Logique modale. Notes

Bruno Gnassounou

2016-17

Première partie

Logique modale propositionnelle

Chapitre 1

Logique des propositions : rappels

1.1 Le point de vue sémantique

Une *interprétation* du langage propositionnel est une fonction v, appelée « valuation », qui « assigne » à chaque *lettre de proposition* soit la valeur 1 (le vrai), soit la valeur 0 (le faux). On écrit par exemple : $v(p) = 0$, $v(q) = 1$, $v(r) = 0$, etc. Si, par exemple, $v(p) = 1$, on a affaire à une « assignation » de la valeur *Vrai* à la proposition p selon la valuation v.

Etant donnée une interprétation (ou valuation) v, on attribue (ou « assigne ») des valeurs de vérité à *une formule quelconque* du langage, en appliquant les règles d'évaluation suivantes :

. $v(\neg\phi) = 1$ si $v(\phi) = 0$, et 0 sinon.

. $v(\phi \wedge \psi) = 1$ si $v(\phi) = 1$ et $v(\psi) = 1$, et 0 sinon.

. $v(\phi \vee \psi) = 1$ si $v(\phi) = 1$ ou $v(\psi) = 1$, et 0 sinon.

. $v(\phi \Rightarrow \psi) = 1$ si $v(\phi) = 0$ ou $v(\psi) = 1$, et 0 sinon.

. $v(\phi \Leftrightarrow \psi) = 1$ si $v(\phi) = v(\psi)$, et 0 sinon.

On peut exprimer les règles d'interprétation que nous venons de donner sous forme tabulaire (tableau des connecteurs (fonctions de vérité[1])) :

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
p	q	$\top$	$\vee$	$\Leftarrow$	p	$\Rightarrow$	q	$\Leftrightarrow$	$\wedge$	$\uparrow$	w	$\sim q$		$\sim p$		$\downarrow$	$\perp$
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	F	F	F	F	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V	F	F	F	F	V	V	V	V	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	V	V	F	F	V	V	F	F	V	V	F	F
F	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F

1.2 Rappel de quelques définitions

. Une formule φ est *satisfiable* ssi elle prend la valeur 1 pour au moins une interprétation v ; on dit que v satisfait φ.

. Une formule est *tautologique* ou *valide* ssi elle prend la valeur 1 pour toute interprétation.

. Une formule est *contradictoire* ssi elle prend la valeur 0 pour toute interprétation.

. Une formule qui n'est ni tautologique ni contradictoire est dite *neutre*.

. Soit Σ un ensemble de formules. Une interprétation v est un *modèle* de Σ ssi v satisfait simultanément toutes les formules de Σ.

Les définitions antérieures permettent de définir la conséquence *sémantique* :

Soit Σ un ensemble de formules (les prémisses) ; ϕ (la conclusion) est une conséquence sémantique de Σ ssi tout modèle de Σ satisfait ϕ. En d'autres termes, ϕ est une conséquence sémantique de Σ ss'il n'existe aucune interprétation qui rende vrais tous les éléments de Σ et fausse ϕ. On écrit :

$$\Sigma \models \phi,$$

pour dire que ϕ est une conséquence sémantique de Σ. On écrit :

$$\Sigma \not\models \phi$$

pour dire que ϕ *n'est pas* une conséquence sémantique de Σ.

1. Pour des raisons de commodité et d'habitude, on a, dans ce tableau, représenté les valeurs *Vrai* et *Faux*, non pas par 1 et 0, mais par V et F.

On obtient ainsi une autre définition de la tautologie. Une formule ϕ est une *tautologie* ou une *vérité logique*, ou une *loi logique* ssi elle est une conséquence sémantique de l'ensemble vide des prémisses ($\emptyset \vDash \phi$). En d'autres termes, toutes les interprétations rendent ϕ vraie (conformément à la première définition).

1.3 Principales lois logiques

- A. Propriétés des connecteurs.

Un premier ensemble de lois logiques découle directement des propriétés des connecteurs $\neg$, $\wedge$ et $\vee$ telles qu'elles se lisent sur leur table.

— idempotence :

$$\begin{array}{ccc} (\varphi \wedge \varphi) & \Leftrightarrow & \varphi \\ (\varphi \vee \varphi) & \Leftrightarrow & \varphi \end{array}$$

— commutativité :

$$\begin{array}{ccc} (\varphi \wedge \psi) & \Leftrightarrow & (\psi \wedge \varphi) \\ (\varphi \vee \psi) & \Leftrightarrow & (\psi \vee \varphi) \end{array}$$

— associativité :

$$\begin{array}{ccc} [\varphi \wedge (\psi \wedge \theta)] & \Leftrightarrow & [(\varphi \wedge \psi) \wedge \theta] \\ [\varphi \vee (\psi \vee \theta)] & \Leftrightarrow & [(\varphi \vee \psi) \vee \theta] \end{array}$$

— distributivité $^{\wedge}/_{\vee}$:

$$[\varphi \wedge (\psi \vee \theta)] \quad \Leftrightarrow \quad [(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \theta]$$

— distributivité $^{\vee}/_{\wedge}$:

$$[\varphi \vee (\psi \wedge \theta)] \quad \Leftrightarrow \quad [(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta]$$

— double négation :

$$\neg(\neg\varphi) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi$$

Il résulte de l'idempotence de $\wedge$ et de $\vee$ que l'on peut simplifier une formule comme par ex. : $p \wedge p$ (ou $p \vee p$) en p.

Il résulte de la commutativité de $\wedge$ et de $\vee$ que l'ordre des conjoints ou des disjoints dans une conjonction ou une disjonction est indifférent (attention ! ce n'est pas le cas pour l'implication).

Il résulte de leur associativité que l'on peut négliger les parenthèses intérieures ;

par ex. , au lieu d'écrire : $[p \wedge (q \wedge r)]$, ou $[(p \vee q) \vee r]$, on écrira simplement : $(p \wedge q \wedge r)$ ou $(p \vee q \vee r)$, respectivement [2].

B. Equivalence entre connecteurs.

$\Rightarrow$:

$$\begin{array}{rcl} (\varphi \Rightarrow \psi) & \Leftrightarrow & \neg(\varphi \wedge \neg\psi) \\ \neg(\varphi \Rightarrow \psi) & \Leftrightarrow & (\varphi \wedge \neg\psi) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} (\varphi \Rightarrow \psi) & \Leftrightarrow & (\neg\varphi \vee \psi) \\ \neg(\varphi \Rightarrow \psi) & \Leftrightarrow & \neg(\neg\varphi \vee \psi) \end{array}$$

$\wedge$:

$$\begin{array}{rcl} (\varphi \wedge \psi) & \Leftrightarrow & \neg(\varphi \Rightarrow \neg\psi) \\ \neg(\varphi \wedge \psi) & \Leftrightarrow & (\varphi \Rightarrow \neg\psi) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} (\varphi \wedge \psi) & \overset{dM}{\Leftrightarrow} & \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \\ \neg(\varphi \wedge \psi) & \overset{dM}{\Leftrightarrow} & (\neg\varphi \vee \neg\psi) \end{array}$$

$\vee$:

$$\begin{array}{rcl} (\varphi \vee \psi) & \Leftrightarrow & \neg\varphi \Rightarrow \psi \\ \neg(\varphi \vee \psi) & \Leftrightarrow & \neg(\neg\varphi \Rightarrow \psi) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} (\varphi \vee \psi) & \overset{dM}{\Leftrightarrow} & \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \\ \neg(\varphi \vee \psi) & \overset{dM}{\Leftrightarrow} & (\neg\varphi \wedge \neg\psi) \end{array}$$

Les deux paires de lois dont le signe de bi-implication est surmonté de « dM » ($\overset{dM}{\Leftrightarrow}$) sont dites : « lois de de Morgan » (du nom d'un mathématicien et logicien anglais du XIXè siècle). Elles permettent d' « entrer » les négations en tête des sous-formules, en changeant les connecteurs ; elles sont d'un usage constant.

Plus généralement, toutes ces lois permettent d'éliminer des connecteurs au profit d'autres : chacun des trois connecteurs peut être éliminé au profit d'un des deux autres et de la négation. On pourrait donc n'introduire dans notre langage que la conjonction et la négation par exemple, sans aucune perte de pouvoir expressif.

2. C'est ce que nous avons fait pour ci-dessus, lorsque nous avions écrit : $(\varphi_1 \wedge \ldots, \wedge\varphi_n) \Rightarrow \psi$.

C. Autres lois logiques.

(1)	$\varphi \Rightarrow \varphi$ / (1') $\varphi \vee \neg\varphi$ / (1") $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$	Identité, Tiers Exclu, Non-contradiction
(2)	$(\neg\varphi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi$ / (2') $(\varphi \Rightarrow \neg\varphi) \Rightarrow \neg\varphi$	*Consequentia mirabilis*
(3)	$\varphi \Rightarrow (\varphi \vee \psi)$ / (3') $\psi \Rightarrow (\varphi \vee \psi)$	
(4)	$(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \varphi$ / (4') $(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \psi$	
(5)	$\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$ / (5') $\neg\varphi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi)$	Simplification (*ex falso...*)
(6)	$(\varphi \wedge \neg\varphi) \Rightarrow \psi$	Duns Scot
(7)	$[(\psi \Rightarrow \varphi) \wedge (\neg\psi \Rightarrow \varphi)] \Rightarrow \varphi$	
(8)	$[(\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\varphi \Rightarrow \neg\psi) \Rightarrow \neg\varphi$	
(9)	$(\varphi \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow (\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi)$	Contraposition
(10)	$\varphi \Rightarrow [\psi \Rightarrow (\varphi \wedge \psi)]$	Adjonction
(11)	$[\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \theta)] \Leftrightarrow [\psi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \theta)$	Permutation
(12)	$[(\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \theta)] \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \theta)$	Syllogisme (transitivité de l'implication)
(13)	$[\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \theta)] \Leftrightarrow [(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \theta]$	Importation / exportation
(14)	$[(\varphi \Rightarrow (\psi \wedge \theta)] \Leftrightarrow [(\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\varphi \Rightarrow \theta)]$	
(15)	$(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \{(\varphi \Rightarrow \theta) \Rightarrow [\varphi \Rightarrow (\psi \wedge \theta)]\}$	Composition
(16)	$[(\varphi \wedge \psi) \vee \psi] \Leftrightarrow \psi$ / (16') $[\varphi \wedge (\varphi \vee \psi)] \Leftrightarrow \varphi$	Lois d'absorption
(17)	$[(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \theta)] \Rightarrow [(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \theta)]$	Loi de Frege
(18)	$(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \{(\theta \Rightarrow \sigma) \Rightarrow [(\varphi \wedge \theta) \Rightarrow (\psi \wedge \sigma)]\}$	
(20)	$[(\varphi \Rightarrow \psi) \wedge \varphi] \Rightarrow \psi$	*Modus Ponens*
(21)	$[(\varphi \Rightarrow \psi) \wedge \neg\psi] \Rightarrow \neg\varphi$	*Modus Tollens*
(22)	$[(\varphi \vee \psi) \wedge \neg\psi] \Rightarrow \varphi$	Principe du chien (Chrysippe)

1.4 Le point de vue syntaxique

Règles pour les connecteurs propositionnels :

règle $\wedge$

$$\begin{array}{c} \varphi \wedge \psi \\ \hline \varphi \\ \psi \end{array}$$

règle $\vee$

$$\begin{array}{ccc} & \varphi \vee \psi & \\ \hline & \swarrow \quad \searrow & \\ \varphi & & \psi \end{array}$$

règle $\Rightarrow$

$$\begin{array}{ccc} & \varphi \Rightarrow \psi & \\ \hline & \swarrow \quad \searrow & \\ \neg\varphi & & \psi \end{array}$$

règle $\neg \wedge$

$$\begin{array}{ccc} & \neg(\varphi \wedge \psi) & \\ \hline & \swarrow \quad \searrow & \\ \neg\varphi & & \neg\psi \end{array}$$

règle $\neg \vee$

$$\begin{array}{c} \neg(\varphi \vee \psi) \\ \hline \neg\varphi \\ \neg\psi \end{array}$$

règle $\neg \Rightarrow$

$$\begin{array}{c} \neg(\varphi \Rightarrow \psi) \\ \hline \varphi \\ \neg\psi \end{array}$$

règle $\neg \neg\varphi$

$$\begin{array}{c} \neg \neg\varphi \\ \hline \varphi \end{array}$$

Chapitre 2

Logique modale propositionnelle

2.1 Sémantique

2.2 Langage L pour la logique modale propositionnelle

2.2.1 Symboles de L

1. Un ensemble P infini dénombrable de lettres de propositions : $p_1, \dots p_n \dots$ (on utilisera en pratique les lettres p, q, r, etc.)
2. Les connecteurs propositionnels habituels : $\neg, \wedge (\vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$, introduits par df.).
3. Les opérateurs modaux : $\Box, \Diamond$ ($\Box$: nécessaire, $\Diamond$: possible).
4. Symboles impropres : (,), [,], {, }, etc.

2.2.2 Formules de L

1. Une lettre de proposition est une formule bien formée.
2. si φ est une formule bien formée, $\neg\varphi, \Box\varphi, \Diamond\varphi$ sont des formules bien formées.
3. si φ et ψ sont des formules bien formées, $\varphi \wedge \psi$ est une formule bien formée.
4. Seules sont bien formées les formules engendrées par application des clauses 1.- 3.

2.3 Interprétation, validité, conséquence sémantique

2.3.1 Interprétation

Une interprétation pour le langage modal propositionnel est un triplet $\mathcal{I} = \langle W, R, v\rangle$, où :

. W est un ensemble non vide d'éléments appelés « mondes possibles », en nombre fini ou infini, notés w_0, w_1, w_2 ... w_i ... ;

. R est une relation binaire entre ces éléments, appelée « relation d'accessibilité » ; on note w_iRw_j la relation d'accessibilité entre le monde w_i et le monde w_j. On dit que w_j est accessible à w_i ;

. v une fonction, qu'on appelle « valuation », qui attribue, pour chaque monde possible, une valeur de vérité à chaque lettre de proposition p, q, r.... On note $v_w(p) = 1$, l'attribution de la valeur de vérité 1 (le vrai) à la lettre de proposition p dans le monde w et bien sûr, $v_w(p) = 0$ l'attribution de la valeur de vérité 0 (le faux) à la lettre de proposition p dans le monde w.[1]

Un exemple d'interprétation est le suivant :

(1) un ensemble de quatre mondes $W = \{w_0, w_1, w_2, w_3\}$.
(2) une relation R entre ces mondes : w_0Rw_1, w_0Rw_2, w_1Rw_2, w_1Rw_3, w_2Rw_1, w_2Rw_3, w_3Rw_3. Comme le nombre de mondes, dans cet exemple, est fini, on peut représenter sous forme de diagramme cette relation d'accessibilité, où les flèches représentent la relation R :

$$\begin{tikzcd}
w_0 \arrow[dr, bend left] \arrow[ddr] & & \\
& w_1 \arrow[d, bend left] \arrow[dr] & \\
& w_2 \arrow[u, bend left] \arrow[r] & w_3 \arrow[loop right]
\end{tikzcd}$$

1. On trouve aussi fréquemment dans la littérature les notations : $v(p, w) = 1$ et $v(p, w) = 0$.

(3) une valuation v :

$v_{w_0}(p) = 0$	$v_{w_0}(q) = 0$	$v_{w_0}(r) = 1$
$v_{w_1}(p) = 1$	$v_{w_1}(q) = 0$	...
$v_{w_2}(p) = 1$	$v_{w_2}(q) = 1$	
$v_{w_3}(p) = 0$	$v_{w_3}(q) = 1$	

2.3.2 Validité et conséquence sémantique

Soit une interprétation avec une valuation v. On peut étendre cette valuation à toutes les formules du langage en se conformant aux règles suivantes, les deux dernières étant les plus importantes :

. $v_w(\neg\varphi) = 1$ si $v_w(\varphi) = 0$, et 0 sinon.

. $v_w(\varphi \wedge \psi) = 1$ si $v_w(\varphi) = 1$ et $v_w(\psi) = 1$, et 0 sinon.

. $v_w(\varphi \vee \psi) = 1$ si $v_w(\varphi) = 1$ ou $v_w(\psi) = 1$, et 0 sinon.

. $v_w(\varphi \Rightarrow \psi) = 1$ si $v_w(\varphi) = 0$ ou $v_w(\psi) = 1$, et 0 sinon.

. $v_w(\varphi \Leftrightarrow \psi) = 1$ si $v_w(\varphi) = v_w(\psi)$, et 0 sinon.

. $v_w(\Box\varphi) = 1$ si, *pour tout monde* w' accessible au monde w, $v_{w'}(\varphi) = 1$, et 0 sinon.

. $v_w(\Diamond\varphi) = 1$ s'*il existe au moins un monde* w', accessible au monde w, tel que $v_{w'}(\varphi) = 1$, et 0 sinon.

On note d'emblée que la valeur de vérité de $\neg\Diamond\varphi$ est la même, dans tout monde possible, que celle de $\Box\neg\varphi$. En effet, on a :

$v_w(\neg\Diamond\varphi) = 1$
ssi $v_w(\Diamond\varphi) = 0$
ssi, dans tout monde possible w' tel que wRw', $v_{w'}(\varphi) = 0$
ssi, dans tout monde possible w' tel que wRw', $v_{w'}(\neg\varphi) = 1$
ssi $v_w(\Box\neg\varphi) = 1$

On prouve pareillement que les formules $\neg\Box\varphi$ et $\Diamond\neg\varphi$ sont équivalentes dans tous les mondes possibles :

$v_w(\neg\Box\varphi) = 1$
ssi $v_w(\Box\varphi) = 0$
ss'il existe un monde w' tel que wRw' et où $v_{w'}(\varphi) = 0$
ss'il existe un monde possible w' tel que wRw' et où $v_{w'}(\neg\varphi) = 1$
ssi $v_w(\Diamond\neg\varphi) = 1$.

On dit qu'une interprétation $\langle W, R, v\rangle$ *satisfait* un formule (ou qu'elle est un *modèle* de cette formule) ss'il existe un monde $w \in W$ de cette interprétation où la formule est vraie, c'est-à-dire où on a $v_w(\varphi) = 1$. Pareillement, si on a un ensemble de formules Σ, on dit qu'un interprétation $\langle W, R, v\rangle$ satisfait Σ (ou est un modèle de Σ) ss'il existe un monde $w \in W$ de cette interprétation où chacune des formules de Σ est vraie, c'est-à-dire où on a $v_w(\Delta) = 1$, pour toute formule $\Delta \in \Sigma$. Un formule ou un ensemble de formules qui a un modèle est dit *satisfiable*.

Soit φ une formule et Σ un ensemble de formules. On définit ainsi la validité (vérité logique, tautologie) et la conséquence sémantiques :

. $\vDash \varphi$ (c'est-à-dire φ est une formule valide) ssi, dans toutes les interprétations $\langle W, R, v\rangle$, on a $v_w(\varphi) = 1$ pour tout $w \in W$.

. $\Sigma \vDash \varphi$ (c'est-à-dire φ est une conséquence sémantique de l'ensemble Σ de formules) ssi, dans toutes les interprétations $\langle W, R, v\rangle$, pour tout $w \in W$ et pour toute formule $\Delta \in \Sigma$, $v_w(\varphi) = 1$, à chaque fois que $v_w(\Delta) = 1$. En d'autres termes, on ne peut trouver aucun monde possible où une interprétation rend vraies les formules de Σ et fausse la formule φ. Ou encore : tout modèle de Σ est aussi un modèle de φ.

Lorsque l'on veut dire qu'une formule φ est vraie dans un monde w_i d'une interprétation donnée $\mathcal{I}$, on s'autorisera l'écriture : $\mathcal{I} \vDash_{w_i} \varphi$. Lorsque l'on veut dire qu'une formule φ est fausse dans un monde w_i d'une interprétation donnée $\mathcal{I}$, on écrira : $\mathcal{I} \nvDash_{w_i} \varphi$. On fera bien attention au fait qu'ici le symbole « $\mathcal{I}$ » ne *représente pas* un ensemble de formules, comme le fait, au contraire, le symbole « Σ » dans l'expression « $\Sigma \vDash \varphi$ ». On retiendra donc que « $\mathcal{I} \vDash_{w_i} \varphi$ » est simplement une abréviation pour la phrase : « φ est vraie dans le monde w_i de l'interprétation $\mathcal{I}$ ».

On remarquera que, disposant de cette notion de vérité dans un monde possible d'une interprétation donnée, on pourrait introduire une autre notion de validité et de conséquence sémantiques, plus faible que celle que nous venons de définir. On dira qu'une formule φ est valide *dans une interprétation* $\mathcal{I}$, avec une ensemble W de mondes, ssi la formule est vraie dans tous les mondes possibles de cette interprétation. Cette définition est donc bien distincte de celle que nous avons introduite plus haut où une formule valide ss'il est vraie dans les mondes possibles d'une interprétation donnée, mais dans chaque monde possible de toute interprétation possible.

La sémantique que nous venons d'exposer est en fait (on le verra) la sémantique d'un système particulier de logique modale, qui sert de base à tous les systèmes de logiques modales dits « normaux », et qu'on appelle le « système K » (en l'honneur de **K**ripke !).

– Exemples de raisonnements sémantiques (voir feuilles distribuées en cours) :

— Montrer : $\vDash [\Box p \wedge \Box(p \Rightarrow q)] \Rightarrow \Box q$

— Montrer : $\Diamond(p \wedge q) \vDash (\Diamond p \wedge \Diamond q)$

— Montrer : $(\Diamond p \wedge \Diamond q) \nvDash \Diamond(p \wedge q)$

On peut aussi prouver, dans ce système K, la vérité excessivement importante de la proposition suivante, dite *règle de nécessitation*[2] :

si $\vDash \varphi$, alors $\vDash \Box\varphi$.

Preuve (par l'absurde). Supposons que l'on ait $\vDash \varphi$. Cela signifie que φ est vraie dans tous les mondes possibles de toutes les interprétations. Maintenant supposons $\nvDash \Box\varphi$. Cela implique qu'il existe un monde quelconque $w_i \in W$ d'une interprétation $\mathcal{I}$, tel que $\mathcal{I} \nvDash_{w_i} \Box\varphi$. Cela signifie qu'il existe un monde $w_j \in W$ tel que $w_i R w_j$ et que : $\mathcal{I} \nvDash_{m_j} \varphi$, ce qui contredit l'hypothèse que pour tout monde $w \in W$ (et donc en particulier pour w_j) on a $\mathcal{I} \vDash_w \varphi$. Donc : $\mathcal{I} \vDash_{w_i} \Box\varphi$. Comme w_i était quelconque, cela vaut pour tous les mondes $w \in W$. Et comme $\mathcal{I}$ est également quelconque cela vaut pour toute interprétation et donc : $\vDash \Box\varphi$.

2. On parle de « règle », alors qu'il s'agit d'une proposition, parce qu'en réalité, il s'agit du décalque sémantique d'une règle qu'on utilise dans les systèmes axiomatiques de logiques modales normales, pour faire des déductions.

Remarque importante : on ne confondra pas la règle de nécessitation avec l'affirmation selon laquelle, pour toute formules φ du calcul modal propositionnel, $\varphi \vDash \Box\varphi$ (ou l'affirmation qui lui est équivalente : $\vDash \varphi \Rightarrow \Box\varphi$). [3] Il est clair que cette dernière affirmation est fausse. On n'a pas par exemple, pour aucune lettre de proposition p, que $p \vDash \Box p$, ce qui signifierait qu'il suffit qu'une telle proposition atomique soit vraie dans un monde pour qu'elle le soit dans tous les mondes accessibles à ce monde. Cela éliminerait toute possibilité d'exprimer la contingence d'une proposition. En général, il est faux de dire que, si sous prenez un monde quelconque d'une interprétation donnée, et que φ est vraie dans ce monde, alors φ est vraie dans tous les mondes accessibles à ce monde. Pour que l'on puisse tirer la conséquence selon laquelle $\Box\varphi$ est valide, il faut que la formule φ soit elle-même *valide*, en d'autres termes qu'elle soit une loi de la logique modale (qui comprend, rappelons-le, les tautologies du calcul propositionnel ordinaire). Ainsi on a : $\vDash \Box[(p \wedge q) \Rightarrow p]$, parce que $(p \wedge q) \Rightarrow p$ est une tautologie, c'est-à-dire : $\vDash (p \wedge q) \Rightarrow p$. De la même façon, on a $\vDash \Box\{\Diamond(p \wedge q) \Rightarrow (\Diamond p \wedge \Diamond q)\}$, parce que l'on a : $\vDash \Diamond(p \wedge q) \Rightarrow (\Diamond p \wedge \Diamond q)$.

2.4 Système de preuve : la méthode des arbres pour le système K

Toutes les règles pour les connecteurs propositionnels sont conservées. On ajoute les quatre règles suivantes :

$$(1)\ \frac{\neg\Box\varphi, i}{\Diamond\neg\varphi, i} \quad \Bigg| \quad (2)\ \frac{\neg\Diamond\varphi, i}{\Box\neg\varphi, i}$$

$$(3)\ \frac{\begin{array}{c}\Box\varphi, i\\ iRj\end{array}}{\varphi, j} \quad \Bigg| \quad (4)\ \begin{array}{c}\Diamond\varphi, i\\ \hline iRj\\ \varphi, j\end{array}$$

3. Cette équivalence est vraie si le théorème de déduction sémantique ($\Gamma, \varphi \vDash \psi$ ssi $\Gamma \vDash \varphi \Rightarrow \psi$) est vrai. Les choses ne sont pas aussi claires en logique modale qu'en calcul des propositions ordinaire. Mais, en gros, ce théorème est vrai.

La règle (3) exige que les deux lignes « $\Box\varphi, i$ » et « iRj » soient apparues auparavant dans la construction de l'arbre pour qu'elle s'applique. En d'autres termes, si on a *seulement* « $\Box\varphi, i$ » ou *seulement* « iRj », la règle ne s'applique pas. On notera néanmoins que les deux lignes n'ont pas besoin de se succéder immédiatement. En outre, la règle s'applique à tout nombre, j, k, etc. apparu dans l'arbre : si on a « $\Box\varphi, i$ » et « iRj », mais aussi « iRk », on *doit* écrire : « φ, j », *et aussi* : « φ, k ».

La règle (4) exige que le nombre j soit nouveau (il désigne un nouveau monde), c'est-à-dire qu'il ne doit être apparu dans aucune des branches de l'arbre auparavant.

Toutes les règles doivent être appliquées lors de la construction de l'arbre. Une branche de l'arbre est close ssi, pour toute formule φ et tout nombre i, on a « φ, i » et « $\neg\varphi, i$ », sinon elle est ouverte. Si toutes les branches de l'arbre sont closes, l'arbre est dit lui-même « clos ». Un arbre qui a au moins une branche ouverte est dit lui-même « ouvert ».

Quand un arbre est clos, on a une preuve de ce qu'une formule φ est une conséquence logique-syntaxique d'un ensemble Σ d'autres formules, et on écrit : $\Sigma \vdash \varphi$.

Quand un arbre est ouvert, on a montré qu'une formule φ n'est pas une conséquence logique-syntaxique d'un ensemble Σ, et on écrit : $\Sigma \nvdash \varphi$.

Si (cas où $\Sigma = \varnothing$) on une preuve de la validité-syntaxique d'une formule φ (l'arbre est clos), on écrit : $\vdash \varphi$. Dans le cas contraire (l'arbre est ouvert), on écrit : $\nvdash \varphi$.

Quand un arbre est ouvert, et du fait de la complétude du système K (voir feuilles distribuées en cours pour les preuves de ces deux propriétés), qui assure une forme de correspondance entre les preuves syntaxiques et les justifications sémantiques des inférences faites à partir des formules dans K, on peut sur la base des branches qui sont ouvertes, construire des *contre-modèles* de l'inférence, c'est–à-dire des interprétations où les membres de Σ sont vrais, mais où la formule φ est fausse. On procède ainsi :

. (1) On considère une branche ouverte (souvent, il n'y en a qu'une seule, mais ce n'est pas obligatoire, bien sûr). On met dans l'ensemble des mondes W de l'interprétation, tous les mondes qui apparaissent sur la branche et qui, dans notre notation, sont désignés par les nombres à droite des noeuds (on ne met pas les mondes qui apparaissent éventuellement sur d'autres branches).

. (2) La relation R contient tous les couples de mondes en relation d'accessibilité qui apparaissent sur la branche.

. (3) Pour chaque formule ψ non modalisée et chaque monde w_i, on pose, pour une valuation v, que $v_{w_i}(\psi) = 1$ si ψ apparaît sur la branche avec avec le numéro du monde w_i à sa droite, et que $v_{w_i}(\psi) = 0$, si $\neg\psi$ apparaît sur la branche avec le numéro du monde w_i à sa droite. Les autres assignations de valeurs de vérité sont arbitraires. [4]

Voir exemples sur feuilles distribuées en cours.

2.5 Les différentes logiques modales : approche sémantique

2.5.1 Différencier les logiques modales par des conditions imposées à la relation d'accessibilité

On peut imposées des conditions à la relation d'accessibilité pour construire des logiques modales distinctes de K. On a donné des noms à ces différentes logiques :

Logiques	Conditions de cadre
K	aucune condition imposée à la relation R
D	La relation est sérielle
T	La relation est réflexive
B	La relation est réflexive et symétrique
K4	La relation est transitive
S4	La relation est transitive et symétrique
S5	La relation est réflexive, symétrique et transitive (équivalence)

4. Rappelons un point important : quand on montre qu'une inférence est syntaxiquement correcte (que l'on peut construire un arbre clos), il n'y a aucun problème : nous savons que *pour toute formule* (composée de lettres de proposition liées par des connecteurs et des opérateurs modaux), que l'on peut substituer de façon uniforme à l'une ou l'autre des variables de formules A, B, C... qui apparaissent dans les prémisses ou la conclusion, l'inférence est valide. En revanche, quand on construit un contre-modèle, il est *faux de dire* que *pour toute formule* que l'on substitue à ces variables, l'inférence est invalide. Il est clair par exemple que $\Diamond A \nvdash A$. Mais notez que si je substitue à A, la formule $p \Rightarrow p$, j'obtiens une inférence tout à fait correcte, puisque $p \Rightarrow p$ est toujours valide. En revanche, ce que montre un arbre ouvert, c'est qu'*il existe certaines* substitutions uniformes de formules aux variables A, B, C... qui rendent invalide l'inférence. Le plus simple est de substituer à ces variables A, B, C... des lettres de propositions p, q, r... et de construire sur cette base un vrai contre-modèle. Nous nous sommes donc autorisés quelques largesses dans la construction des contre-modèles en n'opérant pas cette substitution.

2.5.2 Validité

Il nous faut introduire une nouvelle nomenclature, qui se révèle fondamentale pour étudier les différents systèmes de logique modale. Soit une interprétation $\mathcal{I} = \langle W, R, v \rangle$ quelconque. On peut faire abstraction de la valuation v, pour ne conserver de cette interprétation que l'ensemble des mondes W et la relation d'accessibilité R définie entre les mondes. Le couple $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ est appelé le « cadre » de l'interprétation (le signe $\mathcal{F}$ est utilisé pour *frame*, cadre en anglais [5]). Et on dit que l'interprétation $\mathcal{I} = \langle W, R, v \rangle$ est *fondée* sur le cadre $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$. On dira qu'une formule φ est valide dans le cadre $\mathcal{F}$ si elle est valide dans toutes les interprétations fondées sur $\mathcal{F}$ et on écrira : $\mathcal{F} \vDash \varphi$.

On peut à partir classer les cadres en fonction de la nature de la relation d'accessibilité existant entre les mondes. On pourra mettre dans le même ensemble tous les cadres dont la relation R est réflexive, ou tous les cadres dont la relation R est transitive, ou tous les cadres dont la relation R est transitive et réflexive, etc. On distingue ainsi des *classes de cadres*. La question sémantique intéressante qui se pose désormais est de savoir si une formule donnée φ est valide dans telle classe de cadre $\mathcal{C}$, c'est-à-dire s'il est vrai dans les mondes possibles de toutes les interprétations fondées sur les cadres appartenant à cette classe $\mathcal{C}$. On a donc :

– φ est valide dans $\mathcal{C}$ ssi φ est valide dans les cadres $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$. On note : $\mathcal{C} \vDash \varphi$.

On a dispose donc de différentes notions de validité, qui forment des strates successives : (1) la validité dans une interprétation particulière, (2) la validité dans les interprétations fondées sur un cadre particulier, (3) la validité dans une classe de cadres particulières et enfin (4) la validité dans n'importe quelle classe de cadres (pour toutes les classes de cadres), c'est-à-dire la validité dans K.

5. On appelle aussi ces cadres des « cadres de Kripke », puisque Kripke a été un de ceux qui les ont introduits.

2.6 Les différentes logiques modales : approche axiomatique

2.6.1 Correspondance entre axiomes et types de relation d'accessibilité

Il existe une *correspondance* entre les conditions imposées à la relation R et certains axiomes. Par exemple, toutes les formules qui sont valides dans les cadres réflexifs peuvent être dérivées dans le système K augmenté de l'axiome T : $\Box p \Rightarrow q$, et inversement. Voici quelques axiomes que l'on peut ajouter au système K, avec leur nom traditionnel :

Noms des axiomes	Axiomes
K	$\Box(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\Box p \Rightarrow \Box q)$
D	$\Box p \Rightarrow \Diamond q$
T	$\Box p \Rightarrow q$
B	$p \Rightarrow \Box\Diamond q$
4	$\Box p \Rightarrow \Box\Box q$
5	$\Diamond p \Rightarrow \Box\Box q$

On prouve que le système K augmenté d'un ou de plusieurs de ces axiomes correspond à l'un ou l'autre des logiques valides dans les cadre suivants :

Logiques	Conditions de cadre	Axiomes
K	R quelconque	K
D	R sérielle	$K + D$
T	R réflexive	$K + T$
B	R réflexive et symétrique	$K + T + B$
K4	R transitive	$K + 4$
S4	R transitive et symétrique	$K + T + 4$
S5	R équivalence	$K + T + 5$ ou $K + T + 4 + B$

Notez que si une formule est valide dans tous les cadres transitifs, ou encore K4-valide, alors elle est valide *a fortiori* dans tous les cadres transitifs et réflexifs, c'est-à-dire qu'elle sera S4-valide. Dans ce cas, on dira que K4 est une *sous-logique* de S4. On dit aussi que S4 est une logique *plus forte* que K4. De la même manière, si une formule est valide dans tous les cadres transitifs et réflexifs, c'est-à-dire S4-valide, alors elle est valide *a fortiori* dans tous les cadres transitifs, réflexifs et symétriques, c'est-à-dire S5-valide. Dans ce cas, on dira que S4 est une *sous-logique* de S5 ou que S5 est plus forte que S4. Toutes les formules valides de K, qui n'impose aucune condition à la relation R d'accessibilité, seront donc *a fortiori* valides dans tous les autres cadres. En d'autres termes, K est une sous-logique de toutes les autres logiques. C'est la plus faible des logiques modales normales. Voici un graphe représentant les relations entre les différentes logiques, où la flèche représente la relation « être une sous logique de » :

$$
\begin{tikzcd}
 & K \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
D \arrow[d] & & K4 \arrow[dd] \\
T \arrow[d] \arrow[drr] & & \\
B \arrow[dr] & & S4 \arrow[dl] \\
 & S5 &
\end{tikzcd}
$$

Toutes les logiques modales de ce diagramme sont consistantes, complètes et décidables. Un rapide calcul montre qu'il existe exactement 31 combinaisons des axiomes D, T, B, 4 et 5, qui donnent, si on ajoute K, 32 logiques modales possibles fondées sur ces axiomes. En fait, on en distingue 15, les 17 restantes étant équivalentes à l'une ou l'autre de ces 15 logiques.

On peut donner une liste plus complète de systèmes axiomatiques, en ajoutant de nouveaux axiomes et de nouvelles combinaisons de ces axiomes. Pour les curieux, voici un liste de certains de ces systèmes :

Logiques	Axiomes
K	$\Box(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\Box p \Rightarrow \Box p)$
D	K+$\Box p \Rightarrow \Diamond p$
T	K+$\Box p \Rightarrow p$
B	K+$p \Rightarrow \Box\Diamond p$
K4	K+$\Box p \Rightarrow \Box\Box p$
K5	K+$\Diamond\Box p \Rightarrow \Box p$
Alt$_n$	K+$\Box p_1 \vee \Box(p_1 \Rightarrow p_2) \vee ... \vee \Box(p_1 \wedge ... \wedge p_n \Rightarrow p_{n+1})$
S4	K4+$\Box p \Rightarrow p$
GL	K4+$\Box(\Box p \Rightarrow p) \Rightarrow \Box p$ (formule de Löb)
GRz	K+$\Box(\Box p \Rightarrow \Box p) \Rightarrow p) \Rightarrow p$ (axiome de Grzegorczyk)
K4.1	K4+$\Box\Diamond p \Rightarrow \Diamond\Box p$ (formule de McKinsey [6])
K4.2	KA+$\Diamond(p \wedge \Box q) \Rightarrow \Box(p \vee \Diamond q)$
S4.1 (ou K1)	S4+$\Box\Diamond p \Rightarrow \Diamond\Box p$
S4.2 (ou G1)	S4+$\Diamond\Box \Rightarrow \Box\Diamond p$ (formule de Geach)
S4.3	S4+$\Box(\Box p \Rightarrow q) \vee \Box(\Box q \Rightarrow p)$
Triv	K4+$\Box p \Leftrightarrow p$
Verum	K4+$\Box p$
S5	S4+$p \Rightarrow \Box\Diamond p$
K4B	K4+$p \Rightarrow \Box\Diamond p$
Dum (ou N1)	S4+$\Box(\Box(p \Rightarrow \Box p) \Rightarrow p) \Rightarrow (\Diamond\Box p \Rightarrow p)$ (formule de Dummett)
K4BW$_n$	K4+ $\bigwedge_{i=0}^{n} \Diamond p_i \;\Rightarrow \bigvee_{0 \leq i \neq j \leq n} \Diamond(p_i \wedge (p_j \vee \Diamond p_j))$
K4$_{n,m}$	K4+$\Box^n p \Rightarrow \Box^m p$, pour $1 \leq m \leq n$

Il existe toute une littérature sur la nature de la corrélation entre les axiomes et la possibilité d'exprimer ces axiomes dans un langage des relations entre mondes (transitivité, réflexivité, etc), qui, comme vous l'aurez remarqué sans doute, pour les logiques , D, T, B, S4, S5, n'utilise qu'une quantification de premier ordre sur les mondes possibles avec identité. Cette corrélation n'est pas biunivoque : il existe

6. John McKinsey (1908-1953) était un mathématicien américain, spécialiste de la théorie des jeux et de logique. Cet axiome est la source de développements importants en logique modale. Originellement (1945), McKinsey introduisit le système S4+$\Box[(\Box\Diamond p \wedge \Diamond\Box p) \Rightarrow \Diamond(p \Rightarrow q)]$, et le nomma S4.1 (voir plus bas dans la liste). Boleslaw Sobociński (1904–1980, philosophe et logicien polonais), en 1964, montra que ce sytème était identique à S4+$\Box\Diamond p \Rightarrow \Diamond\Box p$, et lui donna d'ailleurs le nom de K1, car en réalité S4.1 (c'est-à-dire K1) n'est pas une sous-logique de S4.2. Martin Löb (1921-2006) était un mathématicien allemand émigré en Grande-Bretagne. Andrzej Grzegorczyk (1922-2014) était un mathématicien et philosophe polonais. Peter T. Geach (1916-2013) et Michael A. Dummett (1925-2011) étaient de très grands philosophes britanniques.

des conditions imposées aux relations exprimables dans le langage des prédicats du premier ordre qui ne peuvent être mises en corrélation avec aucune formule du langage modal, comme l'irréflexivité $(\forall w \neg(wRw))$. Inversement, il existe des axiomes qui ne correspondent à aucune condition imposée à la relation d'accessibilité dans le langage des prédicats du premier ordre, comme la relation dite de « bon ordre », qui ne peuvent s'exprimer que dans un langage des prédicats de *second* ordre (qui quantifie non seulement sur les mondes possibles, mais aussi sur les ensembles de mondes possibles). Tout cela fait l'objet d'une théorie qu'on appelle « théorie de la correspondance », qui a développé des outils puissants depuis les années 70 pour analyser la nature et la possibilité de ces corrélations. [7]

Note pour les curieux : un des résultats les plus intéressants, qu'il n'est pas question de démontrer ici, est dû au logicien norvégien Henrik Sahlqvist qui l'a établi en 1973. On appelle *formule de Sahlqvist* toute formule de la forme $\Box^n(\alpha \Rightarrow \beta)$, pour $n \geq 0$, répondant aux conditions suivantes :

(1) α est telle que

(i) aucun opérateur autre que $\Box$, $\Diamond$, $\wedge$, $\vee$ et $\neg$ n'y a d'occurrence

(ii) $\neg$ n'apparaît que devant une lettre de proposition

(iii) aucune occurrence de $\Diamond$, $\wedge$ ou $\vee$ ne se trouve dans la portée d'un $\Box$.

(2) β n'autorise que les occurrences de $\Box$, $\Diamond$, $\wedge$, $\vee$ ($\neg$ ne doit pas avoir d'occurrence.)

Sahlqvist a prouvé que toutes les classes de cadre validant une telle formule sont définissables par une formule du prédicat de premier ordre !

La formule modale la plus simple qui n'est pas une formule de Sahlqvist est la formule de McKinsey : $\Box\Diamond p \Rightarrow \Diamond\Box p$ (il y a dans l'antécédent un opérateur de possibilité qui est dans la portée d'un opérateur de nécessité). On peut prouver en fait que la formule de McKinsey ne correspond à aucune condition de cadre définissable en premier ordre. De même, la formule de Löb $\Box(\Box p \Rightarrow p) \Rightarrow \Box p$ n'est pas non plus une formule de Sahlqvist (l'implication a une occurrence dans l'antécédent) et on prouve pareillement qu'elle ne correspond à aucune condition de cadre définissable en premier ordre.

Par contraste, tous les axiomes T, D, B, 4, 5 sont des formules de Sahlqvist. La formule de Geach (en quelque sorte l'image en miroir de la formule de McKinsey) est une formule de Sahlqvist et correspond donc à une formule en premier ordre définissant une condition de cadre. Il s'agit en fait de la formule dite de Church-Rosser : $\forall x[\forall y(Rxy \rightarrow \exists z[Ryz]) \rightarrow \exists y(Rxy \wedge \forall z[Ryz \rightarrow z = y])])$.

7. Le logicien néerlandais Johan van Benthem y a particulièrement contribué.

2.6.2 Caractéristiques communes aux différent systèmes axiomatiques

Tous les systèmes admettent les trois règles d'inférence suivantes :

- **Substitution** (Sub) : si, dans une thèse, on substitue uniformément une formule quelconque à une lettre de proposition, la formule résultante est une thèse.
- **Modus Ponens** (MP) : si $\varphi \Rightarrow \psi$ et φ sont des thèses, ψ est une thèse.
- **Nécessitation** (N)= si φ est une thèse, $\Box\varphi$ est une thèse.

Rappel : une déduction pour φ est une suite finie de formules de L, $\psi_1, \ldots, \psi_n$, telle que :

- $\varphi = \psi_n$
- pour $1 \leq i \leq n, \psi_i$ est soit un axiome, soit est obtenue par Sub, MP ou N sur une ou deux formules d'indice $< i$.

Une formule φ pour laquelle existe une déduction est appelée une *thèse*, ce que l'on note : $\vdash \varphi$.

On admet ensuite comme axiomes dans tous les systèmes de logique modale étudiés ici, toutes les thèses (tautologies) du calcul de CP.

Dans les déductions, on utilisera les règles d'inférence dérivées des thèses de CP (tautologies) qui sont de la formes $\varphi \Rightarrow \psi$, ce qui revient à admettre que si φ est une thèse, alors ψ est une thèse. Parmi les plus fréquemment utilisées, on trouve :

- Syll. :	si $\vdash \varphi \Rightarrow \psi$ et $\vdash \psi \Rightarrow \theta$ alors $\vdash \varphi \Rightarrow \theta$.
- Adj. :	si $\vdash \varphi$ et $\vdash \psi$ alors $\vdash \varphi \wedge \psi$ et réciproquement.
- Contra. :	si $\vdash \varphi \Rightarrow \psi$ alors $\vdash \sim\psi \Rightarrow\sim\varphi$ et réciproquement.
- Contrab. :	si $\vdash \varphi \Leftrightarrow \psi$ alors $\vdash \sim\varphi \Leftrightarrow\sim\psi$ et réciproquement.
- Comp :	si $\vdash \varphi \Rightarrow \psi$ et $\vdash \varphi \Rightarrow \theta$ alors $\vdash \varphi \Rightarrow (\psi \wedge \theta)$.
- Imp-exp :	si $\vdash \varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \theta)$ alors $\vdash (\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \theta)$ et réciproquement.

On fera également usage du théorème de remplacement qui établit que si, dans une thèse, on remplace une sous-formule ψ par une formule ψ', telle que $\vdash \psi \Leftrightarrow \psi'$, alors la formule obtenue est également une thèse. On note la règle correspondante : *Remp* et "*Remp* dans $(n)/$ Contra.", par ex., indique que la formule qui remplace une sous-formule dans la formule (n) lui est équivalente par la règle dérivée "Contra".

2.7 Le système K

Ce premier système est le plus simple puisqu'il ne comporte qu'un axiome modal, à savoir l'axiome **K** : $\Box(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\Box q \Rightarrow \Box q)$. On peut également écrire (grâce à Imp-exp) cet axiome sous la forme : $\Box[(p \Rightarrow q) \wedge \Box p] \Rightarrow \Box q$. Tous les systèmes que l'on étudiera incorporent cet axiome.

2.7.1 Règles dérivées modales

— R_1 : si $\vdash \varphi \Rightarrow \psi$, alors $\vdash \Box\varphi \Rightarrow \Box\psi$: en effet :

$\vdash \varphi \Rightarrow \psi$	(1)	supposé déjà déduit
$\vdash \Box(\varphi \Rightarrow \psi)$	(2)	*N* sur (1)
$\vdash \Box(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\Box\varphi \Rightarrow \Box\psi)$	(3)	*Sub* dans **K**
$\vdash \Box\varphi \Rightarrow \Box\psi$		*MP* sur (2), (3)

Il n'est pas difficile de voir que si l'on suppose déjà déduit une formule de la forme $\varphi \Leftrightarrow \psi$, le schéma de déduction précédent permet avec Adj et la définition de $\Leftrightarrow$ de déduire $\Box\varphi \Leftrightarrow \Box\psi$; on a donc la règle dérivée plus forte suivante :

— R_1' : si $\vdash \varphi \Leftrightarrow \psi$, alors $\vdash \Box\varphi \Leftrightarrow \Box\psi$.

— R_2 : si $\vdash \varphi \Rightarrow \psi$, alors $\vdash \Diamond\varphi \Rightarrow \Diamond\psi$.

On déduit d'abord la thèse : $\Box(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\Diamond p \Rightarrow \Diamond q)$:

$\vdash \Box(\sim q \Rightarrow \sim p) \Rightarrow (\Box \sim q \Rightarrow \Box \sim p)$	(1)	*Sub* dans **K**
$\vdash \Box(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim\Box \sim p \Rightarrow \sim\Box \sim q)$	(2)	*Remp* dans (1)/ Contra.
$\vdash \Box(\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{q}) \Rightarrow (\Diamond\mathbf{p} \Rightarrow \Diamond\mathbf{q})$		*Remp* dans (2)/ df. $\Diamond$.

On a alors :

$\vdash \varphi \Rightarrow \psi$	(1)	supposé déjà déduit
$\vdash \Box(\varphi \Rightarrow \psi)$	(2)	*N* sur (1)
$\vdash \Box(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\Diamond\varphi \Rightarrow \Diamond\psi)$	(3)	*Sub* dans la thèse juste déduite
$\vdash \Diamond\varphi \Rightarrow \Diamond\psi$,		*MP* sur (2), (3).

2.7.2 Le système K

Distributivité dans K

On peut déduire dans K les lois de distributivité $\Box/\wedge$ et $\Diamond/\vee$ ainsi que les implications pour $\Box/\vee$ et $\Diamond/\wedge$ [8].

— Distributivité $\Box/\wedge$:

$\vdash (p \wedge q) \Rightarrow p$	(1)	Taut.
$\vdash \Box(p \wedge q) \Rightarrow \Box p$	(2)	R_1 sur (1)
$\vdash (p \wedge q) \Rightarrow q$	(3)	Taut.
$\vdash \Box(p \wedge q) \Rightarrow \Box q$	(4)	R_1 sur (3)
$\vdash \Box(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \Rightarrow (\Box\mathbf{p} \wedge \Box\mathbf{q})$	(5)	Comp. sur (2), (4).
$\vdash p \Rightarrow [q \Rightarrow (p \wedge q)]$	(6)	Taut.
$\vdash \Box p \Rightarrow \Box[q \Rightarrow (p \wedge q)]$	(7)	R_1 sur (6)
$\vdash \Box[q \Rightarrow (p \wedge q)] \Rightarrow [\Box q \Rightarrow \Box(p \wedge q)]$	(8)	*Sub* dans **K**
$\vdash \Box p \Rightarrow [\Box q \Rightarrow \Box(p \wedge q)]$	(9)	Syll. sur (7), (8)
$\vdash (\Box\mathbf{p} \wedge \Box\mathbf{q}) \Rightarrow \Box(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q})$	(10)	Imp-exp. sur (9)
$\vdash [\Box(p \wedge q) \Rightarrow (\Box p \wedge \Box q)] \wedge [(\Box p \wedge \Box q) \Rightarrow \Box(p \wedge q)]$	(11)	Adj. sur (5), (10)
$\vdash \Box(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \Leftrightarrow (\Box\mathbf{p} \wedge \Box\mathbf{q})$		df. $\Leftrightarrow$ sur (11)

— Distributivité $\Diamond$ / $\vee$:

$\vdash \Box({\sim}p \wedge {\sim}q) \Leftrightarrow (\Box{\sim}p \wedge \Box{\sim}q)$	(1)	*Sub* dans Distrib $\Box/\wedge$
$\vdash {\sim}\Diamond{\sim}({\sim}p \wedge q) \Leftrightarrow ({\sim}\Diamond p \wedge {\sim}\Diamond q)$	(2)	*Remp* dans (1) / df. opérateurs.
$\vdash {\sim}\Diamond(p \vee q) \Leftrightarrow ({\sim}\Diamond p \wedge {\sim}\Diamond q)$	(3)	*Remp* dans (2) / de Morgan
$\vdash \Diamond(p \vee q) \Leftrightarrow {\sim}({\sim}\Diamond p \wedge {\sim}\Diamond q)$	(4)	Contrab. sur (3)
$\vdash \Diamond(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \Leftrightarrow (\Diamond\mathbf{p} \vee \Diamond\mathbf{q})$		*Remp* dans (4)/de Morgan

On peut déduire immédiatement de la distributivité $\Diamond/\vee$ la thèse : $\Diamond(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\Box p \Rightarrow \Diamond q)$; en effet :

$\vdash \Diamond({\sim}p \vee q) \Leftrightarrow (\Diamond{\sim}p \vee \Diamond q)$	(1)	*Sub* dans Distrib. $\Diamond/\vee$
$\vdash \Diamond({\sim}p \vee q) \Leftrightarrow ({\sim}\Box p \vee \Diamond q)$	(2)	*Remp* dans (1)/df. $\Diamond$
$\vdash \Diamond(\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{q}) \Leftrightarrow (\Box\mathbf{p} \Rightarrow \Diamond\mathbf{q})$	(2)	*Remp* dans (2)/df. $\Rightarrow$

— Rapport $\Box$ / $\vee$.

On a seulement l'implication suivante : $(\Box p \vee \Box q) \Rightarrow \Box(p \vee q)$; en effet :

8. Il est facile de voir que ces thèses sont là encore les homologues de ce que l'on a en premier ordre pour les quantificateurs en relation avec $\wedge$ et $\vee$.

$\vdash p \Rightarrow (p \vee q)$	(1)	Taut.
$\vdash \Box p \Rightarrow \Box(p \vee q)$	(2)	R_1 sur (1)
$\vdash q \Rightarrow (p \vee q)$	(3)	Taut.
$\vdash \Box q \Rightarrow \Box(p \vee q)$	(4)	R_1 sur (3)
$\vdash (p \Rightarrow r) \Rightarrow \{(q \Rightarrow r) \Rightarrow [(p \vee q) \Rightarrow r]\}$	(5)	Taut
$\vdash (\Box \mathbf{p} \vee \Box \mathbf{q}) \Rightarrow \Box(\mathbf{p} \vee \mathbf{q})$		Règle dérivée de (5) sur (2), (4).

— Rapports $\Diamond/\wedge$.

On a seulement l'implication suivante : $\Diamond(p \wedge q) \Rightarrow (\Diamond p \wedge \Diamond q)$; en effet :

$\vdash (\Box \sim p \vee \Box \sim q) \Rightarrow \Box(\sim p \vee \sim q)$	(1)	*Sub* dans la thèse précédente
$\vdash \sim \Box(\sim p \vee \sim q) \Rightarrow \sim (\Box \sim p \vee \Box \sim q)$	(2)	Contra. sur (1)
$\vdash \Diamond \sim (\sim p \vee \sim q) \Rightarrow \sim (\sim \Diamond p \vee \sim \Diamond q)$	(3)	*Remp* dans (2) / df. opérateurs
$\vdash \Diamond(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \Rightarrow (\Diamond \mathbf{p} \wedge \Diamond \mathbf{q})$		*Remp* dans (3) / de Morgan + double négation.

2.7.3 Exemples d'autres systèmes

Le système D

Le système D est obtenu en ajoutant à K l'axiome **D** : $\Box p \Rightarrow \Diamond p$.

Cet axiome est appelé **D** comme "**D**éontique" : si l'on interprète $\Box p$ par "il est obligatoire que p" et $\Diamond p$ par "il est permis que p", cet axiome se lit : "ce qui est obligatoire est permis", ce qui semble raisonnable (?).

De **D** on déduit facilement : $\Diamond(p \Rightarrow p)$; en effet :

$\vdash p \Rightarrow p$	(1)	Taut
$\vdash \Box(p \Rightarrow p)$	(2)	N sur (1)
$\vdash \Box(p \Rightarrow p) \Rightarrow \Diamond(p \Rightarrow p)$	(3)	*Sub* dans **D**
$\vdash \Diamond(\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{p})$		MP sur (2), (3)

Mais si l'on prenait cette dernière thèse pour axiome à la place de **D**, on pourrait déduire **D** ; il suffit de se souvenir de la thèse déjà déduite dans K :

$\vdash \Diamond(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\Box p \Rightarrow \Diamond q)$

et de substituer p à q. Le système obtenu serait équivalent à D.

Plus généralement, le système D permet d'avoir, pour toute thèse $\vdash \varphi$, une nouvelle thèse de la forme $\vdash \Diamond\varphi$, ce que ne permettait pas le système K[9]. Il suffit de passer de $\vdash \varphi$ à $\vdash \Box\varphi$ par N, de substituer, dans **D**, φ à p, puis d'appliquerMP.

Le système T

Le système T est obtenu en ajoutant à K l'axiome **T** : $\Box p \Rightarrow p$. Ce système fut proposé par Feys en 1937.

On déduit immédiatement de cet axiome la thèse $p \Rightarrow \Diamond p$; en effet :

$\vdash \Box \sim p \Rightarrow \sim p$	(1)	*Sub* dans **T**
$\vdash p \Rightarrow \sim\Box \sim p$	(2)	Contra. sur (1)
$\vdash \mathbf{p} \Rightarrow \Diamond\mathbf{p}$		*Remp* dans (2) / df. $\Diamond$

Si l'on appelle **T**, l'*axiome de nécessité*, on peut appeler cette thèse (que l'on pourrait prendre pour axiome à la place de **T**) l'*axiome de possibilité*. Il exprime cette vieille maxime leibnizienne que tout ce qui est réel est *a fortiori* possible[10]

2.8 La méthode des arbres pour les autres logiques modales

Pour obtenir des dérivations dans les systèmes qui implique la réflexivité, la symétrie, la transitivité ou la sérialité, on utilise les règles intuitives suivantes :

Réflexivité	Symétrie	Transitivité	Sérialité
.	iRj	iRj	.
$\downarrow$	$\downarrow$	jRk	$\downarrow$
iRi	jRi	$\downarrow$	iRj
		iRk	

9. Si l'on avait une thèse de cette forme dans K, on pourrait déduire $\Diamond(p \Rightarrow p)$ qui n'est pas une thèse de K et est équivalent à **D** comme on vient de voir ; en effet :

$\vdash \Diamond\varphi$	(1)	Thèse supposée déduite dans K
$\vdash q \Rightarrow (p \Rightarrow p)$	(2)	Taut
$\vdash \varphi \Rightarrow (p \Rightarrow p)$	(3)	*Sub* dans (2)
$\vdash \Diamond\varphi \Rightarrow \Diamond(p \Rightarrow p)$	(4)	R_2 sur (3)
$\vdash \Diamond(p \Rightarrow p)$		MP sur (1), (4).

10. cf. par ex. dans la lettre à Arnauld du 4/14 juillet 1686 (p. 120 de l'éd. Le Roy) : "Tout ce qui est actuel peut être conçu comme possible…".

2.9 Logique polymodale

Remarquons : (1) nous nous sommes restreints à utiliser un seul opérateur modal, qui, par l'usage de la négation, permettait d'en définir un deuxième, l'opérateur de possibilité ($\Diamond p =_{df} \neg\Box\neg p$), qu'on appelle le « dual » de l'opérateur de nécessité [11] ; (2) nous avons interprété comme l'opérateur de nécessité. Mais on peut relâcher cette double condition. [12]

Tout d'abord, pourquoi ne pas interpréter les éléments de W comme des instants du temps, notés t_n, et pourquoi ne pas interpréter la relation R comme une relation entre ces instants t_n ? On interprétera autrement la formule $\Box p$. Elle signifie désormais que, en un instant t, p est vrai à *tout* instant t' qui est en relation avec t, pour $t, t' \in W$. On peut interpréter la relation d'accessibilité comme la relation de postériorité temporelle. $\Box p$ signifie alors que p sera toujours vrai. Dans ce cas, au lieu du symbole $\Box$, on utilise plutôt le symbole « G », et on écrit : Gp. On définit, grâce à la négation, l'opérateur dual, signifiant qu'il n'est pas vrai que p sera toujours faux, c'est-à-dire : « Il sera vrai que p ». On utilise le symbole F, plutôt que $\Diamond$, pour ce faire : $Fp =_{df} \neg G\neg p$. En d'autres termes, de même que « $\Diamond p$ est vrai dans le monde w » signifie qu'il existe un monde possible w', accessible à w, où p est vrai, de même « Fp est vraie au temps t » signifie qu'*il existe au moins un* instant t', postérieur à t, où p est vrai.

Mais en second lieu, nous voudrions sûrement pouvoir représenter des propositions dont la vérité est *passée*, et non seulement future. Du point de vue sémantique cela signifie que, sur le même ensemble d'instants W, nous voudrions définir une *seconde* relation entre les instants qui représentera la relation d'antériorité. En le faisant, nous pourrons dire qu'une proposition a *toujours* été vraie dans le passé, ce que l'on notera Hp. Le dual de l'opérateur H est noté P, de sorte que Pp pourra être lu comme « il a été le cas dans le passé que p ». Hp est vrai en un instant t ssi p est vrai à *tous* les instants t' antérieurs à t. Et Pp est vrai à un instant t, s'il *existe au moins un* instant t' antérieur à t où p est vrai. Comme cette logique comprend *deux* opérateurs (avec leurs opérateurs duals), on a affaire à un exemple de logique « polymodale ».

Une fois le langage de ce qu'on appelle « la logique temporelle » mis en place,

11. En mathématiques, la dualité est une relation par laquelle un élément est associé à un autre par une opération d'*involution*. Une involution est une fonction qui est son propre inverse : $f((fx)) = x$. La négation par exemple est une involution : $\neg\neg\varphi = \varphi$.

12. Il en existe en fait une troisième : les opérateurs de nécessité et de possibilité sont unaires. Mais pourquoi ne pas se donner la possibilité d'opérateur d'arité quelconque ? Il existe de tels opérateurs intensionnels, par exemple des opérateurs binaires : « p après que q », « p avant que q », « p tant que q », « p jusqu'à q », etc.

on peut exprimer certaines formules intéressantes, par exemple : $P\varphi \Rightarrow GP\varphi$. En d'autres termes : « tout ce qui est arrivé sera désormais toujours arrivé », ce qui semble une vérité générale à propos du temps, quelle que soit la manière dont on le conçoit.

2.9.1 Sémantique pour la logique temporelle minimale

On peut construire de la façon suivante notre sémantique. On se donne une interprétation sous forme d'un triplet $\langle W, \{R, S\}, v\rangle$, où

– W est un ensemble d'instant t_n

– l'ensemble $\{R, S\}$ est un couple de relations définies sur l'ensemble de W, où l'interprétation naturelle de tRt' est que t' est postérieur à t et celle de tSt' est que t' est antérieure à t :

– v est une valuation.

On se donnera les règles d'évaluation suivantes :

$v_t(Gp) = 1$ ssi pour tout instant t' tel que tRt', $v_{t'}(p) = 1$
$v_t(Fp) = 1$ ss'il existe un temps t' tel que tRt' et $v_{t'}(p) = 1$
$v_t(Hp) = 1$ ssi pour tout instant t' tel que tSt', $v_{t'}(p) = 1$
$v_t(Pp) = 1$ ss'il existe un temps t' tel que tSt' et $v_{t'}(p) = 1$

En réalité, dans les logiques temporelles, on pose que la relation S qui représente la relation d'antériorité est exactement la relation converse de la relation de postériorité R. En d'autres termes, si on a t_iRt_j, alors on a t_jSt_i, et inversement ; ce qui revient à dire que, si un premier instant est postérieur à un second instant, alors ce second instant est antérieur au premier instant : t_iRt_j est équivalent à t_jRt_i. La formule veut donc aussi bien dire que t' est postérieur à t, que t est antérieur à t'. C'est pourquoi on peut se contenter des règles d'évaluation suivantes, plus naturelles, avec la seule relation R :

$v_t(Gp) = 1$ ssi pour tout instant t' tel que tRt', $v_{t'}(p) = 1$
$v_t(Fp) = 1$ ss'il existe un temps t' tel que tRt' et $v_{t'}(p) = 1$
$v_t(Hp) = 1$ ssi pour tout instant t' tel que $t'Rt$, $v_{t'}(p) = 1$

$v_t(Pp) = 1$ ss'il existe un temps t' tel que $t'Rt$ et $v_{t'}(p) = 1$

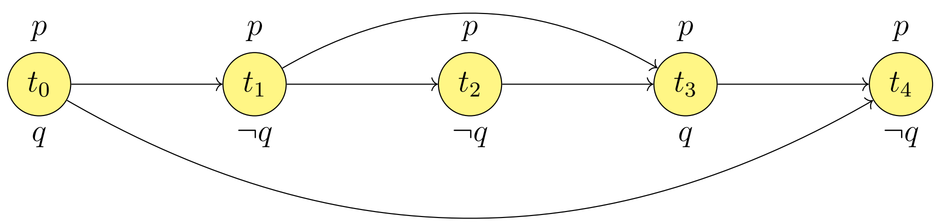
Exemple. On construit l'interprétation $\mathcal{I}$ suivante :

$W = \{t_0, t_1, t_2, t_3, t_4\}$

$R = \{(t_0; t_1), (t_1; t_2), (t_2; t_3), (t_3; t_4), (t_0; t_4), (t_1; t_3)\}$

$v_{t_0}(p) = v_{t_1}(p) = v_{t_2}(p) = v_{t_3}(p) = v_{t_4}(p) = 1$
$v_{t_0}(q) = v_{t_3}(q) = 1$ et $v_{t_1}(q) = v_{t_2}(q) = v_{t_4}(q) = 0$.

On peut représenter ainsi cette interprétation :



Quand aucune condition n'est imposée à la relation R (ou aux relations R et S, ce qui revient au même), alors nous obtenons la logique modale la plus faible, que, par analogie avec la dénomination de la logique K, on appelle « K_t », dite « logique temporelle minimale ».

On montre que la formule : $Pp \Rightarrow GPp$ est valide dans l'interprétation précédente, c'est-à-dire vraie à tous les instants de cette interprétation. Par exemple, elle est vraie en t_1. *Preuve* : Pp est vrai en t_1, puisqu'il existe en un instant antérieur à t_1, à savoir t_0, où p est vraie. GPp est vraie en t_1, ssi Pp est vraie à tout instant postérieur à t_1. Il existe deux instants postérieurs à t_1, à savoir t_2 et t_3. Or Pp est vraie en t_2, puisqu'il existe un instant antérieur à t_2 où p est vraie, à savoir t_1. Et Pp est vraie en t_3, puisqu'il existe un instant antérieur à t_3 où p est vraie, à savoir t_1. Puisque son antécédent et son conséquent sont vrais en t_1, la formule est $Pp \Rightarrow GPp$ est elle-même vraie en t_1. CQFD

. Exercices :

La formule $Pp \Rightarrow GPp$ est-elle valide dans l'interprétation $\mathcal{I}$?
La formule $Pq \Rightarrow GPq$ est-elle vraie en t_1 ? En t_2 ?
Le schéma de formules $P\varphi \Rightarrow GP\varphi$ est-il valide dans K_t ?

2.9.2 Axiomatisation de K_t

On peut axiomatiser « K_t », en ajoutant au calcul des propositions, les axiomes et règles suivants :

– K_G : $G(p \Rightarrow q) \Rightarrow (Gp \Rightarrow Gq)$
« Tout ce qui suivra toujours de ce qui sera toujours sera lui-même toujours »

– K_H : $H(p \Rightarrow q) \Rightarrow (Hp \Rightarrow Hq)$
« Tout ce qui a toujours suivi de ce qui a toujours été a lui-même toujours été »

– GP : $p \Rightarrow GPp$
« Ce qui est aura toujours été »

– GH : $p \Rightarrow HFp$
« Ce qui est a toujours été tel qu'il arriverait »

– La règle de substitution uniforme

– Règle de nécessitation 1 (N_G) : si $\vdash \varphi$, alors $\vdash G\varphi$
– Règle de nécessitation 2 (N_H) : si $\vdash \varphi$, alors $\vdash H\varphi$

Les deux premières règles K_H et K_G sont les analogues de l'axiome K pour les opérateurs H et G, comme le sont les deux règles de nécessitation N_G et N_H par rapport à la règle de nécessitation dans K. Les deux axiomes GP et GH assurent que les opérateurs H et G correspondent à des relations temporelles converses.

On démontre que le système axiomatique K_t est consistant et complet par rapport à notre sémantique. Les théorèmes de K_t expriment donc les propriétés des opérateurs temporels qui ne dépendent d'aucune présupposition particulière sur la nature de la relation d'antériorité (ou de postérité) temporelle.

2.9.3 D'autres systèmes de logique temporelle

On peut se donner d'autres logiques temporelles en ajoutant à K_t d'autres axiomes (du point de vue syntaxique) ou en imposant des conditions supplémentaires sur la relation R (ou R et S) (du point de vue sémantique). Voici les différentes conditions que l'on peut imposer et leurs traductions axiomatiques :

Réflexivité (REF) : $Gp \Rightarrow p$ ou $Hp \Rightarrow p$ ou $\Rightarrow Fp$ ou $p \Rightarrow Pp$
Transitivité (TRANS) : $Gp \Rightarrow GGp$ ou $Hp \Rightarrow HHp$ ou $FFp \Rightarrow Fp$, $PPp \Rightarrow Pp$
Linéarité dans le futur (LINF) : $PFp \Rightarrow (Pp \vee p \vee Fp)$
Linéarité dans le passé (LINP) : $FPp \Rightarrow (Pp \vee p \vee Fp)$
Linéarité (LIN) : $(FPp \vee PFp) \Rightarrow (Pp \vee p \vee Fp)$
Pas de commencement (NONC) : $Hp \Rightarrow Pp$
Pas de fin (NONF) : $Gp \Rightarrow Fp$
Densité (DENS) : $GGp \Rightarrow Gp$ ou $Fp \Rightarrow FFp$
Induction vers le futur (IND_G) : $Fp \wedge G(p \Rightarrow Fp) \Rightarrow GFp$
Induction vers le passé (IND_H) : $Pp \wedge H(p \Rightarrow Pp) \Rightarrow HPp$
Bon ordre (BO) : $H(Hp \Rightarrow p) \Rightarrow Hp)$
Complétude de Dedekind pour le futur (DEDEF) : $FGp \wedge F\neg p \Rightarrow F(Gq \wedge \neg PGp)$
Complétude de Dedekind pour le passé (DEDEP) : $PHp \wedge P\neg q \Rightarrow P(Hq \wedge \neg FHp)$

On peut en fonction des combinaisons d'axiomes choisies (et donc des classes de cadres qui correspondent) construire les logiques temporelles suivantes :

Logiques	Axiomes
K_t	K_G + K_H + GP + GH
$S4_t$	K_t + REF + TRANS
L_t	K_t + TRANS + LIN
N_t	L_t + NONF + IND_G + BO
Z_t	L_t + NONC + NONF + IND_G + IND_H
Q_t	L_t + NONC + NONF + DENS
R_t	L_t + NONC + NONF + DENS + DEDEF+ DEDEP