Contrôle continu de logique L1 n°1 - Semestre 2

Lundi 7 Mars 2015

Tous les documents sont autorisés.

Feuille imprimée *recto&verso*.

Toutes les réponses doivent être *justifiées* et *détaillées*.

1 Méthode des arbres

1.1 Vérités logiques ? (7 pts)

Déterminer si chacune des formules suivantes est une vérité logique. Si une formule n'est *pas* une vérité logique, donner alors un *modèle* (spécification d'un domaine et interprétation des lettres de prédicat) dans laquelle cette formule est *fausse* (et le prouver en passant par le langage *Prop*).

1. $\forall x[(Fx \wedge Hx) \rightarrow (Fx \vee Hx)]$

$$
\begin{array}{c}
\checkmark \neg\forall x[(Fx \wedge Hx) \rightarrow (Fx \vee Hx)] \\
| \\
\checkmark \exists x \neg[(Fx \wedge Hx) \rightarrow (Fx \vee Hx)] \\
| \\
\checkmark \neg[(Fa \wedge Ha) \rightarrow (Fa \vee Ha)] \\
| \\
\checkmark (Fa \wedge Ha) \\
| \\
\checkmark \neg(Fa \vee Ha) \\
| \\
Fa \\
| \\
Ha \\
| \\
\neg Fa \\
\otimes
\end{array}
$$

La formule 1. est une vérité logique. Elle n'admet aucun contre-exemple.

2. $[\forall x(Px \to \neg Mx) \wedge \forall x(Sx \to Mx)] \to \forall x(Sx \to \neg Px)$

$$\checkmark \neg\{\forall x(Px \to \neg Mx) \wedge \forall x(Sx \to Mx)] \to \forall x(Sx \to \neg Px)\}$$
$$(a)\ \forall x(Px \to \neg Mx)$$
$$(a)\ \forall x(Sx \to Mx)$$
$$\checkmark \neg\forall x(Sx \to \neg Px)$$
$$\checkmark \exists x\neg(Sx \to \neg Px)$$
$$\checkmark \neg(Sa \to \neg Pa)$$
$$Sa$$
$$\checkmark \neg\neg Pa$$
$$Pa$$
$$\checkmark Pa \to \neg Ma$$
$$\checkmark Sa \to Ma$$
$$\begin{array}{ccc} \neg Sa & & Ma \\ \otimes & \begin{array}{c} \neg Pa \\ \otimes \end{array} & \begin{array}{c} \neg Ma \\ \otimes \end{array} \end{array}$$

La formule 2. est une vérité logique. Elle n'admet aucun contre-exemple.

3. $\exists x(Hx \wedge Sx) \to \forall x(Hx \to Sx)$

$$
\begin{array}{c}
\checkmark \neg[\exists x(Hx \wedge Sx) \rightarrow \forall x(Hx \rightarrow Sx)] \\
| \\
\checkmark \exists x(Hx \wedge Sx) \\
| \\
\checkmark \neg\forall x(Hx \rightarrow Sx) \\
| \\
\checkmark \exists x \neg(Hx \rightarrow Sx) \\
| \\
\checkmark Ha \wedge Sa \\
| \\
Ha \\
| \\
Sa \\
| \\
\checkmark \neg(Hb \rightarrow Sb) \\
| \\
Hb \\
| \\
\neg Sb
\end{array}
$$

Cette formule n'est *pas* une vérité logique. Il y a un modèle dans lequel elle est fausse – il est donc faux qu'elle soit *toujours vraie*. Dans un domaine

$\mathcal{D} : \{a, b\}$

et avec l'interprétation suivante des lettres de prédicat :

$H : \{a, b\}$

$S : \{a\}$

la formule 3. est fausse. On le vérifiera en donnant une ligne de la table de vérité de cette formule dans laquelle le connecteur principal est faux :

$$[(Ha \wedge Sa) \vee (Hb \wedge Sb)] \rightarrow [(Ha \rightarrow Sa) \wedge (Hb \rightarrow Sb)]$$

L'antécédent est vrai (le premier disjoint étant vrai), le conséquent faux (le deuxième conjoint étant faux).

4. $\forall x[(Fx \wedge Bx) \rightarrow Hx] \rightarrow \forall x[Fx \rightarrow (Bx \rightarrow Hx)]$

$$
\begin{array}{c}
\checkmark \neg\{\forall x[(Fx \wedge Bx) \rightarrow Hx] \rightarrow \forall x[Fx \rightarrow (Bx \rightarrow Hx)]\} \\
| \\
(a)\ \forall x[(Fx \wedge Bx) \rightarrow Hx] \\
| \\
\checkmark \neg\forall x[Fx \rightarrow (Bx \rightarrow Hx)] \\
| \\
\checkmark \exists x \neg[Fx \rightarrow (Bx \rightarrow Hx)] \\
| \\
\checkmark \neg[Fa \rightarrow (Ba \rightarrow Ha)] \\
| \\
Fa \\
| \\
\checkmark \neg(Ba \rightarrow Ha) \\
| \\
Ba \\
| \\
\neg Ha \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c}
\checkmark (Fa \wedge Ba) \rightarrow Ha \\
| \\
\checkmark \neg(Fa \wedge Ba) \\
\begin{array}{cc}
\neg Fa & \neg Ba \\
\otimes & \otimes
\end{array}
\end{array}
&
\begin{array}{c}
Ha \\
\otimes \\
\\
\\
\\
\end{array}
\end{array}
\end{array}
$$

La formule 4. est une vérité logique. Elle n'admet aucun contre-exemple.

1.2 Contradictions logiques ? (4 pts)

Déterminer si chacune des formules suivantes est une contradiction logique. Si une formule n'est *pas* une contradiction logique, donner alors un *modèle* (spécification d'un domaine et interprétation des lettres de prédicat) dans laquelle cette formule est *vraie* (et le prouver en passant par le langage *Prop*).

1. $\exists x(Fx \wedge Gx) \wedge \forall y Hy \wedge \forall z(Hz \rightarrow \neg Gz)$

$$\checkmark \exists x(Fx \wedge Gx) \wedge \forall y Hy \wedge \forall z(Hz \rightarrow \neg Gz)$$
$$|$$
$$\checkmark \exists x(Fx \wedge Gx)$$
$$|$$
$$(a) \quad \forall y Hy$$
$$|$$
$$(a) \quad \forall z(Hz \rightarrow \neg Gz)$$
$$|$$
$$\checkmark (Fa \wedge Ga)$$
$$|$$
$$Fa$$
$$|$$
$$Ga$$
$$|$$
$$Ha$$
$$|$$
$$\checkmark Ha \rightarrow \neg Ga$$
$$\begin{array}{cc} / & \backslash \\ \neg Ha & \neg Ga \\ \otimes & \otimes \end{array}$$

Toutes les branches de l'arbre ferment, la formule est une contradiction logique.

2. $\neg[(\exists x Fx \wedge \exists y Gy) \rightarrow \forall z Fz]$

$$\checkmark \neg[(\exists x Fx \wedge \exists y Gy) \rightarrow \forall z Fz]$$
$$|$$
$$\checkmark [\exists x Fx \wedge \exists y Gy]$$
$$|$$
$$\checkmark \neg \forall x Fx$$
$$|$$
$$\checkmark \exists z \neg Fz$$
$$|$$
$$\checkmark \exists x Fx$$
$$|$$
$$\checkmark \exists y Gy$$
$$|$$
$$\neg Fa$$
$$|$$
$$Fb$$
$$|$$
$$Gc$$

Cette formule n'est *pas* une contradiction logique. Il y a un modèle dans lequel elle est vraie – il est donc faux qu'elle soit *toujours fausse*. Dans un domaine : $\mathcal{D} : \{a, b, c\}$

et avec l'interprétation des lettres de prédicat suivante

$F : \{b\}$

$G : \{c\}$

la formule est vraie. Nous pouvons donner la formule équivalente (dans ce modèle) suivante pour le vérifier :

$$\neg\{[(Fa \vee Fb \vee Fc) \wedge (Ga \vee Gb \vee Gc)] \to (Fa \wedge Fb \wedge Fc)\}$$

L'implication entre accolade est fausse, sa négation est vraie : la formule peut donc être vraie.

1.3 Ensembles consistants ? (3 pts)

Déterminer si chacun des ensembles suivants de formules est consistant. Si un ensemble est consistant, donner alors un modèle dans lequel chaque formule de cet ensemble est *vraie*.

1. $\{\forall x Fx, \exists x Gx, \neg\forall x(Tx \to Gx)\}$

$$\begin{array}{c}
(a,b)\ \ \forall x Fx \\
| \\
\checkmark \exists x Gx \\
| \\
\checkmark \neg\forall x(Tx \to Gx) \\
| \\
\checkmark \exists x \neg(Tx \to Gx) \\
| \\
Ga \\
| \\
\checkmark \neg(Tb \to Gb) \\
| \\
Tb \\
| \\
\neg Gb \\
| \\
Fa \\
| \\
Fb
\end{array}$$

Cet ensemble de formule est consistant – ces formules sont notamment simultanément vraies dans le modèle suivant :

$\mathcal{D} : \{a, b\}$

$F : \{a, b\}$
$G : \{a\}$
$T : \{b\}$
On peut le prouver à l'aide de cette formule (qui lui est équivalente dans ce modèle) :

$$(Fa \wedge Fb) \wedge (Ga \vee Gb) \wedge [\neg(Ta \rightarrow Ga) \vee \neg(Tb \rightarrow Gb)]$$

Chaque conjoint est vrai, la formule est donc vraie.

2. $\{\forall x(Mx \rightarrow Px), \exists x(Sx \wedge Mx), \neg\exists x(Sx \wedge Px)\}$
Pour trouver si l'ensemble est consistant (ou non) nous dressons l'arbre suivant :

$$\begin{array}{c}
(a) \quad \forall x(Mx \rightarrow Px) \\
| \\
\checkmark \exists x(Sx \wedge Mx) \\
| \\
\checkmark \neg\exists x(Sx \wedge Px) \\
| \\
\checkmark Sa \wedge Ma \\
| \\
Sa \\
| \\
Ma \\
| \\
(a) \quad \forall x \neg(Sx \wedge Px) \\
| \\
\neg(Sa \wedge Pa) \\
\swarrow \qquad \searrow \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c} \neg Sa \\ \otimes \end{array} &
\begin{array}{c} \neg Pa \\ | \\ (Ma \rightarrow Pa) \\ \swarrow \quad \searrow \\ \begin{array}{cc} \neg Ma & Pa \\ \otimes & \otimes \end{array} \end{array}
\end{array}
\end{array}$$

Cet ensemble de formules est inconsistant : il est impossible que les formules qui en sont les éléments soient simultanément vraies.

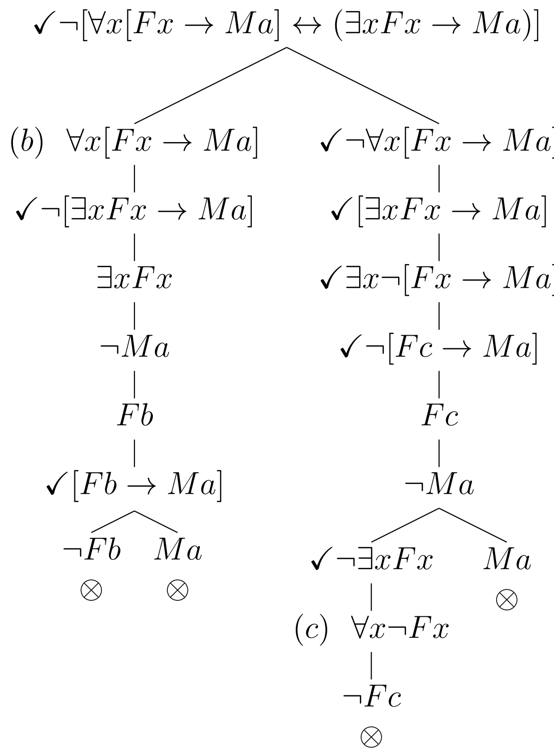
1.4 Équivalence logique ? (3 pts)

Déterminer si la formule $\forall x[Fx \rightarrow Ma]$ est logiquement équivalente à la formule $(\exists xFx \rightarrow Ma)$.

Il s'agit donc d'évaluer la formule suivante :

$$\forall x[Fx \to Ma] \leftrightarrow (\exists x Fx \to Ma)$$

L'arbre prendra alors l'allure suivante :



Toutes les branches de l'arbre ferment : la formule $\forall x[Fx \to Ma]$ est bien logiquement équivalente à la formule $(\exists x Fx \to Ma)$.

2 Traduction (3 pts)

Transcrire les phrases suivantes dans le langage *Préd* :

1. Si Marie est philosophe, alors il y a au moins un sage qui l'aime.

$$Fa \to \exists x(Sx \wedge Lxa)$$

2. Tout le monde est méchant, donc Socrate est méchant.

$$\forall x Mx \to Ma$$

3. Tous les amis de Maxime sont soit fous, soit amis avec tout le monde.

$$\forall x[Axa \to (Fx \lor \forall y Axy)]$$