaque sous-ensemble X non-vide de A, correspond une sous-structure : $\langle X, \{R_n \cap X^{l(n)} : n \leq \alpha\}\rangle$. On appelle une telle sous-structure, la restriction de $\mathfrak{A}$ à X, ce que l'on note : $\mathfrak{A} \upharpoonright X$.

2.1.2 Homomorphisme entre structures, isomorphisme.

Définition : Soit h une fonction de A vers B, respectivement domaine des structures $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$, h est un *homomorphisme* de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}$ si, pour tout $n \leq \alpha$ et toute suite $a_1, \ldots, a_{l(n)}$ d'éléments de A (ou : pour tout l_n-uplet $< a_1, \ldots, a_{l(n)} > \in A^{l(n)}$) , on a :

- si $< a_1, \ldots, a_{l(n)} > \in R_n$ alors $< h(a_1), \ldots, h(a_{l(n)}) > \in S_n$.

Si la réciproque est également vraie, autrement dit si :

- $< a_1, \ldots, a_{l(n)} > \in R_n$ ssi $< h(a_1), \ldots, h(a_{l(n)}) > \in S_n$

on dit que h est un *homomorphisme fort.*

2.1.2.1. Image homomorphe et sous-structure.

h étant un homomorphisme de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}$, on note $h[\mathfrak{A}]$ l'image homomorphe de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}$ de sorte que :
$h[\mathfrak{A}] = \langle h[A], \{h[R_n], n \leq \alpha\}\rangle$ [2].

Important : $h[\mathfrak{A}]$ n'est pas nécessairement une sous-structure de $\mathfrak{B}$. Exemple :

- soit les deux structures suivantes :
$\mathfrak{A} : \langle A, R_1\rangle$ avec
$A = \{1, 2\}$ et $R_1 = \{< 1, 1 >, < 1, 2 >\}$ $(l(1) = 2)$, et
$\mathfrak{B} = \langle B, S_1\rangle$ avec
$B = \{a, b, c\}$ et $S_1 = \{< a, a >, < a, c >, < c, a >, < b, c >\}$;

- on définit h par : $h(1) = a$ et $h(2) = c$; on montre d'abord que h est une homomorphisme de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}$, en effet :
$< 1, 1 >\in R_1$ et $< h(1), h(1) > (=< a, a >) \in S_1$, et $< 1, 2 >\in R_1$ et $< h(1), h(2) > (=< a, c >) \in S_1$.

Mais $h[\mathfrak{A}]$ n'est pas une sous-structure de $\mathfrak{B}$, en effet :
$h[\mathfrak{A}] = \langle h[A], h[R_1]\rangle$ (avec : $h[A] = \{a, c\}$ et $h[R_1] = \{< a, a >, < a, c >\}$) et donc :
- on a bien $h[A] \subseteq B$, (puisque $\{a, c\} \subseteq \{a, b, c\}$, trivial !) mais
- $h[R_1] \neq S_1 \cap h[A]^2$, puisque $< c, a >\in S_1 \cap h[A]^2$ mais $< c, a >\notin h[R_1]$.

2.1.2.2. En revanche si $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ est un homomorphisme *fort*, $h[\mathfrak{A}] \sqsubseteq \mathfrak{B}$.

A démontrer :
- $h[A] \subseteq B$, évident ;

2. Notations : en général, si $h : A \to B$, "$h[A]$" désigne le sous ensemble de B dont les éléments sont les images par h des éléments de A : $h[A] = \{y \in B : \exists x \in A \wedge y = f(x)\}$.

Si h est homomorphisme de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}$, on note "$h[R_n]$", l'ensemble :$\{< h(a_1), \ldots, h(a_{l(n)}) >\in B^{l(n)} :< a_1, \ldots, a_{l(n)} >\in R_n\}$; i.e. $h[R_n]$ est l'ensemble des $l(n)$-uplets d'éléments de B qui sont "images" par h des $l(n)$-uplets d'éléments de A qui appartiennent à R_n. Ce qui revient à :

$< h(a_1), \ldots, h(a_{l(n)}) >\in h[R_n]$ ssi $< a_1, \ldots, a_{l(n)} >\in R_n$

- Pour tout $n \leq \alpha$, $h[R_n] = S_n \cap h[A]^{l(n)}$; en effet, soit $n \leq \alpha$ quelconque :

– Pour tout $< a_1, \ldots, a_{l(n)} > \in A^{l(n)}$, si $< h(a_1), \ldots, h(a_{l(n)}) > \in h[R_n]$ alors par définition de $h[R_n]$, $< a_1, \ldots, a_{l(n)} > \in R_n$; et puisque h est un homomorphisme, $< h(a_1), \ldots, h(a_{l(n)}) > \in S_n$.
  De plus, par définition, $< h(a_1), \ldots, h(a_{l(n)}) > \in h[A]^{l(n)}$. Donc :
  $$\boxed{h[R_n] \subseteq S_n \cap h[A]^{l(n)}}.$$

– Pour tout $< b_1, \ldots, b_{l(n)} > \in B^{l(n)}$, si $< b_1, \ldots, b_{l(n)} > \in S_n \cap h[A]^{l(n)}$, alors

  – a) $< b_1, \ldots, b_{l(n)} > \in S_n$ et
  – b) $< b_1, \ldots, b_{l(n)} > \in h[A]^{l(n)}$.

  En raison de b), il existe $< a_1, \ldots, a_{l(n)} > \in A^{l(n)}$ tel que $< b_1, \ldots, b_n > = < h(a_1), \ldots, h(a_{l(n)} >$, et donc, en raison de a), $< h(a_1), \ldots, h(a_{l(n)}) > \in S_n$. Comme h est une homomorphisme *fort*, on a alors : $< a_1, \ldots, a_{l(n)} \rangle \in R_n$ et donc, par définition de $h[R_n]$, $< h(a_1), \ldots, h(a_{l(n)}) > \in h[R_n]$; d'où : $< b_1, \ldots, b_{l(n)} > \in h[R_n]$. Donc :
  $$\boxed{S_n \cap h[A]^{l(n)} \subseteq h[R_n]}.$$

En joignant les deux résultats précédents, on a : $\boxed{h[R_n] = S_n \cap h[A]^{l(n)}}$.
Comme $n \leq \alpha$ était quelconque, cela vaut pour tout $n \leq \alpha$ et donc :
$$h[\mathfrak{A}] \sqsubseteq \mathfrak{B}, \text{ CQFD.}$$

En fait, on vient juste de démontrer que si $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ est un homomorphisme *fort*, $h[\mathfrak{A}] = \mathfrak{B} \upharpoonright h[A]$; en effet : $\mathfrak{B} \upharpoonright h[A] = \langle h[A], \{S_n \cap h[A]^{l(n)} : n \leq \alpha\}\rangle$ et comme on vient de montrer que, pour tout $n \leq \alpha$, $h[R_n] = S_n \cap h[a]^{l(n)}$, on a donc :
$h[\mathfrak{A}] = \langle h[A], \{h[R_n] : n \leq \alpha\} = \langle h[A], \{S_n \cap h[A]^{l(n)} : n \leq \alpha\} = \mathfrak{B} \upharpoonright h[A]$

2.1.2.3. Si $\mathfrak{A} \sqsubseteq \mathfrak{B}$ alors $A \subseteq B$ et $i : A \to B$, fonction identique (i.e. $\forall x \in A, i(x) = x$), est un homomorphisme de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}$ (Attention : la réciproque n'est pas vraie).

Il suffit de montrer que si $\mathfrak{A} \sqsubseteq \mathfrak{B}$ alors i est un homomorphisme, c'est à dire que, pour tout $n \leq \alpha$, et tout $< a_1, \ldots, a_{l(n)} > \in A^{l(n)}$, si $< a_1, \ldots, a_{l(n)} > \in R_n$ alors $< i(a_1), \ldots, i(a_{l(n)}) > \in S_n$, ce qui revient à ($i$ fonction identique) :

$$\text{si} < a_1, \ldots, a_{l(n)} > \in R_n \text{ alors} < a_1, \ldots, a_{l(n)} > \in S_n$$

ce qui découle immédiatement du fait que $R_n = S_n \cap A^{l(n)}$ (par définition de $\sqsubseteq$) et donc que $R_n \subseteq S_n$.

Pourquoi la réciproque n'est-elle pas vraie ? i.e. pourquoi n'est-il pas vrai que : si $A \subseteq B$ et $i : A \rightarrow B$, fonction identique, est un homomorphisme de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}$ alors $\mathfrak{A} \sqsubseteq \mathfrak{B}$? Il est facile de trouver un contre-exemple. Soit les deux micro-structures suivantes (la situation est semblable à celle évoquée ci-dessus sous **2.1.2.1.**) :

$\mathfrak{A} = \langle A, R \rangle$ avec : $A = \{a, b\}$ et $R = \{< a, b >, < b, a >\}$

$\mathfrak{B} = \langle B, S \rangle$ avec : $B = \{a, b, c\}$ et $R = \{< a, b >, < b, a >, < b, b >, < c, b >\}$ ($< c, b >$ pour la beauté de la chose !)

On a bien :
- $A \subseteq B$
- $i : A \rightarrow B$ homomorphisme puisque toutes les paires appartenant à R appartiennent à S (ce à quoi se ramène pour i d'être un homomorphisme, cf. plus haut)

Mais, il n'est pas vrai que $\mathfrak{A} \sqsubseteq \mathfrak{B}$ puisque :

$$\begin{aligned} S \cap A^2 &= \{< a, b >, < b, a >, < b, b >, < c, b >\} \cap \{< a, a >, < a, b >, < b, a >, < b, b >\} \\ &= \{< a, b >, < b, a >, < b, b >\} \\ &\neq \{< a, b >, < b, a >\} = R. \end{aligned}$$

On voit qu'il suffirait que i soit un homomorphisme **fort** pour que ce genre de cas soit impossible, puisqu'alors R et S auraient exactement les même paires d'éléments de A, ce qui exclurait que l'on ait $< b, b > \in S$, d'où $R = S \cap A^2$. On a donc le théorème suivant :

2.1.2.3'. $\mathfrak{A} \sqsubseteq \mathfrak{B}$ ssi $A \subseteq B$ et $i : A \rightarrow B$, i fonction identique, est un homomorphisme **fort** de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}$; i est dite *injection* de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}$ (démonstration à rédiger éventuellement).

2.1.2.4. Si h est un homomorphisme **fort** de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}$ et est *injectif,* on dit que h est un *plongement* de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}$.

2.1.2.5. Si h est un plongement de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}$ et est *surjectif* (autrement dit $h : A \to B$ est bijectif), alors h est un isomorphisme entre $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$, ce que l'on note $\mathfrak{A} \overset{h}{\cong} \mathfrak{B}$. S'il existe un isomorphisme entre deux structures $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$, on note cela simplement par : $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$[3] .
L'isomorphisme est une relation d'équivalence entre structures.
Note : comme on s'en doute au vu de ce qui précède, il ne suffit pas que $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ soit un homomorphisme et soit bijectif pour que h soit un isomorphisme entre $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$.
Pour s'en convaincre, reprendre l'exemple sous 1.2.1 avec $B = \{a, c\}$ et $S_n = \{< a, a >, < a, c >, < c, a >\}$.

2.1.2.6. $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ est un plongement de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}$, ssi h est un isomorphisme entre $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B} \upharpoonright h[A]$.

2.1.2.7. h est un plongement de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}$ ssi il existe une structure $\mathfrak{C}$ telle que $\mathfrak{C} \sqsubseteq \mathfrak{B}$ et h est un isomorphisme entre $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{C}$.

Démonstration :

Dans le sens $\to$:
Puisque h est un plongement (et donc un homomorphisme fort) de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}$, on a (par **2.1.2.2.**) : $h[\mathfrak{A}] = \mathfrak{B} \upharpoonright h[A] \sqsubseteq \mathfrak{B}$.
De plus, puisque, là encore, h est un plongement $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}$, on a (par **2.1.2.6.**) : h est un isomorphisme entre $\mathfrak{A}$ et $h[\mathfrak{A}]$, i.e. $\mathfrak{B} \upharpoonright h[A]$.
Il suffit donc de faire $\mathfrak{C} = h[\mathfrak{A}]$.

Dans le sens $\leftarrow$:

Supposons qu'il existe une structure $\mathfrak{C}$ telle que $\mathfrak{C} \sqsubseteq \mathfrak{B}$ et h est un isomorphisme entre $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{C}$. On montre que h est un plongement de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}$, i.e. que h est un homomorphisme fort et injectif.
1. puisque $h : A \to C$ est bijectif et que $C \subseteq B$, $h : A \to B$ est injectif.

3. Cela revient à définir un isomorphisme entre $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ comme étant un homomorphisme fort et bijectif.

2. On démontre que pour tout $< a_1, \ldots, a_{l(n)} > \in A^{l(n)}$, $< a_1, \ldots, a_{l(n)} > \in R_n$ ssi $< h(a_1), \ldots, h(a_{l(n)}) > \in S_n$. On note T_n la relation correspondante dans $\mathfrak{C}$.

pour tout $< a_1, \ldots, a_{l(n)} > \in A^{l(n)}$	
$< a_1, \ldots, a_{l(n)} > \in R_n$ ssi	
$< h(a_1), \ldots, h(a_{l(n)}) > \in T_n$ ssi	puisque h est un isomorphisme entre $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{C}$ (et donc *a fortiori* un homomorphisme fort !).
$< h(a_1), \ldots, h(a_{l(n)}) > \in S_n \cap C^{l(n)}$ ssi	puisque $\mathfrak{C} \sqsubseteq \mathfrak{B}$ et donc que $T_n = S_n \cap C^{l(n)}$.
$< h(a_1), \ldots, h(a_{l(n)}) > \in S_n \cap h[A]^{l(n)}$ ssi	puisque $C^{l(n)} = h[A]^{l(n)}$
$< h(a_1), \ldots, h(a_{l(n)}) > \in S_n$,	puisque, par df., $< h(a_1), \ldots, h(a_{l(n)}) > \in h[A]^{l(n)}$
cqfd.	

2.1.2.8. $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ est un isomorphisme entre $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ ssi h est un homomorphisme de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}$ et s'il existe un homomorphisme h' de $\mathfrak{B}$ dans $\mathfrak{A}$ tel que $h \circ h'$ est l'identité dans $\mathfrak{B}$ et $h' \circ h$ est l'identité dans $\mathfrak{A}$ (i.e. pour tout $y \in B, h(h'(y)) = y$ et pour tout $x \in A, h'(h(x)) = x$) [4].

Démonstration :

Dans le sens $\to$: h est un isomorphisme de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}$ donc, par déf. h est un homomorphisme de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}$.

Considérons maintenant la fonction "inverse" (ou "réciproque") de h, h^{-1}, définie par $\forall y \in B, h^{-1}(y) = x$ ssi $h(x) = y$ (on est assuré qu'il s'agit d'une fonction tout à fait respectable puisque h est bijective). Il suit de cette définition que h^{-1} est tout autant bijective que h et que $h \circ h^{-1}$ est l'identité dans B et $h^{-1} \circ h$, l'identité dans A [5].

De plus, puisque h est un isomorphisme, h^{-1} est un isomorphisme de $\mathfrak{B}$ dans $\mathfrak{A}$. En effet : h^{-1} est bijectif et on montre facilement que c'est un homomorphisme fort : $< b_1, \ldots, b_{l(n)} > \in S_n$ ssi (puisque $h \circ h^{-1}$ est

4. Rappel : étant donné deux fonctions, $f : A \to B$ et $g : B \to C$, on peut les *composer* (ce l'on note $g \circ f$) de telle sorte que $(g \circ f)$ est une nouvelle fonction qui va de A vers C et que $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Autrement dit, $(g \circ f)$ envoie d'abord un élément a de A sur son image par f dans B, puis envoie cette image, $f(a)$, sur son image par g dans C : $a \in A \xrightarrow{f} f(a) \in B \xrightarrow{g} g(f(a)) \in C$.

5. par ex., soit a un élément quelconque de A et $b \in B$ tel que $h(a) = b$; par df. de h^{-1}, $h^{-1}(b) = a$, et donc : $h^{-1}(h(a)) = h^{-1}(b) = a$, même chose pour l'autre identité.

l'identité dans B) $< h(h^{-1}(b_1)), \ldots, h(h^{-1}(b_{l(n)})) >\in S_n$ ssi (puisque h est un homomorphisme fort) $< h^{-1}(b_1), \ldots h^{-1}(b_{l(n)}) >\in R_n$.
h^{-1} est donc, *a fortiori* un homomorphisme de $\mathfrak{B}$ dans $\mathfrak{A}$ et il a toutes les propriétés demandées par le théorème.

Dans le sens $\leftarrow$: il faut démontrer que h est injectif et surjectif (donc bijectif) et est un homomorphisme fort de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}$.

- a. h injectif (i.e. pour tout $x, y \in A$, si $h(x) = h(y)$ alors $x = y$) :
  si $h(x) = h(y)$ alors $h'(h(x)) = h'(h(y))$ (puisque h' est une fonction) et donc $x = y$ (puisque $h' \circ h$ est l'identité dans A).

- b. h surjectif (i.e. pour tout $y \in B$, il existe $x \in A$, tel que $y = h(x)$) :
  si $y \in B$, alors il existe $x \in A$, à savoir $h'(y)$, tel que $h(x) = h(h'(y)) = y$; autrement dit le x élément de A tq. $y = h(x)$, est $h'(y)$ [6].

- c. h homomorphisme. fort (i.e. pour tout $n \leq \alpha$ et tout $< a_1, \ldots, a_{l(n)} >\in A^{l(n)}$, $< a_1, \ldots, a_{l(n)} >\in R_n$ ssi $< h(a_1), \ldots, h(a_{l(n)}) >\in S_n$:

  Dans le sens $\rightarrow$, c'est évident puisque h est un homomorphisme.

  Il reste à démontrer : si $< h(a_1), \ldots, h(a_{l(n)}) >\in S_n$ alors $< a_1, \ldots, a_{l(n)} >\in R_n$, pour tout $< a_1, \ldots, a_{l(n)} >\in A^{l(n)}$.
  Si $< h(a_1), \ldots, h(a_{l(n)}) >\in S_n$, alors $< h'(h(a_1)), \ldots, h'(h(a_{l(n)})) >\in R_n$ (puisque h' est un homomorphisme), et donc : $< a_1, \ldots, a_{l(n)} >\in R_n$ (puisque $h' \circ h$ est l'identité dans A). Cqfd.

Tableau récapitulatif :

6. Cette partie de la démonstration et purement ensembliste et revient au petit théorème suivant : $f : A \rightarrow B$ est bijective ssi il existe $f' : B \rightarrow A$ telle que pour tout $y \in B$, $f(f'(y)) = y$ et pour tout $x \in A$, $f'(f(x)) = x$).

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathfrak{A} \overset{h}{\cong} \mathfrak{B} & \longrightarrow & & h\text{, plongement} & & \longrightarrow & h\text{, homomorphisme} \\
& \overset{h\text{,identité}}{\nearrow} & \swarrow & \uparrow & \searrow & \overset{h\text{,fort}}{\swarrow} & \downarrow \\
& & & \nearrow\ \nwarrow & & & \\
\mathfrak{A} \sqsubseteq \mathfrak{B} & \mathfrak{A} \cong h[\mathfrak{A}] & & & h[\mathfrak{A}] \sqsubseteq \mathfrak{B} & & \mathfrak{B} \restriction h[A] \sqsubseteq \mathfrak{B}
\end{array}$$

2.1.3 Equivalence élémentaire.

Deux structures, $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$, sont *élémentairement équivalentes* si toutes les phrases de $\mathcal{L}$ vraies dans $\mathfrak{A}$ sont également vraies dans $\mathfrak{B}$, ce que l'on note : $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. Il est clair que "$\equiv$" est une relation d'équivalence entre structures et que l'on a : pour toute phrase σ, $\mathfrak{A} \vDash \sigma$ ssi $\mathfrak{B} \vDash \sigma$ [7].

2.1.3.1. Théorème de l'isomorphisme :

Si h est un isomorphisme entre $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ alors, pour toute interprétation $\mathsf{X} \in A^\omega$, toute interprétation $\mathsf{Y} \in B^\omega$ et toute formule φ, $\mathfrak{A} \vDash_{\mathsf{X}} \varphi$ ssi $\mathfrak{B} \vDash_{h[\mathsf{X}]} \varphi$ et $\mathfrak{B} \vDash_{\mathsf{Y}} \varphi$ ssi $\mathfrak{A} \vDash_{h^{-1}[\mathsf{Y}]} \varphi$ [8].

Démonstration par récurrence sur le degré des formules [9] :

1. Soit $dg(\varphi) = 0$, alors :

   – φ de la forme $P_n(v_{i_1}, \ldots, v_{i_{k(n)}})$:
   $\mathfrak{A} \vDash_{\mathsf{X}} P_n(v_{i_1}, \ldots, v_{i_{k(n)}})$ ssi (par déf.) $< x_{i_1}, \ldots, x_{i_{l(n)}} > \in R_n$, ssi ($h$, isomorphisme et donc homomorphisme) $< h(x_{i_1}), \ldots, h(x_{i_{l(n)}}) > \in S_n$, ssi $\mathfrak{B} \vDash_{h[\mathsf{X}]} P_n(v_{i_1}, \ldots, v_{i_{k(n)}})$.

   – φ de la forme $v_n = v_m$:
   $\mathfrak{A} \vDash_{\mathsf{X}} v_n = v_m$ ssi (par déf.) x_n est le même élément que x_m, ssi (h, isomorphisme et donc bijectif) $h(x_n)$ est le même élément que $h(x_m)$, ssi (par déf.) $\mathfrak{B} \vDash_{h[\mathsf{X}]} v_n = v_m$.

7. En effet : si $\mathfrak{A} \nvDash \sigma$ alors, par df., $\mathfrak{A} \vDash \sim\sigma$ d'où, par la df de "$\equiv$", $\mathfrak{B} \vDash \sim\sigma$, et donc $\mathfrak{B} \nvDash \sigma$. Ce qui, par contraposition, revient à : si $\mathfrak{B} \vDash \sigma$ alors $\mathfrak{A} \vDash \sigma$.

8. Notation : $h[\mathsf{X}] =< h(x_1), \ldots, h(x_n), \cdots >$ et donc $h[\mathsf{X}] \in B^\omega$. De la même manière : $h[\mathsf{X}^a/_n] =< h(x_1), \ldots, h(x_{n-1}), h(a), h(x_{n+1}) \cdots >$

9. On ne démontre que le premier "ssi", l'autre se démontrant de la même manière

2. Hyp. de réc. : pour toute formule φ de degré $< n$, $\mathfrak{A} \vDash_{\mathsf{X}} \varphi$ ssi $\mathfrak{B} \vDash_{h[\mathsf{X}]} \varphi$.

3. Soit $dg(\varphi) = n$, alors :
   – φ est de la forme $\sim\psi$:
   $\mathfrak{A} \vDash_{\mathsf{X}} \sim\psi$ ssi $\mathfrak{A} \nvDash_{\mathsf{X}} \psi$ ssi (hyp. de réc.) $\mathfrak{B} \nvDash_{h[\mathsf{X}]} \psi$ ssi $\mathfrak{B} \vDash_{h[\mathsf{X}]} \sim\psi$;

   – φ de la forme $\psi \wedge \theta$:
   $\mathfrak{A} \vDash_{\mathsf{X}} \psi \wedge \theta$ ssi $\mathfrak{A} \vDash_{\mathsf{X}} \psi$ et $\mathfrak{A} \vDash_{\mathsf{X}} \theta$ ssi (hyp. de réc.) $\mathfrak{B} \vDash_{h[\mathsf{X}]} \psi$ et $\mathfrak{B} \vDash_{h[\mathsf{X}]} \theta$ ssi $\mathfrak{B} \vDash_{h[\mathsf{X}]} \psi \wedge \theta$;

   – φ de la forme $\exists v_n \psi$:
   $\mathfrak{A} \vDash_{\mathsf{X}} \exists v_n \psi$ ssi il existe un $a \in A$ tel que $\mathfrak{A} \vDash_{\mathsf{X}(^a/_n)} \psi$ ssi (hyp. de réc.) il existe un $a \in A$ tel que $\mathfrak{B} \vDash_{h[\mathsf{X}(^a/_n)]} \psi$ i.e. tel que $\mathfrak{B} \vDash_{h[\mathsf{X}](^{h(a)}/_n)]} \psi$, ssi il existe un $b \in B$ (à savoir : $b = h(a)$) tel que $\mathfrak{B} \vDash_{h[\mathsf{X}](^b/_n)]} \psi$ ssi $\mathfrak{B} \vDash_{h[\mathsf{X}]} \exists v_n \psi$. Cqfd.

L'équivalence élémentaire est une relation plus faible que l'isomorphisme : si deux structures sont isomorphes, elles sont élémentairement équivalentes (corollaire du théorème de l'isomorphisme) mais la réciproque n'est pas toujours vraie (par exemple : soit $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Q}, <_q \rangle$ et $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{R}, <_r \rangle$; $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, mais on n'a pas $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$).

2.1.4 Sous-structure / extension, plongement, élémentaire.

2.1.4.1. On démontre facilement que si $\mathfrak{A} \sqsubseteq \mathfrak{B}$ alors pour toute interprétation $\mathsf{X} \in A^\omega$ et toute formule *atomique* φ, $\mathfrak{A} \vDash_{\mathsf{X}} \varphi$ ssi $\mathfrak{B} \vDash_{\mathsf{X}} \varphi$ [10].

Si cela vaut pour toute formule alors $\mathfrak{A}$ est une *sous-structure élémentaire* de $\mathfrak{B}$ (ou $\mathfrak{B}$ est une *extension élémentaire* de $\mathfrak{A}$), ce que l'on note : $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$. De manière plus précise : $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ ssi $\mathfrak{A} \sqsubseteq \mathfrak{B}$ et, pour toute interprétation $\mathsf{X} \in A^\omega$ et pour toute formule φ, on a :

10. En effet : soit une formule atomique quelconque $P_n(v_{i_1}, \ldots, v_{i_{lk(n)}})$ et une interprétation quelconque $\mathsf{X} \in A^\omega$, alors : $\mathfrak{A} \vDash_{\mathsf{X}} P_n(v_{i_1}, \ldots, v_{i_{k(n)}})$ ssi $< x_{i_1}, \ldots, x_{i_{l(n)}} > \in R_n$ ssi $< x_{i_1}, \ldots, x_{i_{l(n)}} > \in S_n \cap A^{l(n)}$ ssi $\mathfrak{B} \vDash_{\mathsf{X}} P_n(v_{i_1}, \ldots, v_{i_{k(n)}})$.

De manière plus informelle : quelle que soit l'interprétation X appartenant à A^ω, si $< x_{i_1}, \ldots, x_{i_{l(n)}} >$ appartient à R_n (et donc si $\mathfrak{A} \vDash_{\mathsf{X}} P_n(v_{i_1}, \ldots, v_{i_{k(n)}})$), il appartient également à $S_n \cap A^{l(n)}$ (puisque $\mathfrak{A} \sqsubseteq \mathfrak{B}$) et donc à S_n ; d'où $\mathfrak{B} \vDash_{\mathsf{X}} P_n(v_{i_1}, \ldots, v_{i_{k(n)}})$. Inversement, puisque $\mathsf{X} \in A^\omega$, si $< x_{i_1}, \ldots, x_{i_{l(n)}} >$ appartient à S_n (et donc si $\mathfrak{B} \vDash_{\mathsf{X}} P_n(v_{i_1}, \ldots, v_{i_{k(n)}})$), il appartient également à $A^{l(n)}$ et donc il appartient à $S_n \cap A^{l(n)}$, c'est à dire à R_n (puisque $\mathfrak{A} \sqsubseteq \mathfrak{B}$) ; d'où : $\mathfrak{A} \vDash_{\mathsf{X}} P_n(v_{i_1}, \ldots, v_{i_{k(n)}})$.

$$\mathfrak{A} \models_{\mathsf{X}} \varphi \text{ ssi } \mathfrak{B} \models_{\mathsf{X}} \varphi$$

(ce que l'on pourrait exprimer également par : pour toute formule $\varphi[v_1, \ldots, v_n]$ et toute suite $a_1, \ldots, a_n$ d'éléments de A, on a :

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \text{ ssi } \mathfrak{B} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$$

Dans cette notation, $\varphi[v_1, \ldots, v_n]$ signifie que toutes les variables libres de φ sont parmi les $v_1, \ldots, v_n$ et $\varphi[a_1, \ldots, a_n]$ est le résultat de la substitution de la constante $a_i (1 \leq i \leq n)$ à la variable $v_i (1 \leq i \leq n)$ dans φ si v_i est libre dans φ. Ces notations ne sont pas des formules du langage $\mathcal{L}$.)

2.1.4.2. Un plongement h de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}$ est un *plongement élémentaire* ssi pour toute formule φ et toute interprétation $\mathsf{X} \in A^\omega$:

$$\mathfrak{A} \models_{\mathsf{X}} \varphi \text{ ssi } \mathfrak{B} \models_{h[\mathsf{X}]} \varphi$$

[autre formulation : ssi pour toute formule $\varphi[v_1, \ldots, v_n]$ et toute suite $a_1, \ldots, a_n$ d'éléments de A, on a :

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \text{ ssi } \mathfrak{B} \models \varphi[h(a_1), \ldots, h(a_n)]$$

Ainsi lorsque $\mathfrak{A} \sqsubseteq \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ ssi l'injection i de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}$ est un plongement élémentaire.

2.1.4.3. h est un plongement élémentaire de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}$ ssi il existe $\mathfrak{C}$ tel que h est un isomorphisme entre $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{C} \prec \mathfrak{B}$.

Démonstration :
Dans le sens $\rightarrow$:
Soit $\mathfrak{C} = h[\mathfrak{A}]$. Comme h est un plongement de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}$, on sait que l'on a $h[\mathfrak{A}] \sqsubseteq \mathfrak{B}$ (cf. **2.1.2.2.**) et $\mathfrak{A} \overset{h}{\cong} h[\mathfrak{A}]$ (cf. **2.1.2.6.**) ; donc : $\mathfrak{C} \sqsubseteq \mathfrak{B}$ et $\mathfrak{A} \overset{h}{\cong} \mathfrak{C}$.

Il reste à montrer : $\mathfrak{C} \prec \mathfrak{B}$, i.e. que pour toute interprétation $\mathsf{Z} \in C^\omega$ et pour toute formule φ, on a : $\mathfrak{C} \models_{\mathsf{Z}} \varphi$ ssi $\mathfrak{B} \models_{\mathsf{Z}} \varphi$.
h étant un plongement élémentaire de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}$, on a, par df. : pour toute formule φ et toute interprétation $\mathsf{X} \in A^\omega$:
(1) $\mathfrak{A} \models_{\mathsf{X}} \varphi$ ssi $\mathfrak{B} \models_{h[\mathsf{X}]} \varphi$.

Et comme h est un isomorphisme entre $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{C}$, on a, pour toute formule φ et toute interprétation $\mathsf{X} \in A^\omega$:

(2) $\mathfrak{A} \vDash_{\mathsf{X}} \varphi$ ssi $\mathfrak{C} \vDash_{h[\mathsf{X}]} \varphi$.

De (1) et (2), il suit que pour toute formule φ et toute interprétation $\mathsf{X} \in A^\omega$: $\mathfrak{C} \vDash_{h[\mathsf{X}]} \varphi$ ssi $\mathfrak{B} \vDash_{h[\mathsf{X}]} \varphi$.

Comme h est bijectif entre A et C, à toute interprétation $\mathsf{X} \in A^\omega$ correspond une et une seule interprétation $\mathsf{Z} \in C^\omega$ et réciproquement, et donc :

pour toute formule φ et toute interprétation $\mathsf{Z} \in C^\omega$: $\mathfrak{C} \vDash_{\mathsf{Z}} \varphi$ ssi $\mathfrak{B} \vDash_{\mathsf{Z}} \varphi$; d'où : $\mathfrak{C} \prec \mathfrak{B}$, Cqfd.

Dans le sens $\leftarrow$:

On admet qu'il existe $\mathfrak{C}$ tel que h est un isomorphisme entre $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{C}$ et que $\mathfrak{C} \prec \mathfrak{B}$; à démontrer : h est une plongement élémentaire entre $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$, autrement dit :
a) h est un plongement de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}$, et
b) pour tout $\mathsf{X} \in A^\omega$, et toute formule φ, $\mathfrak{A} \vDash_{\mathsf{X}} \varphi$ ssi $\mathfrak{B} \vDash_{h[\mathsf{X}]} \varphi$.

Pour a) : puisque h est un isomorphisme entre $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{C}$ et que $\mathfrak{C} \prec \mathfrak{B}$ (et donc *a fortiori*, $\mathfrak{C} \sqsubseteq \mathfrak{B}$), on a, par **2.1.2.6.** : h est un plongement de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}$

Pour b) : pour tout $\mathsf{X} \in A^\omega$, et toute formule φ, $\mathfrak{A} \vDash_{\mathsf{X}} \varphi$ ssi (théorème de l'isomorphisme) $\mathfrak{C} \vDash_{h[\mathsf{X}]} \varphi$ ssi (par $\mathfrak{C} \prec \mathfrak{B}$) $\mathfrak{B} \vDash_{h[\mathsf{X}]} \varphi$.

2.1.4.4. Si h est un isomorphisme entre $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$, h est un plongement élémentaire de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}$.

2.1.4.5. Soit h un plongement de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}$. h est un plongement élémentaire de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}$ ssi $h[\mathfrak{A}] \prec \mathfrak{B}$.

Démonstration :
– Dans le sens $\rightarrow$:

On sait que $h[\mathfrak{A}] \sqsubseteq \mathfrak{B}$ (puisque h plongement et donc homomorphisme fort, cf. **2.1.2.2.**), et que h est un isomorphisme entre $\mathfrak{A}$ et h$[\mathfrak{A}]$ (cf. **2.1.2.2.** et **2.1.2.6.**), autrement dit $\mathfrak{A} \cong h[\mathfrak{A}]$.

Donc, on a :
- pour toute interprétation $\mathsf{X} \in A^\omega$ et toute formule φ, $\mathfrak{A} \models_{\mathsf{X}} \varphi$ ssi $h[\mathfrak{A}] \models_{h[\mathsf{X}]} \varphi$.
- pour toute interprétation $\mathsf{X} \in A^\omega$ et toute formule φ, $\mathfrak{A} \models_{\mathsf{X}} \varphi$ ssi $\mathfrak{B} \models_{h[\mathsf{X}]} \varphi$.

Il en résulte que pour toute interprétation $\mathsf{X} \in A^\omega$ et toute formule φ, $h[\mathfrak{A}] \models_{h[\mathsf{X}]} \varphi$ ssi $\mathfrak{B} \models_{h[\mathsf{X}]} \varphi$.

Il suffit alors de remarquer que h étant une bijection entre A et $h[A]$, à toute interprétation $\mathsf{X} \in A^\omega$ correspond une, et une seule, interprétation $\mathsf{Y} \in h[A]^\omega$ et réciproquement ; étant donné ce qui précède, il en résulte que pour toute interprétation $\mathsf{Y} \in h[A]^\omega$ et toute formule φ, $h[\mathfrak{A}] \models_{\mathsf{Y}} \varphi$ ssi $\mathfrak{B} \models_{\mathsf{Y}} \varphi$, i.e. $h[\mathfrak{A}] \prec \mathfrak{B}$.

- Dans le sens $\leftarrow$:

  Il suffit de remarquer que les deux conditions de **2.1.4.3.** sont remplies avec $\mathfrak{C} = h[\mathfrak{A}]$: $\mathfrak{A} \cong h[\mathfrak{A}]$ (cf. ci-dessus) et $h[\mathfrak{A}] \prec \mathfrak{B}$, par hypothèse, donc h est une plongement élémentaire de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}$.

2.1.5 Extension élémentaire et équivalence élémentaire.

2.1.5.1. Trivialement, si $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ alors $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, mais la réciproque n'est pas toujours vraie, même si $\mathfrak{A} \sqsubseteq \mathfrak{B}$ et $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ (exemple : soit $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}_+, <_{\mathbb{N}_+} \rangle$ et $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{N}, <_{\mathbb{N}} \rangle$ avec $\mathbb{N}_+$: entiers naturels positifs, et $\mathbb{N}$, entiers naturels positifs ou nul ; on a bien $\mathfrak{A} \sqsubseteq \mathfrak{B}$ et $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ (et donc $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$) mais pas $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$) [11].
D'où l'intérêt du théorème suivant (test de Tarski-Vaught).

2.1.5.2. Théorème : Soit $\mathfrak{A} \sqsubseteq \mathfrak{B}$, alors : $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ ssi pour toute formule φ de $\mathcal{L}$ et toute interprétation $\mathsf{X} \in A^\omega$ telle que $\mathfrak{B} \vDash_{\mathsf{X}} \exists v_n \varphi$, il existe $a \in A$ tel que $\mathfrak{B} \vDash_{\mathsf{X}(^a/_n)} \varphi$.

Démonstration :

Dans le sens $\rightarrow$ (facile).
Soit $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$, et soit $\mathsf{X} \in A^\omega$, une interprétation quelconque telle que $\mathfrak{B} \vDash_{\mathsf{X}} \exists v_n \varphi$.
A démontrer : il existe $a \in A$ tel que $\mathfrak{B} \vDash_{\mathsf{X}(^a/_n)} \varphi$.

Dans ces conditions, puisque $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$, par df. on a $\mathfrak{A} \vDash_{\mathsf{X}} \exists v_n \varphi$, et donc, toujours par df. il existe un $a \in A$ tel que $\mathfrak{A} \vDash_{\mathsf{X}(^a/_n)} \varphi$. Comme $A \subseteq B$ (puisque $\mathfrak{A}$ sous-structure de $\mathfrak{B}$), $\mathsf{X}(^a/_n) \in B^\omega$ et donc :

$$\mathfrak{B} \vDash_{\mathsf{X}(^a/_n)} \varphi$$

Dans le sens $\leftarrow$:
On suppose : $\mathfrak{A} \sqsubseteq \mathfrak{B}$ et pour toute formule φ de $\mathcal{L}$ et toute interprétation $\mathsf{X} \in A^\omega$, si $\mathfrak{B} \vDash_{\mathsf{X}} \exists v_n \varphi$, alors il existe $a \in A$ tel que $\mathfrak{B} \vDash_{\mathsf{X}(^a/_n)} \varphi$.

A démontrer : pour tout φ, et toute interprétation $\mathsf{X} \in A^\omega$, $\mathfrak{A} \vDash_{\mathsf{X}} \varphi$ ssi $\mathfrak{B} \vDash_{\mathsf{X}} \varphi$.

Pour récurrence sur le degré des formules :

- Soit φ de degré 0 : cela découle directement du fait que $\mathfrak{A} \sqsubseteq \mathfrak{B}$ (cf. **2.1.4.1.**) .

- Hypothèse de récurrence : pour tout φ de degré $< n$, et toute interprétation $\mathsf{X} \in A^\omega$, $\mathfrak{A} \vDash_{\mathsf{X}} \varphi$ ssi $\mathfrak{B} \vDash_{\mathsf{X}} \varphi$.

11. Considérons la formule $\forall v_2(v_1 \neq v_2 \Rightarrow P(v_1, v_2))$, P étant interprété par les relations d'ordre (strict) dans $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$. Cette formule "dit" que v_1 est plus petit que tout nombre différent de lui même. Si donc on considère une interprétation $\mathsf{X} \in \mathbb{N}_+^\omega$ qui interprète v_1 par 1, il est clair que l'on a $\mathfrak{A} \vDash_{\mathsf{X}} \forall v_2(v_1 \neq v_2 \Rightarrow P(v_1, v_2))$ (puisque 1 est bien plus petit que tout nombre $\in \mathbb{N}_+$), mais pas $\mathfrak{B} \vDash_{\mathsf{X}} \forall v_2(v_1 \neq v_2 \Rightarrow P(v_1, v_2))$, puisqu'il existe un nombre $\in \mathbb{N}$, à savoir 0, qui est plus petit que 1.

- Soit φ de degré n.

  Pour φ de la forme $\sim\varphi$ et $\psi \wedge \theta$, démonstration de routine.

  Soit φ de la forme $\exists v_n \psi$.

  1. si $\mathfrak{A} \models_{\mathsf{X}} \exists v_n \psi$, alors il existe un $a \in A$ tel que $\mathfrak{A} \models_{\mathsf{X}({}^a/_n)} \psi$, et donc par hyp. de rec. $\mathfrak{B} \models_{\mathsf{X}({}^a/_n)} \psi$. et $\mathfrak{B} \models_{\mathsf{X}} \exists v_n \psi$.
  2. si $\mathfrak{B} \models_{\mathsf{X}} \exists v_n \psi$, alors par hypothèse (cf. plus haut), il existe $a \in A$ tel que $\mathfrak{B} \models_{\mathsf{X}({}^a/_n)} \psi$; donc, par hyp. de rec., $\mathfrak{A} \models_{\mathsf{X}({}^a/_n)} \psi$, d'où : $\mathfrak{A} \models_{\mathsf{X}} \exists v_n \psi$.

  Donc par 1. et 2. : $\mathfrak{A} \models_{\mathsf{X}} \exists v_n \psi$ ssi $\mathfrak{B} \models_{\mathsf{X}} \exists v_n \psi$. Cqfd.

Petit tableau comparatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{il existe} & & \text{il existe} \\
\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B} & \longrightarrow & h : A \to B & \longrightarrow & h : A \to B \\
 & & \text{plongement de} & & \text{homomorphisme} \\
 & & \mathfrak{A} \text{ dans } \mathfrak{B} & & \text{de } \mathfrak{A} \text{ dans } \mathfrak{B} \\
 & & \uparrow & & \\
 & & \mathfrak{A} \sqsubseteq \mathfrak{B} & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{il existe} & & \\
\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B} & \longrightarrow & h : A \to B & \longrightarrow & \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B} \\
 & & \text{plongement élémentaire} & & \\
 & & \text{de } \mathfrak{A} \text{ dans } \mathfrak{B} & & \\
 & & \uparrow & & \\
 & & \mathfrak{A} \prec \mathfrak{B} & &
\end{array}$$

2.2 Propriété du 1er ordre.

2.1. Df. : Certaines propriétés d'une structure $\mathfrak{A}$ peuvent être « exprimées » dans le langage du premier ordre approprié $\mathcal{L}$ au sens où il existe une phrase σ de $\mathcal{L}$ telle que :

$$\mathfrak{A} \models \sigma \text{ ssi } \mathfrak{A} \text{ a la propriété } P.$$

On dit que P est une *propriété du premier ordre*. Si l'on a affaire non à une phrase mais à un ensemble infini de phrases Σ, on parle de *propriété générale du premier ordre*. Si P est une propriété du premier ordre, on dit que P est *finiment axiomatisable*.

2.2. Exemples :

- La propriété d'avoir au moins n éléments est une propriété du 1er ordre qui s'exprime par la phrase :
$$\sigma_n : \exists v_1, \ldots, v_n(v_1 \neq v_2 \wedge v_1 \neq v_3 \wedge \cdots \wedge v_{n-1} \neq v_n),$$
ainsi que celle d'avoir au plus n éléments qui s'exprime par : $\sim \sigma_{n+1}$ et donc celle d'avoir exactement n éléments : $\sigma_n \wedge \sim\sigma_{n+1}$.

- La propriété d'être infini est une propriété *générale* du 1er ordre : $\mathfrak{A}$ est un modèle de l'ensemble infini de phrases $\{\sigma_n : n < \omega\}$ ssi $\mathfrak{A}$ est infini : en effet, si $\{\sigma_n : n < \omega\}$ admettait un modèle fini, comptant, disons m éléments, alors toutes les phrases de la forme σ_k avec $m < k$, - phrases qui, par hypothèse, appartiennent à $\{\sigma_n : n < \omega\}$ -, seraient fausses dans ce modèle.

- La propriété d'être fini n'est pas une propriété du premier ordre, ni une propriété générale du premier ordre.

Démonstration :

Rappels / préliminaires :

1. Théorème de compacité : un ensemble de phrases Σ est satisfiable ssi tous les sous-ensembles finis de Σ sont satisfiables.

2. Soit Σ et Σ' deux ensembles de phrases tels que $\Sigma \subseteq \Sigma'$; alors tous les modèles de Σ' sont modèles de Σ, ce que l'on peut noter $\mathcal{M}_{od}(\Sigma') \subseteq \mathcal{M}_{od}(\Sigma)$.

3. 3. Soit Σ et Σ' deux ensembles de phrases, non nécessairement disjoints ; alors $\mathcal{M}_{od}(\Sigma \cup \Sigma') = \mathcal{M}_{od}(\Sigma) \cap \mathcal{M}_{od}(\Sigma')$. Il en résulte, en particulier, que si $\mathcal{M}_{od}(\Sigma') = \mathcal{M}_{od}(\Sigma'')$, alors $\mathcal{M}_{od}(\Sigma \cup \Sigma') = \mathcal{M}_{od}(\Sigma) \cap \mathcal{M}_{od}(\Sigma') = \mathcal{M}_{od}(\Sigma) \cap \mathcal{M}_{od}(\Sigma'') = \mathcal{M}_{od}(\Sigma \cup \Sigma'')$.

On démontre d'abord le lemme suivant :

Lemme : si une ensemble Σ de phrases admet des modèles finis arbitrairement grands, alors Σ admet un modèle infini.

On démontre qu'il existe un ensemble de phrases Σ', tel que $\Sigma \subseteq \Sigma'$ et admettant un modèle infini. D'où il suit que Σ admet un modèle infini.

On pose $\Sigma' = \Sigma \cup \{\sigma_n : n < \omega\}$, les σ_n étant les phrases de la forme $\exists v_1, \ldots \exists v_n (v_1 \neq v_2 \wedge v_1 \neq v_3 \wedge \cdots \wedge v_{n-1} \neq v_n)$ qui expriment qu'un modèle a au moins n éléments. Si Σ' admet un modèle, il admet donc un modèle infini, puisque, comme on l'a vu, $\{\sigma_n : n < \omega\}$ n'admet que des modèles infinis.

On démontre que Σ' admet un modèle en montrant que tous les sous-ensembles finis de Σ' admettent un modèle (théorème de compacité).

Soit Δ un sous ensemble fini quelconque de Σ'.

- Si aucune phrase de la forme σ_n n'apparaît dans Δ, alors $\Delta \subseteq \Sigma$; Δ admet donc un modèle puisque que Σ est satisfiable.

- Pour les autres cas, des phrases de la forme σ_n appartiennent à Δ, et donc $\Delta \subseteq \Sigma \cup \{\sigma_{i_1}, \ldots, \sigma_{i_p}\}$, avec $\{\sigma_{i_1}, \ldots, \sigma_{i_p}\} \subseteq \{\sigma_n : n < \omega\}$.

Soit m le plus grand des indices $i_1, \ldots, i_p$; $\sigma_m \in \{\sigma_{i_1}, \ldots, \sigma_{i_p}\}$ est la phrase qui exprime qu'il y a au moins m éléments dans le modèle (les autres phrases de $\{\sigma_{i_1}, \ldots, \sigma_{i_p}\}$ expriment qu'il y a, dans le modèle, au moins m', m', etc. éléments avec m', m'', etc. $< m$). D'où, $\mathcal{M}_{od}(\{\sigma_m\}) = \mathcal{M}_{od}(\{\sigma_{i_1}, \ldots, \sigma_{i_p}\})$ (car s'il y a au moins m éléments et si $m' < m$, il y a, a fortiori, au moins m' éléments).

Ainsi $\mathcal{M}_{od}(\Sigma \cup \{\sigma_m\}) = \mathcal{M}_{od}(\Sigma \cup \{\sigma_{i_1}, \ldots, \sigma_{i_p}\})$ (cf. 3. ci-dessus) et donc, comme $\mathcal{M}_{od}(\Sigma \cup \{\sigma_{i_1}, \ldots, \sigma_{i_p}\}) \subseteq \mathcal{M}_{od}(\Delta)$ (cf. 2. ci-dessus), $\mathcal{M}_{od}(\Sigma \cup \{\sigma_m\}) \subseteq \mathcal{M}_{od}(\Delta)$.

Comme Σ admet des modèles finis arbitrairement grands, Σ admet un modèle, disons $\mathfrak{A}$, comptant au moins m éléments ; $\mathfrak{A}$ est donc un modèle de σ_m. On a donc $\mathfrak{A} \models \Sigma \cup \{\sigma_m\}$, d'où il suit (puisque $\mathcal{M}_{od}(\Sigma \cup \{\sigma_m\}) \subseteq \mathcal{M}_{od}(\Delta)$) que $\mathfrak{A} \models \Delta$.

Δ étant quelconque, on en tire que tous les sous-ensembles finis de Σ' admettent un modèle. Donc, par la compacité, Σ' admet un modèle.

Or un modèle, $\mathfrak{B}$, de $\Sigma' = \Sigma \cup \{\sigma_n : n < \omega\}$, est infini puisque $\{\sigma_n : n < \omega\}$ n'admet que des modèles infinis.

D'un autre côté, comme $\Sigma \subseteq \Sigma'$, $\mathcal{M}_{od}(\Sigma') \subseteq \mathcal{M}_{od}(\Sigma)$ et donc $\mathfrak{B} \models \Sigma$.

D'où : Σ admet un modèle infini, cqfd.

Corollaire : “être fini” n'est pas une propriété axiomatisable.

Supposons l'inverse ; alors il existe un ensemble de phrases Σ tel que tous les modèles finis, et seulement eux, sont modèles de Σ. Σ admettra donc des modèles finis arbitrairement grands ; mais alors (par le lemme ci-dessus) Σ admettra un modèle infini. D'où, il n'existe pas Σ tel que tous les modèles finis, et seulement eux, soient modèles de Σ. cqfd.

– Les propriétés d'être un ordre partiel, un ordre total, un ordre dense sont des propriétés finiment axiomatisables (cf. le cours de 2ème année, p 60 sq.) ; en revanche qu'un ensemble soit bien ordonné n'est pas une propriété générale du premier ordre [12].

– La propriété d'être un groupe est une propriété du 1er ordre, ainsi que celle d'être un groupe abélien.

  Rappel : un groupe est une structure $\mathfrak{G} =< G, \diamond, \mathbf{u} >$ avec :
  – $\diamond$ opération associative
  – $\mathbf{u}$ élément neutre, i.e. pour tout $x \in G$, $x \diamond \mathbf{u} = \mathbf{u} \diamond x = x$
  – existence d'un *inverse* pour $\diamond$, i.e. pour tout $x \in G$, il existe $x' \in G$, tel que : $x \diamond x' = \mathbf{u}$ [13].

12. On dit qu'un ensemble totalement ordonné A est *bien ordonné* lorsque tout sous-ensemble non-vide X de A a un plus petit élément, i.e. : $\forall X\{[X \subseteq A \ \wedge \ X \neq \emptyset] \Rightarrow \exists x[x \in X \ \wedge \ \forall y(y \in X \Rightarrow x \leq y)]\}$; que ce ne soit pas une propriété du 1er ordre tient au fait qu'en premier ordre, on ne quantifie que sur les éléments du domaine de base d'une structure, et non sur des ensembles d'éléments de ce domaine de base.

Le théorème du bon ordre, qui suit de l'axiome du choix, énonce que tout ensemble non-vide peut être bien ordonné, i.e. muni d'un ordre total tel que tout sous-ensemble non-vide ait un plus petit élément.

13. Exemple classique de groupe (*additif*) : l'ensemble des entiers relatifs (positifs et négatifs) avec comme opération l'addition et élément neutre : 0 ; l'inverse de n est $-n$. Ou encore (groupe

Ici, puisque l'on ne dispose pas de lettres de fonction dans nos langages, il faut traduire par une relation à trois places, disons $R_\diamond$, l'opération $\diamond$, en convenant que $< x, y, z > \in R_\diamond$ ssi $x \diamond y = z$ et donc, dans cette notation : $\mathfrak{G} =< G, R_\diamond, \mathbf{u} >$.

Le langage pour les groupes comporte donc une lettre de prédicat à trois places, disons $P_\diamond$ pour simplifier, et une constante $\mathbf{e}$ qui "nomme" l'élément neutre $\mathbf{u}$. Il faut donc exprimer dans ce langage, que :

– le résultat de l'opération $\diamond$ sur deux éléments quelconques de G est unique [14] :
$$\forall v_1, v_2, v_3, v_4\{[P_\diamond(v_1, v_2, v_3) \wedge P_\diamond(v_1, v_2, v_4)] \Rightarrow v_3 = v_4\}$$

– $\diamond$ est associative :
$$\forall v_1, \ldots, v_6\{[\overset{1}{P_\diamond(v_2, v_3, v_4)} \wedge \overset{2}{P_\diamond(v_1, v_2, v_5)} \wedge \overset{3}{P_\diamond(v_5, v_3, v_6)}] \Rightarrow P_\diamond(v_1, v_4, v_6)\}$$ [15]

– $\mathbf{u}$ est un neutre :
$$\forall v_1 P_\diamond(v_1, \mathbf{e}, v_1)$$

– il existe, pour tout élément de G, un inverse dans G :
$$\forall v_1, \exists v_2 P_\diamond(v_1, v_2, \mathbf{e})$$

Si l'on ajoute :

$$\forall v_1, v_2, v_3[P_\diamond(v_1, v_2, v_3) \Rightarrow P_\diamond(v_2, v_1, v_3)]$$

---

multiplicatif : l'ensemble des rationnels avec la multiplication et 1 comme élément neutre ; l'inverse de n est $\frac{1}{n}$.

14. L'unicité du résultat est présupposé lorsque l'on parle d'opération, mais on doit l'expliciter lorsque l'on s'exprime en terme de relation

15. Cette formule peut sembler mystérieuse ; en voilà l'explication. On part de l'expression habituelle de l'associativité (en utilisant les variables v_1, etc. comme s'il s'agissait d'éléments de G) et on fait les "sommes" intermédiaires, exprimées par les trois membres de l'antécédent (numérotés 1, 2, 3), selon le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} v_1 & \diamond & (v_2 \diamond v_3) & = & (v_1 \diamond v_2) & \diamond & v_3 \\ & & \|1 & & \|2 & & \\ v_1 & \diamond & v_4 & = & v_5 & \diamond & v_3 \\ & & & & & \|3 & \\ v_1 & \diamond & v_4 & = & & v_6 & \end{array}$$

Comme on le constate, la dernière ligne est le conséquent de l'implication.

qui exprime que l'opération $\diamond$ est commutative, on a les axiomes d'un *groupe commutatif*, ou groupe *abélien*.

2.3 Complétude, modèle de Henkin.

On admet dans ce qui suit que $\mathcal{L}$ est au plus dénombrable et comporte des symboles de constante $c_1, \ldots, c_n, \ldots$. Une structure $\mathfrak{A}$ pour un langage de ce type comporte donc des éléments distingués (fonctions 0-aires, si l'on veut), $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ correspondant par leurs indices aux symboles de constantes. Un langage de ce genre comprend donc des *phrases élémentaires* de la forme $P_n(c_{i_1}, \ldots, c_{i_{k(n)}})$ ou de la forme $c_i = c_j$.

Df. On dit qu'un ensemble Σ de phrases de $\mathcal{L}$ admet des "témoins de Henkin" ssi pour toute formule $\varphi[v_i]$ ne comportant que la variable libre v_i il existe c_j dans $\mathcal{L}$ tel que $\exists v_i \Rightarrow \varphi(^{c_j}/_{v_i}) \in \Sigma$[16].

Voilà les deux théorèmes importants :

3.1. Si Σ, ensemble de phrases de $\mathcal{L}$, est maximal consistant et admet des témoins de Henkin, alors il existe une structure $\mathfrak{A}$ telle que pour toute phrase $\sigma \in \mathcal{L}$, $\mathfrak{A} \models \sigma$ ssi $\sigma \in \Sigma$.

3.2. Soit Σ, ensemble consistant de phrases de $\mathcal{L}$; alors : il existe $\widehat{\Sigma}$ tel que $\Sigma \subseteq \widehat{\Sigma}$, et $\widehat{\Sigma}$ est maximal consistant et admet des témoins de Henkin (Lindenbaum).

De 3.1. et 3.2. suit :

3.3. Th. : Si un ensemble de phrases Σ est consistant, Σ admet un modèle (dénombrable ici).

2.4 Les théorèmes de Lowenheim-Skolem.

5.1.. Théorème de L-S descendant : Soit Σ un ensemble de phrases de cardinal α ayant un modèle de cardinal $\geq \alpha$; si α est infini, Σ a un modèle de cardinal α, sinon

16. La notation $\varphi(^{c_j}/_x)$ signifie que l'on a substitué c_j à x dans φ en toutes ses occurrences.

Σ a un modèle de cardinal $\aleph_0$.

5 ;2.. Théorème de L-S ascendant : Soit Σ un ensemble de phrases de cardinal α ; si Σ a un modèle infini, Σ a un modèle de cardinal β, pour tout $\beta \geq \alpha$.

2.5 Théories et propriétés des théories.

Une théorie est un ensemble de *phrases*.

Df. : une théorie $\mathcal{T}h$ est *complète* ssi pour toute phrase σ, $\mathcal{T}h \vDash \sigma$ ou $\mathcal{T}h \vDash \sim\sigma$.

6.1 Théorème : une théorie $\mathcal{T}h$ est complète ssi tous ses modèles sont élémentairement équivalents.

Démonstration :
- $\mathcal{T}h$ est une théorie complète ssi
- pour toute phrase $\sigma \in \mathcal{L}$, $\mathcal{T}h \vDash \sigma$ ou $\mathcal{T}h \vDash \sim\sigma$, ssi
- pour toute phrase $\sigma \in \mathcal{L}$ et pour tout $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, modèles de $\mathcal{T}h$, ($\mathfrak{A} \vDash \sigma$ et $\mathfrak{B} \vDash \sigma$) ou ($\mathfrak{A} \vDash \sim\sigma$ et $\mathfrak{B} \vDash \sim\sigma$), ssi
- pour toute phrase $\sigma \in \mathcal{L}$ et pour tout $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, modèles de $\mathcal{T}h$, ($\mathfrak{A} \vDash \sigma$ et $\mathfrak{B} \vDash \sigma$) ou ($\mathfrak{A} \nvDash \sigma$ et $\mathfrak{B} \nvDash \sigma$), ssi
- pour toute phrase $\sigma \in \mathcal{L}$ et pour tout $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, modèles de $\mathcal{T}h$, $\mathfrak{A} \vDash \sigma$ ssi $\mathfrak{B} \vDash \sigma$, ssi
- pour tout $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, modèles de $\mathcal{T}h$, $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, cqfd.[17].

Soit une structure $\mathfrak{A}$. On note $\mathcal{T}h(\mathfrak{A})$ l'ensemble des phrases vraies dans $\mathfrak{A}$; $\mathcal{T}h(\mathfrak{A})$ est dit la théorie de $\mathfrak{A}$.

6.2 : pour toute structure $\mathfrak{A}$, $\mathcal{T}h(\mathfrak{A})$ est une théorie complète[18]. En effet :

soit $\mathcal{T}h(\mathfrak{A})$ la théorie de $\mathfrak{A}$ et une phrase quelconque $\sigma \in \mathcal{L}$. On a $\mathfrak{A} \vDash \sigma$ ou $\mathfrak{A} \vDash \sim\sigma$ et donc : $\sigma \in \mathcal{T}h(\mathfrak{A})$ ou $\sim\sigma \in \mathcal{T}h(\mathfrak{A})$, d'où : $\mathcal{T}h(\mathfrak{A}) \vDash \sigma$ ou $\mathcal{T}h(\mathfrak{A}) \vDash \sim\sigma$. $\mathcal{T}h(\mathfrak{A})$ est

17. Le passage à : $\mathfrak{A} \vDash \sigma$ ssi $\mathfrak{B} \vDash \sigma$, est justifié par la loi logique : $[(\varphi \wedge \psi) \vee (\sim\varphi \wedge \sim\psi)] \Leftrightarrow (\varphi \Leftrightarrow \psi)$. On pourrait également procéder par contraposition : soit $\mathcal{T}h$ une théorie, $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ deux modèles quelconques de $\mathcal{T}h$. $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ ne sont pas élémentairement équivalents, ssi il existe une phrase quelconque $\sigma \in \mathcal{L}$, telle que $\mathfrak{A} \vDash \sigma$ et $\mathfrak{B} \nvDash \sigma$, ssi $\mathfrak{A} \nvDash \sim\sigma$ et $\mathfrak{B} \nvDash \sigma$ ssi $\mathcal{T}h \nvDash \sim\sigma$ et $\mathcal{T}h \nvDash \sigma$ ssi $\mathcal{T}h$ n'est pas complète.

18. Remarque : $\mathcal{P}n$, l'arithmétique de Peano, est donc, par le théorème de Gödel, différente de $\mathcal{T}h(\mathbb{N})$.

donc complète.

Df. : une théorie $\mathcal{T}h$ est *catégorique* ssi tous ses modèles sont isomorphes.

Il s'ensuit immédiatement que si une théorie est catégorique, elle est complète puisque si tous ses modèles sont isomorphes, ils sont, *a fortiori*, élémentairement équivalents. La réciproque n'est évidemment pas vraie sauf si une théorie complète admet un modèle fini.

En raison des théorèmes de Lowenheim-Skolem, il y a fort peu de théorie catégorique. Un exemple simple de théorie catégorique est l'unique phrase : $\sigma_n \wedge \sim \sigma_{n+1}$ pour un n donné.

Df. : une théorie $\mathcal{T}h$ est *κ-catégorique* ssi $\mathcal{T}h$ a des modèles de cardinalité κ et que tous ses modèles de cardinalité κ sont isomorphes.

note : cela ne veut pas dire : pour tout κ, sauf dans la situation suivante :

6.3 : si $\kappa > \aleph_0$ et $\mathcal{T}h$ est κ-catégorique, alors $\mathcal{T}h$ est λ-catégorique pour tout $\lambda > \aleph_0$.

Test de complétude de Vaught :

6.4 : soit $\mathcal{T}h$ une théorie de cardinalité κ qui n'a pas de modèle fini. Si $\mathcal{T}h$ est λ-catégorique, pour un λ infini $\geq \kappa$, alors $\mathcal{T}h$ est complète.

Démonstration (on utilise le théorème de complétude) :

Supposons que $\mathcal{T}h$ soit λ-catégorique, n'admette pas de modèle fini et ne soit pas complète.

On a alors : il existe une phrase $\sigma \in \mathcal{L}$ telle que : $\mathcal{T}h \not\models \sigma$ et $\mathcal{T}h \not\models \sim \sigma$. Puisque $\mathcal{T}h \not\models \sigma$, il existe donc un modèle de $\mathcal{T}h$ qui n'est pas modèle de σ et est donc modèle de $\sim \sigma$, de sorte que ce modèle est modèle de $\mathcal{T}h_1 = \mathcal{T}h \cup \{\sim \sigma\}$. $\mathcal{T}h_1$ est donc consistante.

De la même manière, il existe un modèle de $\mathcal{T}h_2 = \mathcal{T}h \cup \{\sigma\}$ et $\mathcal{T}h_2$ est consistante.

Etant consistantes, $\mathcal{T}h_1$ et $\mathcal{T}h_2$ admettent des modèles qui, puisque $\mathcal{T}h$ n'a pas de modèles finis, ne sont pas finis. Par le théorème de Lowenheim-Skolem (ascendant), $\mathcal{T}h_1$ et $\mathcal{T}h_2$ ont des modèles de cardinal $\lambda > \kappa$ qui sont également modèles de $\mathcal{T}h$. Comme, par hypothèse, $\mathcal{T}h$ est λ-catégorique, tous ces modèles sont isomorphes.

Or si un de ces modèles, disons $\mathfrak{A}$, est modèle de $\mathcal{T}h_1$, il est modèle de $\sim \sigma$. De la même manière, si un de ces modèles, disons $\mathfrak{B}$, est modèle de $\mathcal{T}h_2$, il est modèle de σ. On a donc : $\mathfrak{A} \models \sim \sigma$ et $\mathfrak{B} \models \sigma$, ce qui contredit le fait que ces deux modèles sont isomorphes. $\mathcal{T}h$ est donc complète.

Df. : une théorie $\mathcal{T}h$ est *modèle-complète* si toutes les fois que $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ sont modèles de $\mathcal{T}h$ et que $\mathfrak{A} \sqsubseteq \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$.

La modèle-complétude n'entraîne pas la complétude, ni l'inverse.

Df. : soit $\mathcal{T}h$ une théorie ; $\mathfrak{P}$ est un *modèle principal* de $\mathcal{T}h$ ssi tout modèle de $\mathcal{T}h$ a une sous-structure isomorphe à $\mathfrak{A}$.

6.5 : si $\mathcal{T}h$ est modèle-complète et admet un modèle principal, alors $\mathcal{T}h$ est complète.

Démonstration : soit $\mathfrak{P}$ un modèle principal de $\mathcal{T}h$ que l'on suppose modèle-complète. Soit $\mathfrak{A}_1$ et $\mathfrak{A}_2$, deux modèles de $\mathcal{T}h$; on démontre que $\mathfrak{A}_1 \equiv \mathfrak{A}_2$. En effet puisque $\mathfrak{P}$ est modèle principal de $\mathcal{T}h$, il existe $\mathfrak{B}_1 \sqsubseteq \mathfrak{A}_1$ et $\mathfrak{B}_2 \sqsubseteq \mathfrak{A}_2$ telles que $\mathfrak{B}_1 \cong \mathfrak{P} \cong \mathfrak{B}_2$ ("$\cong$", relation d'équivalence sur les modèles) ; il en résulte, en particulier :

$$\alpha. \qquad \mathfrak{B}_1 \equiv \mathfrak{B}_2.$$

De plus, comme $\mathcal{T}h$ est modèle-complète, et que $\mathfrak{B}_1 \sqsubseteq \mathfrak{A}_1$ et $\mathfrak{B}_2 \sqsubseteq \mathfrak{A}_2$, on a : $\mathfrak{B}_1 \prec \mathfrak{A}_1$ et $\mathfrak{B}_2 \prec \mathfrak{A}_2$; d'où (voir 2.1.5.1) : $\mathfrak{B}_1 \equiv \mathfrak{A}_1$ et $\mathfrak{B}_2 \equiv \mathfrak{A}_2$. Et comme "$\equiv$" est une relation d'équivalence sur les modèles, il en résulte, avec α :

$$\mathfrak{A}_1 \equiv \mathfrak{A}_2.$$

Tableau récapitulatif

$$\begin{tikzcd}
\text{modèles isomorphes} \arrow[rr] \arrow[d, <->] & & \text{modèles élém. éq.} \arrow[d, <->] & & \mathfrak{A} \sqsubseteq \mathfrak{B} \to \mathfrak{A} \prec \mathfrak{B} \arrow[d, <->] \\
\mathcal{T}h \text{ catégorique} \arrow[dr] & & \mathcal{T}h \text{ complète} \arrow[ll, "\text{si modeles finis}"'] & & \mathcal{T}h \text{ modèle-complète} \arrow[ll, "\exists \text{ mod.principal}"'] \\
& \lambda\text{-catégorique} \arrow[ur, "\text{si pas de mod. finis}"'] & & &
\end{tikzcd}$$

3 Arithmétique

3.1 Axiomes de (Dedekind) Peano.

Soit la structure $\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}, s, +, \times, 0\rangle$, avec comme “signification” habituelle :

– $\mathbb{N} \rightarrow$ ensemble des entiers naturels
– $s \rightarrow$ fonction "successeur" à un argument : $s(n) = n + 1$;
– $+ \rightarrow$ fonction "addition", à deux arguments : $+(n, m) = n + m$;
– $\times \rightarrow$ fonction "multiplication" à deux arguments : $\times(n, m) = n \times m$;
– $0 \rightarrow$ zéro.

Le langage adéquat $\mathcal{L}^{\mathfrak{N}}$ pour cette structure comporte comme symboles particuliers :
– la constante d'individu $\mathbf{c}$ qui nomme 0,
– la constante de fonction à un argument f^s qui désigne la fonction s
– les constantes de fonction à deux arguments f^+ et $f^\times$ qui sont interprétées par les fonctions $+$ et $\times$ respectivement.

Les axiomes de Peano, $\mathcal{P}$, exprimés dans $\mathcal{L}^{\mathfrak{N}}$ sont les six phrases suivantes ainsi qu'une infinité de phrases correspondant au schéma d'induction :

1. $\forall v_1[\mathbf{c} \neq f^s(v_1)]$, i.e. : 0 n'est pas un successeur.
2. $\forall v_1, v_2[f^s(v_1) = f^s(v_2) \Rightarrow v_1 = v_2]$, i.e : f^s est injective.
3. $\forall v_1[f^+(v_1, \mathbf{c}) = v_1)]$, i.e. : $n + 0 = n$.
4. $\forall v_1, v_2\{f^+(v_1, f^s(v_2)) = f^s(f^+(v_1, v_2))\}$, i.e. : $m + (n + 1) = (m + n) + 1$.
5. $\forall v_1[f^\times(v_1, \mathbf{c}) = \mathbf{c}]$, i.e. : $n \times 0 = 0$.
6. $\forall v_1, v_2[f^\times(v_1, f^s(v_2)) = f^+(f^\times(v_1, v_2), v_1)]$, i.e. : $m \times (n + 1) = (m \times n) + m$.
7. Schéma d'induction : $\{\varphi[\mathbf{c}] \wedge \forall v_1[\varphi[v_1] \Rightarrow \varphi[f^s(v_1)]]\} \Rightarrow \forall v_1 \varphi[v_1]$,

avec $\varphi[\mathbf{c}]$ formule contenant $\mathbf{c}$ et $\varphi[v_1]$ obtenue à partir de $\varphi[\mathbf{c}]$ par substitution de v_1 à $\mathbf{c}$[19].

19. Voilà, à titre d'exemple, ce que deviendrait ce qui précède si l'on s'exprimait en termes de relations. La structure $\mathfrak{N}$ s'écrit maintenant : $\langle \mathbb{N}, R^s, R^+, R^\times, 0\rangle$, avec comme “signification” habituelle :
– $\mathbb{N} \rightarrow$ ensemble des entiers naturels
– $R^s \rightarrow$ relation à deux places correspondant à la fonction “successeur” ;

On appelle "arithmétique de Peano", l'ensemble des conséquences de $\mathcal{P}$, i.e. $Cn(\mathcal{P})$. On sait depuis Gödel (1931) que l'arithmétique de Peano n'est pas complète au sens où : $Cn(\mathcal{P}) \subset \mathcal{T}h(\mathfrak{N})$, i.e. l'ensemble des conséquences de $\mathcal{P}$ est *strictement* inclus dans l'ensemble des phrases vraies dans $\mathfrak{N}$. Toutefois comme on a : $Cn(\mathcal{P}) \subset \mathcal{T}h(\mathfrak{N})$, tous les modèles de $\mathcal{T}h(\mathfrak{N})$ sont modèles de $Cn(\mathcal{P})$.

3.2 Modèles non-standards de l'arithmétique de Peano.

On montre qu'il existe des modèles non-standards de l'arithmétique, i.e. des modèles de $\mathcal{T}h(\mathfrak{N})$, et donc, en vertu de la remarque précédente, de $Cn(\mathcal{P})$, non iso-

---

- $R^+ \rightarrow$ relation à trois places correspondant à l'addition sur les entiers ;
- $R^\times \rightarrow$ relation à trois places correspondant à la multiplication sur les entiers ;
- $0 \rightarrow$ zéro.

en admettant :
- $< m, n > \in R^s$ ssi $n = m + 1$
- $< l, m, n > \in R^+$ ssi $l + m = n$
- $< l, m, n > \in R^\times$ ssi $l \times m = n$.

Le langage adéquat pour cette structure, que l'on note sans changement : $\mathcal{L}^{\mathfrak{N}}$, comporte alors comme symboles particuliers :
- la constante d'individu **c** qui nomme 0,
- la constante de prédicat à deux places P^s qui désigne la relation R^s
- les constantes de prédicat à trois places P^+ et $P^\times$ qui sont interprétées par les relations R^+ et $R^\times$ respectivement.

Enfin les axiomes de Peano, $\mathcal{P}$, s'expriment ainsi dans ce langage ne comportant que des constantes de prédicats et une constante d'individu, par :

1. $\forall v_1, v_2[P^s(v_1, v_2) \Rightarrow c \neq v_2]$, i.e. : 0 n'est pas un successeur.
2. $\forall v_1, v_2, v_3[P^s(v_1, v_3) \Rightarrow [P^s(v_2, v_3) \Rightarrow v_1 = v_2]$, i.e : R^s est un-un.
3. $\forall v_1[P^+(v_1, \mathbf{c}, v_1)]$, i.e. : $n + 0 = n$.
4. $\forall v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\{[P^s(v_2, v_3) \wedge P^+(v_1, v_3, v_4) \wedge P^+(v_1, v_2, v_5) \wedge P^s(v_5, v_6)] \Rightarrow v_4 = v_6\}$, i.e. : $m + (n + 1) = (m + n) + 1$.
5. $\forall v_1[P^\times(v_1, \mathbf{c}, \mathbf{c})]$, i.e. : $n \times 0 = 0$.
6. $\forall v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\{[P^s(v_2, v_3) \wedge P^\times(v_1, v_3, v_4) \wedge P^\times(v_1, v_2, v_5) \wedge P^+(v_5, v_1, v_6)] \Rightarrow v_4 = v_6\}$, i.e. : $m \times (n + 1) = (m \times n) + m$.
7. Schéma d'induction : $\{\varphi[\mathbf{c}] \wedge \forall v_1, v_2[(\varphi[v_1] \wedge P^s(v_1, v_2)) \Rightarrow \varphi[v_2]]\} \Rightarrow \forall v_1 \varphi[v_1]$, avec $\varphi[\mathbf{c}]$ formule contenant **c** et $\varphi[v_1]$ obtenue à partir de $\varphi[\mathbf{c}]$ par substitution de v_1 à **c**.

Comme on le voit, en particulier pour les axiomes 4. et 6., la formulation en termes de relation est beaucoup plus laborieuse !

morphes à $\mathfrak{N}$.

On étend $\mathcal{L}^{\mathfrak{N}}$, le langage pour $\mathfrak{N}$, à $\mathcal{L}^{\mathfrak{N}*}$ en ajoutant la constante $\mathbf{k}$ à $\mathcal{L}^{\mathfrak{N}}$.

Soit les phrases α^n de la forme : $\mathbf{k} \neq \overbrace{f^s \dots f^s}^{n}\mathbf{c}$, dans lesquelles "$\overbrace{f^s \dots f^s}^{n}\mathbf{c}$" désigne le n-ième successeur de 0 (à savoir $n\,!$) ; une phrase α^n "dit" donc : "l'élément de la structure nommé par $\mathbf{k}$ est différent de n". On note cet élément : κ[20].

On forme l'ensemble $\Sigma = \mathcal{T}h(\mathfrak{N}) \cup \{\alpha^n : n \in \mathbb{N}\}$, en ajoutant à $\mathcal{T}h(\mathfrak{N})$ toutes les phrases de la forme α^n.

1. On montre d'abord que Σ admet au moins un modèle en montrant que tout sous-ensemble fini de Σ admet un modèle (on fait donc usage du théorème de compacité).

Soit Σ_0 un sous-ensemble fini quelconque de Σ ; Σ_0 ne contient donc qu'un nombre fini de phrases de la forme α^n. Soit m le plus grand des exposants des phrases α^n appartenant à Σ_0. Soit enfin l'extension $\langle \mathfrak{N}, m+1 \rangle$ de $\mathfrak{N}$, avec l'élément distingué $\kappa = m+1$ (nommé par la constante $\mathbf{k}$), i.e. $\langle \mathfrak{N}, m+1 \rangle = \langle \mathbb{N}, s, +, \times, 0, m+1 \rangle$.

- Toutes les phrases de Σ_0 qui ne sont pas de la forme α^n, sont vraies dans $\langle \mathfrak{N}, m+1 \rangle$ puisqu'elles sont vraies dans $\mathfrak{N}$.

- Les phrases α^n $(n \leq m)$ de Σ_0, sont également vraies dans $\langle \mathfrak{N}, m+1 \rangle$ puisque, les exposants de ces phrases étant tous inférieurs à $m+1$, tous les n-ièmes successeurs de 0 $(n < m+1)$ sont évidemment différents de $m+1$.

On a donc : $\langle \mathfrak{N}, m+1 \rangle \vDash \Sigma_0$.

Comme Σ_0 était parfaitement quelconque, cela vaut de tout sous-ensemble fini de Σ. Il existe donc une structure, disons $\mathfrak{M}$, qui est modèle de Σ et dans laquelle toutes les phrases de la forme α^n sont vraies (ce qui veut dire intuitivement qu'il existe un élément, κ, qui est différent des éléments dont l'ensemble, à savoir $\mathbb{N}$, satisfait les phrases de $\mathcal{T}h(\mathfrak{N})$).

20. A noter : n étant toujours un nombre fini, les phrases α^n sont toutes de longueur finie, mais évidemment il y a une infinité dénombrable de telles phrases.

2. On montre maintenant qu'il existe une réduction $\mathfrak{M}_0$ de $\mathfrak{M}$, qui est modèle de $\mathcal{T}h(\mathfrak{N})$ mais qui n'est pas isomorphe à $\mathfrak{N}$.

Soit $\mathfrak{M}_0$ la réduction de $\mathfrak{M}$ au langage $\mathcal{L}^{\mathfrak{N}}$, i.e. on ne distingue plus κ, l'élément de $\mathfrak{M}$ qui par construction est nommé par la constante **k** dans le langage étendu $\mathcal{L}^{\mathfrak{N}*}$; κ appartient toujours à M, domaine de $\mathfrak{M}$ comme de $\mathfrak{M}_0$, mais n'a pas de "nom" dans $\mathcal{L}^{\mathfrak{N}}$.

Les phrases de $\mathcal{T}h(\mathfrak{N})$ étant vraies dans $\mathfrak{M}$, elles le restent dans $\mathfrak{M}_0$ puisque aucune de ces phrases ne contient la constante **k**. On a donc : $\mathfrak{M}_0 \vDash \mathcal{T}h(\mathfrak{N})$.

Mais, comme on va le voir, $\mathfrak{N}$ n'est pas isomorphe à $\mathfrak{M}_0$ (intuitivement : le domaine de base de $\mathfrak{M}_0$ contient un élément "de plus" que celui de $\mathfrak{N}$)

Supposons, en effet, qu'il existe un isomorphisme, $h : \mathbb{N} \to M$, entre $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{M}_0$. Il existe donc un élément $n \in \mathbb{N}$ tel que $h(n) = \kappa$, κ étant, rappelons-le, l'élément ex-distingué de $\mathfrak{M}$ qui ne l'est plus dans $\mathfrak{M}_0$ mais qui appartient encore à M, domaine de $\mathfrak{M}_0$.

Mais alors, il existe une formule qui est vraie dans $\mathfrak{M}_0$ et fausse dans $\mathfrak{N}$. Il est clair en effet que l'on a, pour toute interprétation $\mathsf{X} \in \mathbb{N}^\omega$:

– $\mathfrak{M}_0 \vDash_{h[\mathsf{X}](^{h(n)}/_1)} v_1 \neq \overbrace{f^s \dots f^s}^{n}\mathbf{c}$, et

– $\mathfrak{N} \nvDash_{\mathsf{X}(^{n}/_1)} v_1 \neq \overbrace{f^s \dots f^s}^{n}\mathbf{c}$ [21]

i.e. il est vrai dans $\mathfrak{M}_0$ que κ $(= h(n))$ est différent de n, mais il est clairement faux dans $\mathfrak{N}$ que n soit différent de n (!). En vertu du théorème de l'isomorphisme (cf. p. 14), h n'est donc pas un isomorphisme.

21. Remarque : $h[\mathsf{X}](^{h(n)}/_1) = h[\mathsf{X}](^{\kappa}/_1) = h[\mathsf{X}(^{n}/_1)]$.

3.3 Une "micro" arithmétique complète.

Soit la structure $\mathfrak{N}_s = \langle \mathbb{N}, s, 0, \rangle$, avec $\mathbb{N}$ ensemble des entiers naturels, s, la fonction successeur, et 0, élément distingué.

Pour simplifier, on admet que dans le langage pour cette structure, la constante s nomme la fonction successeur (autonymie) et $\mathbf{c}$ est une constante d'individu qui nomme 0.

Soit $\mathbf{A}_s$ l'ensemble des axiomes suivant, clairement vrais dans $\mathfrak{N}_s$:

1. $\forall v_1[\mathbf{c} \neq s(v_1)]$, i.e. : zéro n'est pas un successeur ;
2. $\forall v_1, v_2[(s(v_1) = s(v_2)) \Rightarrow v_1 = v_2]$, i.e. : s est injective
3. $\forall v_1\{v_1 \neq \mathbf{c} \Rightarrow \exists v_2[v_1 = s(v_2)]\}$, i.e. tout nombre différent de zéro est un successeur (a un prédécesseur !)
4. pour tout n, les formules de la forme : $\forall v_1[s^n(v_1) \neq v_1]$, i.e., il n'y a pas de cycle : le n-ième successeur de m est différent de m, quel que soit n et m. [22].

On démontre que $Cn(\mathbf{A}_s) = \mathcal{T}h(\mathfrak{N}_s)$, i.e. $\mathcal{T}h(\mathfrak{N}_s)$ est axiomatisable.

- a. dans le sens $Cn(\mathbf{A}_s) \subseteq \mathcal{T}h(\mathfrak{N}_s)$, les choses sont simples ; on sait, en général, que pour toute phrase σ, tout ensemble de phrases Σ et toute structure $\mathfrak{A}$, si $\mathfrak{A} \models \Sigma$ et $\Sigma \models \sigma$, alors $\mathfrak{A} \models \sigma$.

Or $\mathfrak{N}_s \models \mathbf{A}_s$, et $\sigma \in Cn(\mathbf{A}_s)$ ssi $\mathbf{A}_s \models \sigma$, donc, pour tout $\sigma \in Cn(\mathbf{A}_s)$: $\mathfrak{N}_s \models \sigma$ i. e. $\sigma \in \mathcal{T}h(\mathfrak{N}_s)$, par df. de $\mathcal{T}h(\mathfrak{N}_s)$

- b. dans le sens $\mathcal{T}h(\mathfrak{N}_s) \subseteq Cn(\mathbf{A}_s)$, les choses sont plus compliquées.

On démontre que $Cn(\mathbf{A}_s)$ est complète, d'où il suit que $\mathcal{T}h(\mathfrak{N}_s) \subseteq Cn(\mathbf{A}_s)$.

En effet, supposons σ quelconque et $\sigma \notin Cn(\mathbf{A}_s)$. Comme $Cn(\mathbf{A}_s)$ est supposée complète (ce qui, donc, devra être prouvé), $\sim \sigma \in Cn(\mathbf{A}_s)$ et donc, par le point **a.** ci-dessus, $\mathfrak{N}_s \models \sim \sigma$. D'où $\mathfrak{N}_s \not\models \sigma$ et donc $\sigma \notin \mathcal{T}h(\mathfrak{N}_s)$. Par contraposition, on a donc : si $\sigma \in \mathcal{T}h(\mathfrak{N}_s)$, alors $\sigma \in Cn(\mathbf{A}_s)$; comme σ était quelconque, cela vaut pour toute phrase et donc $\mathcal{T}h(\mathfrak{N}_s) \subseteq Cn(\mathbf{A}_s)$.

---

22. "$s^n(v_1)$" est une abréviation pour la formule (on omet les parenthèses pour simplifier) : $\overbrace{s \ldots s}^{n} v_1$. L'ensemble des formules de cette forme est évidemment infini dénombrable.

A démontrer, donc : $Cn(\mathbf{A}_s)$ est complète. Pour cela, on va faire usage du test de Vaught, (cf. 6. 4.) et il faut donc examiner quels sont les modèles possibles de $\mathbf{A}_s$.

Au vu des axiomes de $\mathbf{A}_s$, on peut caractériser assez précisément ces modèles $\mathfrak{A} = \langle A, s_1, 0_1 \rangle$ tels que $\mathfrak{A} \vDash \mathbf{A}_s$:

1. Les axiomes 1. - 3. impose que les domaines A de ces modèles soient infinis ; en effet : en vertu de 1. et 3. $s_1[A] = A - \{0_1\}$ puisque tous les éléments de A sauf 0_1 sont images par s_1 d'un élément de A et comme en vertu de 2. s_1 est injective, $s_1 : A \rightarrow s_1[A](= A - \{0_1\})$ est bijective ; or $A - \{0_1\} \subset A$, donc s_1 est une bijection entre A et une de ses parties propres, ce qui, par df., signifie que A est infini.
2. En vertu de 1. 0_1 est le "premier" élément d'une suite d'éléments de A, tous distincts en vertu de 4., suite qui n'a pas de dernier élément puisque s'il y en avait un, il y aurait un élément de A qui n'aurait pas d'image par s_1 dans A, ce qui contredirait le fait que $s_1 : A \rightarrow A$. On peut figurer cette suite ainsi :
$$0_1 \quad \rightarrow \quad s_1(0_1) \quad \rightarrow \quad s_1(s_1(0_1)) \quad \rightarrow \quad s_1(s_1(s_1(0_1))) \quad \rightarrow \quad \ldots$$
Cette suite "ressemble" donc à la suite des entiers naturels de $\mathfrak{N}_s$ et est appelée, en conséquence, "partie standard" de $\mathfrak{A}$.
3. Rien n'interdit cependant qu'il y ait d'autres éléments de A ne figurant pas dans la partie standard. Soit $\mathbf{a}$ un tel élément. En vertu de 3. $\mathbf{a}$ doit avoir un prédécesseur qui lui-même doit en avoir un, etc… Et comme $s_1 : A \rightarrow A$, $\mathbf{a}$ a un successeur, qui lui-même a un successeur, etc… Et en vertu de 4 ; tous ces éléments sont distincts. On a donc une suite que l'on figurer ainsi :
$$\ldots \quad \rightarrow \quad \bullet \quad \rightarrow \quad \bullet \quad \rightarrow \quad \mathbf{a} \quad \rightarrow \quad s_1(\mathbf{a}) \quad \rightarrow \quad s_1(s_1(\mathbf{a})) \quad \rightarrow \quad \ldots$$
En raison de sa ressemblance avec la suite des entiers relatifs, $\mathbb{Z}$, on appelle une suite de ce genre une "$\mathbb{Z}$-chaîne". Rien n'interdit qu'il y ait un nombre aussi grand que l'on veut de telles "$\mathbb{Z}$-chaînes".
4. En vertu de 2. (injectivité de s_1) les $\mathbb{Z}$-chaînes sont toutes disjointes entre elles et disjointes de la partie standard (sinon un même élément aurait deux prédécesseurs, ou, si l'on veut, deux éléments auraient un même successeur).

   Remarque : soit $\mathbf{Z}$ une $\mathbb{Z}$-chaîne dans une structure $\mathfrak{A} : \langle A, s_1, 0_1 \rangle$ ayant les caractéristiques indiquées précédemment. La restriction à $\mathbf{Z}$ de s_1 est bijective, puisque d'une part s_1 est injective et, d'autre part, que $s[\mathbf{Z}] = \mathbf{Z}$ puisque tout élément de $\mathbf{Z}$ est image par s_1 d'un élément de $\mathbf{Z}$ en vertu de 3. et du fait que

$\mathbf{Z}$ est disjointe de toute autre $\mathbb{Z}$-chaîne et de la partie standard. s_1 sur $\mathbf{Z}$ est donc injective et surjective, i.e. bijective, et admet une inverse s_1^{-1}. On peut donc figurer une $\mathbb{Z}$-chaîne ainsi :

$$\ldots \;\rightarrow\; s_1^{-1}(s_1^{-1}(\mathbf{a})) \;\rightarrow\; s_1^{-1}(\mathbf{a}) \;\rightarrow\; \mathbf{a} \;\rightarrow\; s_1(\mathbf{a}) \;\rightarrow\; s_1(s_1(\mathbf{a})) \;\rightarrow\; \ldots$$

En résumé, un modèle $\mathfrak{A} = \langle A, s_1, 0_1 \rangle$ pour $\mathbf{A}_s$, comporte donc une partie standard et un nombre quelconque de $\mathbb{Z}$-chaînes. Ce que l'on peut figurer ainsi :

$$\begin{array}{c|cccc}
\text{Partie standard} & & \mathbb{Z}\text{-chaines} & & \\
 & \ldots & & \ldots & \ldots \\
 & & \vdots & \vdots & \\
 & & s_1^{-1}(s_1^{-1}(\mathbf{a})) & s_1^{-1}(s_1^{-1}(\mathbf{a}')) & \\
 & & \downarrow & \downarrow & \\
 & & s_1^{-1}(\mathbf{a}) & s_1^{-1}(\mathbf{a}') & \\
 & & \downarrow & \downarrow & \\
0_1 & & \mathbf{a} & \mathbf{a}' & \\
\downarrow & & \downarrow & \downarrow & \\
s_1(0_1) & & s_1(\mathbf{a}) & s_1(\mathbf{a}') & \\
\downarrow & & \downarrow & \downarrow & \\
s_1(s_1(0_1)) & & s_1(s_1(\mathbf{a})) & s_1(s_1(\mathbf{a}')) & \\
\downarrow & & \downarrow & \downarrow & \\
\vdots & & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

Il est facile de voir que toute structure $\mathfrak{A} = \langle A, s_1, 0_1 \rangle$ qui a une partie standard et un nombre quelconque de $\mathbb{Z}$-chaînes (disjointes) est un modèle pour $\mathbf{A}_s$: 0_1 n'a pas de prédécesseur, ce qui satisfait le premier axiome, s_1 est bien injective (deuxième axiome), tout élément de A autre que 0_1 a un prédécesseur et enfin il n'y a pas de "boucle" (ce qui satisfait l'ensemble infini des formules de la forme $\forall v_1 (s_1^n(v_1) \neq v_1)$.

Tous les modèles de $\mathbf{A}_s$ sont, comme on l'a vu, au moins infini dénombrable. Ce qui les distingue, c'est le nombre de $\mathbb{Z}$-chaînes de telle sorte que le cardinal de ces modèles est $\aleph_0$ s'il y a $\aleph_0$ ou moins de $\mathbb{Z}$-chaînes (puisque $\aleph_0 + \aleph_0 + \cdots + \ldots \aleph_0 + \ldots = \aleph_0$). Sinon pour k $\mathbb{Z}$-chaînes, avec $k > \aleph_0$, le cardinal du modèle est k (puisque si $k > \aleph_0$,

$\aleph_0 + k \cdot \aleph_0 = k$).

On démontre maintenant que si deux modèles quelconques de $\mathbf{A}_s$, $\mathfrak{A} = \langle A, s_1, 0_1 \rangle$ et $\mathfrak{B} = \langle B, s_2, 0_2 \rangle$, ont le même nombre de Z-chaînes, ces modèles sont isomorphes, autrement dit il existe un isomorphisme $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$.

On définit h par les clauses suivantes :

1. Sur la partie standard, les choses sont simples : on pose $h(0_1) = 0_2$ et, pour tout $n > 0$, $h(s_1^n(0_1)) = s_2^n(0_2)$.
2. Pour les $\mathbb{Z}$-chaînes, les choses sont plus délicates. L'idée est qu'il faut sélectionner dans chaque $\mathbb{Z}$-chaîne de $\mathfrak{A}$ et dans chaque $\mathbb{Z}$-chaîne de $\mathfrak{B}$ un élément qui servira de "point de repère", i.e. ces éléments joueront, dans la définition de h, le rôle pour ces $\mathbb{Z}$-chaînes que jouent 0_1 et 0_2 pour les parties standards des deux structures.

   Pour y parvenir, on utilise un "gros" axiome de la théorie des ensembles ; à savoir l'axiome du choix qui énonce que, étant donné une collection $\mathcal{C}$, finie ou infinie, d'ensembles disjoints deux à deux, il existe un ensemble E_c, dit "ensemble de choix", tel que, pour chaque ensemble $A \in \mathcal{C}$, un et seul élément de A appartient à E_c.
   On forme donc à partir de la collection des $\mathbb{Z}$-chaînes de $\mathfrak{A}$, l'ensemble de choix A_c et, de la même manière, l'ensemble de choix B_c à partir de la collection des $\mathbb{Z}$-chaînes de $\mathfrak{B}$. Comme il y a, par hypothèse, le même nombre de $\mathbb{Z}$-chaînes dans $\mathfrak{A}$ que dans $\mathfrak{B}$, A_c et B_c ont même cardinal, et il y a donc une bijection $f : A_c \to B_c$.

   On définit alors $h : A \to B$ sur la partie non-standard de $\mathfrak{A}$ par :
   pour tout $a \in A_c$ et tout n,
   – $h(a) = f(a)$ (rappel : $f(a) \in B_c$),
   – $h(s_1^n(a)) = s_2^n(f(a))$ et
   – $h(s_1^{-1^n}(a)) = s_2^{-1^n}(f(a))$.

On montre que h, ainsi défini, est un isomorphisme entre $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ (mais cela est intuitivement assez clair !!).

– h est injectif : soit deux éléments quelconques, $a_0, a_1 \in A$ avec $a_0 \neq a_1$. Plusieurs cas possibles :

- a_0 et a_1 n'appartiennent pas à la même $\mathbb{Z}$-chaîne dans $\mathfrak{A}$. En ce cas, il existe $a, a' \in A_c$ ($a \neq a'$) tels que, par ex. (les autres cas se traitent de manière semblable[23]) $a_0 = s_1^n(a)$ et $a_1 = s_1^m(a')$. Comme $a \neq a'$, $f(a) \neq f(a')$ (f bijection) ; et comme $f(a)$ et $f(a')$ appartiennent à deux $\mathbb{Z}$-chaînes différentes dans $\mathfrak{B}$ et que les $\mathbb{Z}$-chaînes sont disjointes, $h(a_0) = h(s_1^n(a)) = s_2^n(f(a)) \neq s_2^m(f(a')) = h(s_1^m(a')) = h(a_1)$.
Autrement dit, si a_0 et a_1 n'appartiennent pas à la même $\mathbb{Z}$-chaîne dans $\mathfrak{A}$, leurs images par h n'appartiennent pas non plus à la même $\mathbb{Z}$-chaîne dans $\mathfrak{B}$, et sont donc distinctes.

- Même raisonnement élémentaire pour le cas où a_0 et a_1 appartiennent l'un à la partie standard, l'autre à une $\mathbb{Z}$-chaîne dans $\mathfrak{A}$.

- a_0 et a_1 appartiennent à la même $\mathbb{Z}$-chaîne dans $\mathfrak{A}$. En ce cas, il existe $a \in A_c$ tel que, par ex., $a_0 = s_1^n(a)$ et $a_1 = s_1^m(a)$, avec $n \neq m$. On a alors : $h(a_0) = h(s_1^n(a)) = s_2^n(f(a))$ et $h(a_1) = h(s_1^m(a)) = s_2^m(f(a))$ et puisque $n \neq m$, et qu'il n'y a pas de "boucle", $s_2^n(f(a)) \neq s_2^m(f(a))$, i.e. $h(a_0) \neq h(a_1)$.

- Même raisonnement élémentaire pour le cas où a_0 et a_1 appartiennent à la partie standard.

Comme a_0 et a_1 étaient quelconques, on peut généraliser, et on a donc : pour tout $x, y \in A$, si $x \neq y$ alors $h(x) \neq h(y)$; h est donc bien injectif.

– h est surjectif. Soit un élément quelconque $b_0 \in B$. b_0 appartient à une $\mathbb{Z}$-chaîne dans $\mathfrak{B}$ ou à la partie standard de $\mathfrak{B}$. Dans le premier cas, il existe $b \in B_c$ tel que (par ex.) $b_0 = s_2^n(b)$ et $a \in A_c$ tel que $f(a) = b$ (f, bijection) ; d'où $b_0 = s_2^n(f(a)) \overset{\text{par df. de } h}{=} h(s_1^n(a))$. Il existe donc un élément dans A, à savoir $s_1^n(a)$, dont b_0 est l'image.

- On raisonne exactement de la même manière pour le cas où b_0 appartient à la partie standard de $\mathfrak{B}$.

Comme b_0 était quelconque, on peut généraliser, et on a donc : pour tout $x \in B$, il existe $y \in A$ tel que $x = h(y)$. h est donc surjectif, et comme h est également

23. Les autres cas seraient du genre : $a_0 = s_1^{-1^n}(a)$ et $a_1 = s_1^m(a')$. La lourdeur de l'écriture devient alors dissuasive ; c'est pourquoi dans ce qui suit nous ne considérerons que les cas "simples" à écrire.

injectif, on en conclut que h est bijectif.

– h est un homomorphisme fort, i.e. pour tout $x \in A$, $h(s_1(x)) = s_2(h(x))$.
Soit un élément quelconque $a_0 \in A$; deux cas sont possibles : soit a_0 appartient à la partie standard de $\mathfrak{A}$, soit a_0 appartient à une $\mathbb{Z}$-chaîne de $\mathfrak{A}$.

- a_0 appartient à la partie standard de $\mathfrak{A}$ et est donc de la forme $s_1^n(0_1)$.
Alors $s_1(a_0) = s_1(s_1^n(0_1)) = s_1^{n+1}(0_1)$ et donc :
$h(s_1(a_0)) = h(s_1^{n+1}(0_1)) \overset{\text{par df. de } h}{=} s_2^{n+1}(0_2) = s_2(s_2^n(0_2))$.
Or $s_2^n(0_2) \overset{\text{par df. de } h}{=} h(s_1^n(0_1))$ et donc $s_2(s_2^n(0_2)) = s_2(h(s_1^n(0_1))) \overset{\text{par df. de } a_0}{=} s_2(h(a_0))$.
Donc : $h(s_1(a_0)) = s_2(h(a_0))$.

- a_0 appartient à une $\mathbb{Z}$-chaîne de $\mathfrak{A}$. Alors il existe $a \in A_c$ tel que (par ex.) $a_0 : s_1^n(a)$.
Alors $s_1(a_0) = s_1(s_1^n(a) = s_1^{n+1}(a)$ et donc :
$h(s_1(a_0)) = h(s_1^{n+1}(a)) \overset{\text{par df. de } h}{=} s_2^{n+1}(f(a)) = s_2(s_2^n(f(a)))$
Or $s_2^n(f(a)) \overset{\text{par df. de } h}{=} h(s_1^n(a))$ et donc $s_2(s_2^n(f(a))) = s_2(h(s_1^n(a))) \overset{\text{par df. de } a_0}{=} s_2(h(a_0))$.
Donc, là encore : $h(s_1(a_0)) = s_2(h(a_0))$ [24].

Comme a_0 et a_1 étaient quelconques, on peut généraliser, et on a donc : pour tout $x \in A$, $h(s_1(x)) = s_2(h(x))$; $h : A \to B$ est donc un homomorphisme fort entre $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$.

En reprenant tous les résultats précédents, on a donc : $h : A \to B$ est un isomorphisme entre $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$.

Et comme les deux modèles $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ de $\mathbf{A}_s$ ayant même nombre de $\mathbb{Z}$-chaînes, étaient quelconques, on a donc :

quels que soient $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}'$, modèles de $\mathbf{A}_s$, si $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}'$ ont le même nombre de $\mathbb{Z}$-chaînes, $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}'$ sont isomomorphes.

On a vu précédemment que le cardinal d'un modèle de $\mathbf{A}_s$ comportant k $\mathbb{Z}$-chaînes, avec $k > \aleph_0$ (k, non-dénombrable, donc) est égal à k. Il suit donc du résultat

24. On aura évidemment remarqué que cette deuxième partie de la démonstration reprend exactement la première en changeant 0_1 par a et 0_2 par $f(a)$.

précédent que quels que soient $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}'$, modèles non-dénombrables de $\mathbf{A}_s$, si $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}'$ ont même cardinal, $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}'$ sont isomorphes.

On peut maintenant appliquer le test de Vaught, à savoir :
si $\mathcal{T}h$ une théorie de cardinalité κ n'a pas de modèle fini et si $\mathcal{T}h$ est λ-catégorique, pour un λ infini $\geq \kappa$, alors $\mathcal{T}h$ est complète.

Ici, $Cn(\mathbf{A}_s)$ n'a pas de modèle fini et est de cardinalité $\aleph_0$ (en vertu des axiomes 4.) et on vient de démontrer que pour tout cardinal $k \geq \aleph_0$, $Cn(\mathbf{A}_s)$ est k-catégorique (plus fort que Vaught !). $Cn(\mathbf{A}_s)$ est donc complète.

En vertu du petit raisonnement fait en introduction à la démonstration de complétude, on en conclut donc que $\mathcal{T}h(\mathfrak{N}_s) \subseteq Cn(\mathbf{A}_s)$ et comme on avait montré que $Cn(\mathbf{A}_s) \subseteq \mathcal{T}h(\mathfrak{N}_s)$, on a donc :

$$\boxed{Cn(\mathbf{A}_s) = \mathcal{T}h(\mathfrak{N}_s)}$$

$\mathbf{A}_s$ est donc un ensemble d'axiomes pour $\mathcal{T}h(\mathfrak{N}_s)$.

Table des matières

1 Préliminaires logiques 1
1.1 Définition du langage $\mathcal{L}$ 1
1.1.1 Les symboles de $\mathcal{L}$ 1
1.1.2 Formules de $\mathcal{L}$ 1
1.2 Interprétation de $\mathcal{L}$, validité, conséquence sémantique 3
1.3 Axiomes logiques, règles d'inférence et preuve. 4
1.3.1 Axiomes. 4
1.3.2 Règles d'inférence. 4
1.3.3 Preuve, déduction, consistance. 5
1.4 Quelques résultats importants. 5
2 Quelques notions de théorie des modèles 6
2.1 Définitions de quelques relations entre structures. 7
2.1.1 Sous-structure / extension. 7
2.1.2 Homomorphisme entre structures, isomorphisme. 7
2.1.3 Equivalence élémentaire. 14
2.1.4 Sous-structure / extension, plongement, élémentaire. 15
2.1.5 Extension élémentaire et équivalence élémentaire. 19
2.2 Propriété du 1er ordre. 21
2.3 Complétude, modèle de Henkin. 25
2.4 Les théorèmes de Lowenheim-Skolem. 25
2.5 Théories et propriétés des théories. 26
3 Arithmétique 29
3.1 Axiomes de (Dedekind) Peano. 29
3.2 Modèles non-standards de l'arithmétique de Peano. 30
3.3 Une "micro" arithmétique complète. 33