BIBLIOTHÈQUE D'HISTOIRE DES SCIENCES
Collection dirigée par
Maurice Caveing et Luce Giard

EUCLIDE
D'ALEXANDRIE

LES ÉLÉMENTS

TRADUITS DU TEXTE DE HEIBERG

volume I

INTRODUCTION GÉNÉRALE
par Maurice Caveing

LIVRES I-IV : GÉOMÉTRIE PLANE

Traduction et commentaires
par Bernard Vitrac

Presses Universitaires de France

PMDSEE Mueller (Ian), *Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's Elements*, Cambridge (Mass.)/London, MIT Pr., 1981.

TBE Heath (Thomas Little), *The thirteen Books of Euclid's Elements*, trad., introd., comm., Cambridge, 1908; 2ᵉ éd. 1926 (réimpr. New-York, Dover Pub., 1956) : I. *Intr., L. i, ii*; II. *L. iii, iv, v, vi, vii, viii, ix*; III. *L. x, xi, xii, xiii*.

Th. Caveing (Maurice), *La constitution du type mathématique de l'idéalité dans la pensée grecque*, Lille, Atelier national de reproduction des Thèses, 1982 : I. *Les mathématiques dans le savoir oriental antique*; II. *Les premières mathématiques des Grecs*; III. *La question de l'irrationalité* (et en microfiches : Didier-Erudition, Paris, 1988).

Vors. Diels (Hermann) & Kranz (Walter), *Die Fragmente der Vorsokratiker*, 6ᵉ éd., Berlin, Weidmann, 1951 (réimp. Dublin/Zürich, 1968, 3 vol.).

INTRODUCTION GÉNÉRALE

PAR MAURICE CAVEING

CHAPITRE I

La tradition euclidienne dans la Grèce ancienne

I. EUCLIDE D'ALEXANDRIE

La personnalité d'Euclide nous est quasiment inconnue. Nous ignorons si les Anciens disposaient d'informations plus étendues que celles qui, à travers quelques textes, sont parvenues jusqu'à nous.

La difficulté concerne d'abord les dates de sa vie. Le principal témoignage est celui de Proclus qui, dans le Prologue à son Commentaire au premier Livre des *Eléments*, à la fin du passage connu comme le « résumé de l'histoire de la Géométrie »[1], fixe la place d'Euclide dans la série des mathématiciens grecs dont il retient les noms. D'après ce texte, Euclide est le dernier auteur d'*Eléments* de la tradition, et donc postérieur à un certain Theudios de Magnésie, qui n'est pas autrement connu, mais travailla au sein de l'Académie et composa un ouvrage du même type. Proclus affirme ensuite qu'Euclide vécut sous le pre-

1. Ce texte est traduit ci-après IG, ch. III, § XI, p. 89-92.

mier Ptolémée[2], « car Archimède qui suivit de près le premier[3] [Ptolémée] mentionne Euclide ». En fait, dans la partie de l'œuvre d'Archimède qui nous est parvenue, on ne connaît qu'une mention explicite d'Euclide, tellement peu nécessaire qu'on a peine à croire qu'elle soit du grand Syracusain[4]. Proclus avait-il sous les yeux certaines des œuvres actuellement perdues d'Archimède qu'il lui arrive de citer? On ne peut l'exclure, mais ce qui est clair, d'après ce texte, c'est qu'il n'avait pas lui-même une connaissance directe des dates d'Euclide et qu'il en était réduit aux inférences, ainsi que l'a noté Heath[5].

Quant à la dépendance d'Archimède à l'égard des méthodes qu'on trouve dans les *Eléments*, certaines études récentes[6] suggèrent l'idée qu'elle ne saurait être affirmée sans d'importantes corrections, ce dont on pourrait rendre compte aussi bien par l'isolement du Syracusain que par la date à laquelle fut disponible le traité euclidien. Toutefois, à l'encontre de cette vue, il faut faire valoir que, si l'œuvre d'Archimède peut s'interpréter, sur certains points, comme indépendante des *Eléments*, dans leur rédaction euclidienne, en revanche, quand il considère comme connues et déjà démontrées une partie importante des propriétés des coniques, il semble bien qu'il fasse référence aux *Coniques* d'Euclide, comme le fera aussi Apollonius.

Voilà donc Euclide placé entre les mathématiciens de l'Académie, dont le fondateur Platon disparaît — rappelons-le — en 347/6, et les débuts d'Archimède, probablement dans la décennie 267/257[7].

2. Ptolémée I Sôter, fils de Lagos, général d'Alexandre, se fait attribuer l'Egypte en 323 et la gouverne au nom des héritiers d'Alexandre jusqu'en 306 où il prend le titre de roi; il règne jusqu'à sa mort en 285.
3. *Pr.* 68, 12. Certains Mss. ont une autre leçon, qui pourrait être interprétée ainsi : « car Archimède dans son premier [livre]... »
4. La mention d'Euclide, *El.*, 1, 2, est faite au début du traité *De la Sphère et du Cylindre*, L. I, Prop. 2; mention des *Eléments*, en général, sans le nom d'Euclide, est faite à la Prop. 6. La première paraît inutilement pédante, car l'enjeu est minime, la seconde est vague, alors que l'allusion concernerait des théorèmes importants : *El.*, X, 1 et XII, 2.
5. Sauf référence plus précisément explicitée, la mention de « Heath » renvoie toujours à *TBE*, au passage correspondant (par ex. ici à : I, Introduction, Chapter I).
6. V. Knorr W. R., 'Archimedes and the pre-Euclidean proportion theory, *Archives internationales d'Histoire des Sciences*, 28, 1978, 183-244, notamment § II et VI.
7. Archimède est mort au siège de Syracuse en 212; d'après le témoignage très tardif de Jean Tzetzès (*Les Chiliades*, XIIe siècle), il aurait eu alors soixante-quinze ans, mais ce chiffre peut être contesté comme trop élevé; v. Arendt F., Zu Archimedes, *Bibliotheca Mathematica*, 14_3, 1913-1914, 289-311.

En partant de ces deux bornes, et compte-tenu de la demi-douzaine de mathématiciens que Proclus place après Platon, entre Eudoxe de Cnide et Euclide, on peut admettre que l'œuvre de ce dernier s'est située dans les premières décennies du troisième siècle avant l'ère chrétienne.

Proclus ne dit rien de son lieu de naissance, qu'il ignore sans doute. La datation permet néanmoins d'établir la distinction entre le géomètre et le philosophe Euclide de Mégare, contemporain de Platon et fondateur de l'Ecole mégarique[8]. L'assignation comme lieu de naissance de Gela en Sicile repose sur la confusion précédente, Diogène Laërce évoquant Gela, alternativement à Mégare, comme possible ville d'origine du philosophe[9]. Des auteurs de langue arabe font naître le mathématicien à Tyr, voire dans le Khorāssān, résider à Damas, donnent le nom de son père et de son grand-père, ou le font même petit-fils de « Bérénice »[10]. Ces romans étant alors de règle dans un certain type de littérature, il n'y a pas lieu de nous y attarder : le silence de Proclus nous permet de penser qu'il n'y avait pas de sources grecques anciennes à l'origine de ces allégations.

En revanche nous disposons d'un texte de Pappus à propos d'Apollonius où nous lisons : « ... ayant été très longtemps le condisciple des étudiants d'Euclide à Alexandrie, ce dont il avait gardé un tel entraînement à l'esprit scientifique... »[11]. C'est une assurance qu'il y avait à Alexandrie un enseignement donné dans la tradition d'Euclide, et dont il avait été très probablement le fondateur. Cela justifie de lui donner le nom de cette ville, sans nous autoriser à croire qu'il y fût né. Il est tout aussi possible qu'il ait fait partie de ces hommes de science que Ptolémée y attira lors de la fondation du Musée et de la Bibliothèque.

Quelques anecdotes nous sont parvenues à son sujet. Selon Proclus, « un jour Ptolémée lui demanda s'il y avait pour la Géométrie un chemin plus court que [de suivre] l'ordre des *Eléments* : et lui de répondre

8. La confusion est fréquente au Moyen Age et au XVIe siècle. Elle avait pris naissance, semble-t-il, d'un texte erroné de Valère Maxime (VIII, 12), auteur prisé à l'époque, parlant d'un géomètre contemporain de Platon sous le nom d'Euclide, mis sans doute pour Eudoxe. On sait assez la médiocrité de Valère Maxime et l'absence de valeur scientifique de son livre.
9. Diogène Laërce, II, 106.
10. Nom de reines ou princesses de la dynastie des Lagides, entre autres de la sœur de Ptolémée I.
11. *Papp.* II, 678, 10-12.

qu'il n'y a pas, vers la Géométrie, de voie directe réservée aux rois »[12]. Proclus voit dans ce récit un indice pour la datation d'Euclide bien qu'il ne soit pas précisé de quel Ptolémée il s'agit. D'autre part la même histoire est rapportée d'Alexandre et de Ménechme[13]. Un autre trait se trouve dans Stobée : un débutant qui venait d'apprendre le premier théorème lui demanda quel profit il allait retirer de cette étude; sur quoi Euclide, appelant un esclave : « donne-lui trois oboles — fit-il — puisqu'aussi bien il lui faut tirer un bénéfice de ce qu'il apprend ! »[14]. Là encore une idée parallèle nous est transmise par Proclus lui-même à propos des Pythagoriciens, lesquels « étaient coutumiers de la sentence symbolique suivante : une figure et un degré, mais non pas une figure et une triobole », chaque théorème étant considéré comme un degré gravi dans la connaissance[15]. Ainsi il n'y a dans tout cela que les traces d'un fonds de lieux communs touchant la Géométrie, ce qui ne nous apprend rien de particulier sur Euclide.

Plus importante en revanche est l'affirmation de Proclus que, quant à ses principes, il était platonicien et adepte de cette philosophie[16]. Notre commentateur y voit la raison pour laquelle les *Eléments* se terminent par la construction des cinq figures dites « platoniciennes », les polyèdres réguliers, qui font partie de la cosmologie du *Timée*. Il a été contesté que cette construction ait été le but final de l'auteur des *Eléments*[17] et ait commandé leur organisation et leur développement. Mais la vue opposée ne manque pas de partisans, et il est au demeurant possible aussi que sur ce point Euclide se soit simplement conformé à la tradition de ceux des *Eléments* antérieurs qui furent rédigés par des Académiciens. Cela suffit-il pour faire de lui un platonicien de doctrine? Il faut considérer que Proclus, dans son résumé de l'histoire de la Géométrie, donne à Platon un rôle prééminent et, à partir de lui, ne cite que des géomètres qu'il rattache d'une manière ou d'une autre à son influence ou à l'Académie. Platonicien lui-même et

12. *Pr.*, 68, 15; l'expression stéréotypée est : « voie royale ».
13. Stobée, *Ecl.* II, 31, 114 (Wachsmuth, II, 228, 30). Selon ce texte, Ménechme aurait répondu à Alexandre, qui lui demandait un enseignement concis de la Géométrie, que, s'il y avait dans l'empire des routes royales et d'autres pour le commun des mortels, « en Géométrie il n'y en avait qu'une pour tout le monde. »
14. Stobée, *ibid.* (Wachsmuth, II, 228, 25-29).
15. *Pr.*, 84, 16-17.
16. *Pr.*, 68, 20-21.
17. *TBE* I, 2; Thomas (Ivor), *Greek Mathematical Works*, I, « The Loeb Classical Library », Cambridge, Mass./London, 1980, p. 156, n. b.

voyant dans Euclide l'aboutissement de cette tradition de géomètres, il lui faut faire de lui un adepte de l'Ecole. En réalité la décision sur ce point ne peut venir que de l'examen des textes, et plus exactement de l'analyse des principes sur lesquels s'appuient les *Eléments*. La question est celle-ci : l'organisation interne de ces principes est-elle conforme à l'enseignement de Platon ou tient-elle compte des critiques d'Aristote? Nous verrons que la seconde hypothèse semble préférable[18]. Il y a tout lieu de penser qu'Euclide connaissait bien la doctrine d'Aristote sur les principes des sciences. Il n'est pas impossible qu'il ait fréquenté les Ecoles d'Athènes avant de venir à Alexandrie. En tout cas l'affirmation de Proclus sur son platonisme ne peut être admise sans corrections, à moins d'admettre aussi qu'il englobe l'enseignement d'Aristote dans la tradition académique.

En dehors de Proclus, nous trouvons encore dans Pappus quelques lignes sur Euclide. A propos d'une critique adressée par Apollonius à une étude de lieu géométrique figurant dans les *Coniques* d'Euclide et laissée incomplète, Pappus fait remarquer que personne ne pouvait rien ajouter au traitement donné à la question par Euclide sur la base de ce qui était démontré à l'époque. Ce sont précisément les travaux ultérieurs d'Apollonius qui l'ont permis. En ce point Pappus[19] prend la défense d'Euclide : celui-ci n'aurait pas voulu porter ombrage à la renommée d'un autre mathématicien, Aristée, spécialiste des coniques et des « lieux solides »[20], en allant au-delà de ses résultats; ses scrupules, sa bienveillance à l'égard de ses collègues, sa réserve et sa modestie, en même temps que son goût de la précision, le conduisirent à s'en tenir à ce qui était possible au moyen des résultats d'Aristée, sans prétendre avoir dit le dernier mot de la question; il n'encourt donc aucun blâme, puisqu'au surplus il a mis Apollonius, son élève, en mesure de le compléter et d'achever la théorie. Que penser de ce plaidoyer, sinon qu'il est sans doute le fait d'un esprit bien intentionné, mais que, quelque peu surabondant, voire maladroit, il paraît plutôt une interprétation du comportement supposé d'Euclide qu'un témoignage véritable? Et Hultsch a probablement eu raison de le croire interpolé.

18. Cf. *infra* ch. IV, § XII et XIII.
19. Ou, selon Hultsch, un glossateur inconnu; cf. *Papp.* II, 672, 18 - 678, 24, (spécialement 676, 25 - 678, 6).
20. Cf. *infra* ch. I, § II, 7.

Pour être complet, il convient de mentionner l'existence dans les textes arabes d'une version insolite du rôle d'Euclide : d'après eux, il aurait effectué à la demande d'un roi d'Egypte, une révision, condensée en treize Livres, d'un ouvrage originellement en quinze Livres, écrit par un certain Apollonius, menuisier de son état. Il existe d'ailleurs des variantes de cette version. Il est possible d'en assigner l'origine dans une mauvaise interprétation de la Préface d'Hypsiclès au « Livre XIV », ainsi que l'a montré Heath d'une façon convaincante.

II. Le corpus euclidien

Sous le nom d'Euclide nous sont parvenus d'autres ouvrages que les *Eléments*, et nous savons que d'autres encore ont été perdus. Euclide apparaît ainsi comme un moment capital dans l'histoire des mathématiques, d'une part parce qu'il se situe chronologiquement au milieu d'une période d'intense activité scientifique, avant lui dans l'Académie de Platon et le Lycée d'Aristote, après lui avec Archimède et Apollonius, d'autre part parce que son œuvre consiste essentiellement dans une systématisation de l'acquis qui défiera les siècles. Avant de présenter les différents traités qui la composent, et dont nous ignorons l'ordre de rédaction, il est temps de dire quelques mots des *Eléments* eux-mêmes, auxquels sera consacré le reste de la présente *Introduction*.

1. *Les Eléments* (στοιχεῖα, στοιχείωσις)

Contrairement à une croyance assez répandue, il ne s'agit pas seulement d'Eléments de Géométrie, sinon dans le sens où, pendant de longs siècles, « géométrie » a pu être synonyme de « mathématiques ». Comme on le verra, certains procédés employés dans le traité sont pour quelque chose dans cette assimilation.

Ce qui, de tradition, appartient en propre à Euclide se présente sous la forme de treize Livres dont il importe de se représenter dès maintenant les grandes lignes.

Les quatre premiers Livres sont consacrés à la Géométrie plane, traitée sans faire usage du concept de proportion. Leur traduction en français occupera le premier volume du présent ouvrage.

Le Livre V contient la théorie des proportions entre les grandeurs, et le Livre VI applique cette théorie à la Géométrie plane.

Les Livres VII, VIII, IX contiennent ce qu'on peut considérer comme éléments de la théorie des nombres. Il faut préciser à ce sujet que le mot « nombre » (ἀριθμός) désigne en grec les entiers naturels positifs égaux ou supérieurs à 2, à l'exclusion de toute autre entité que nous modernes désignerions par ce terme. 1 est appelé « l'unité » et n'est pas un « nombre ». Il n'y a pas de concept de zéro, de nombre négatif, de nombre rationnel, ni de nombre irrationnel, quoi que l'on puisse lire d'approximatif à ce sujet ici ou là. En revanche, les Livres susdits présentent la théorie des rapports entre nombres entiers, ainsi que des proportions entre ces mêmes nombres, qui conduit à celle des puissances d'entiers, et des rapports de ces puissances entre elles. Ces trois Livres sont aussi connus sous le nom de « Livres Arithmétiques ».

Le Livre X est entièrement consacré à l'étude des lignes droites commensurables ou incommensurables entre elles, et d'un sous-ensemble de ces dernières, dont les éléments sont désignés spécialement par Euclide comme lignes « irrationnelles », ainsi qu'aux aires rectilignes rectangulaires ou carrées qui leur correspondent. Ce Livre présuppose les acquis de la Géométrie plane, de la théorie des proportions, et des Livres arithmétiques.

Le Livre XI présente la généralisation à la troisième dimension de la Géométrie des Livres I et VI, et par conséquent les propriétés des solides élémentaires, partie de ce que les Grecs nomment « stéréométrie ».

Le Livre XII présente les résultats concernant la mesure du cercle, de la pyramide, du cône et de la sphère, qui ne peuvent être acquis que par une méthode spéciale, légitimée aux Livres V et X, qu'on peut regarder comme une première forme d'intégration dans l'histoire des mathématiques, la méthode dite « d'exhaustion », désignation relativement impropre qui lui fut donnée à la Renaissance.

Le Livre XIII est consacré à la construction des cinq polyèdres réguliers dans la sphère, ce qui suppose notamment des résultats du Livre X.

On voit par là, sommairement, quel enchaînement lie entre eux les treize Livres, et dans quelle mesure Proclus pouvait être justifié à dire que la fin de tout l'ouvrage était la construction des cinq corps platoniciens.

L'unité des *Eléments* a été mise en question, quant au style mathématique notamment, en raison de certaines disparités qui apparaissent ici ou là. On a pu se demander à ce sujet si le mathématicien Euclide

n'était pas à la tête d'un groupe travaillant sous sa direction, et dont les membres auraient pu achever l'œuvre, même après sa mort, mais sous son nom, — ou même si « Euclide » n'était pas un nom collectif, choisi librement par un tel groupe, mais ce serait là une pratique à vrai dire fort étrangère à la mentalité de l'époque[21]. Une telle question relève plus de l'analyse épistémologique des *Eléments* et de leurs antécédents historiques, que de l'inventaire de la tradition des Grecs à leur sujet, qui ne dit rien de tel. Le plus vraisemblable est que des rédactions antérieures de certains groupes de théorèmes aient été respectées par Euclide, précisément parce que leurs différences ne relevaient que de questions de style.

2. *Les « Livres XIV et XV »*

Une partie de la tradition manuscrite fait suivre le Livre XIII de deux autres.

Le « Livre XIV » est l'œuvre d'Hypsiclès, dont la Préface présente un intérêt historique. Hypsiclès est un astronome de renom, postérieur à Apollonius. Le « Livre XIV » reprend notamment des résultats déjà obtenus, probablement par ce dernier, portant sur le rapport des surfaces entre elles, et des volumes entre eux, du dodécaèdre et de l'icosaèdre dans une même sphère.

Le « Livre XV », très nettement inférieur, étudie encore d'autres relations concernant les polyèdres réguliers, notamment la possibilité d'en inscrire certains dans d'autres, le nombre des arêtes et des angles solides, la détermination des angles dièdres entre les faces. L'auteur de cette troisième partie en attribue la paternité à « son grand maître Isidore ». S'il s'agit d'Isidore de Milet, l'architecte de Sainte-Sophie de Constantinople (*ca.* 532 de l'ère chrétienne), le « Livre XV » n'aurait donc été achevé qu'au VIᵉ siècle[22].

L'existence de ces deux Livres a pu renforcer le soupçon, évoqué ci-dessus, que, même pour les treize premiers Livres, l'auteur n'est peut-être pas unique. Ils montrent d'autre part que, dans la tradition antique, d'Apollonius à Byzance, prolonger les *Eléments* d'Euclide ne pouvait signifier que perfectionner la théorie des polyèdres. Il existe en effet d'autres compléments, par exemple le traité d'Apollonius sur les

21. Cf. par ex. Itard (Jean), *Les Livres arithmétiques d'Euclide*, « Histoire de la pensée », Paris, Hermann, 1961, 11-12.

22. Cf. *HGM* I, 419-421.

« lignes irrationnelles non-ordonnées » développant le Livre X[23], qui n'ont pourtant pas été inclus dans la numérotation des Livres des *Eléments*. Dernière remarque enfin, l'écart chronologique entre le « Livre XIV » et le « Livre XV » porte témoignage de l'essoufflement de la mathématique grecque sur la question des polyèdres.

Les autres traités du Corpus euclidien peuvent se diviser en deux groupes : ceux qui traitaient de Géométrie proprement dite, ceux qui traitaient de Mathématiques au sens large des Grecs; dans chaque groupe certains sont perdus. Nous suivrons ce classement.

3. *Les Données* (δεδομένα)

Ce recueil contient des propositions démontrées énonçant que dans une figure, si certains éléments sont donnés (de grandeur, d'espèce, de position, ou de plusieurs de ces points de vue à la fois), d'autres éléments ou relations sont alors aussi donnés, de tel ou tel point de vue, c'est-à-dire peuvent être déterminés. Le domaine couvert est celui de la Géométrie plane élémentaire. Cependant la forme de ces propositions est telle qu'elles peuvent être utilisées dans une recherche de type analytique et considérées comme des exercices élémentaires d'analyse. Une collection systématique de telles propositions ne peut qu'aider et abréger la procédure d'un raisonnement de ce type. Aussi voit-on Pappus faire figurer *Les Données* au nombre des ouvrages constituant le « trésor de l'analyse »[24]. C'est en fait un livre d'introduction et d'entraînement à cette méthode en vue d'un usage supérieur.

Dans le commentaire mathématique des propositions des *Eléments* qu'on trouvera ci-après, comparaison sera faite, le cas échéant, avec les propositions concernées des *Données*[25].

23. Cf. *HGM* II, 193.

24. *Papp.* II, 636-638. Il y a quelques différences entre la description de Pappus et notre texte, touchant l'ordre et la numérotation des Propositions. Sur l'analyse, v. *infra* ch. IV, § XVI.

25. L'ouvrage nous est parvenu en grec : v. *EHM*, vol. VI, avec le Commentaire de Marinus; une version latine médiévale a été récemment éditée : Ito (Shuntaro), *The Medieval Latin translation of the Data of Euclid*, Boston/Basel/Stuttgart, The University of Tokyo Press/Birkhaüser, 1980. Pour chacune des œuvres d'Euclide, on consultera avec profit, en ce qui concerne l'histoire du texte et les éditions, Murdoch J. E., art. « Euclid » in *DSB* IV, 425-435, et pour la bibl. Bulmer-Thomas I., *ibid.* 435 sq.

4. *Sur les Divisions* [des figures] (περὶ διαιρέσεων)

Ce traité est perdu en grec et l'histoire du texte est compliquée. Bornons-nous à dire ici qu'il apparaît dans une version latine en 1563 et qu'une version arabe, découverte à Paris, fut publiée en 1851 par Woepcke[26]. La comparaison avec ce qu'en avait dit Proclus[27] plaide en faveur de l'authentification. Quatre propositions seulement sur trente-six sont accompagnées de leurs démonstrations, mais celles-ci renvoient bien à des propositions des *Eléments*.

Les problèmes de ce recueil consistent à partager une figure donnée au moyen d'une ou plusieurs lignes droites assujetties à diverses contraintes, de telle manière que les aires obtenues satisfassent des rapports donnés. Par exemple : découper un tiers d'un triangle donné au moyen d'une droite passant par un point intérieur donné.

L'existence de cet ouvrage montre que la Géométrie grecque classique n'était pas indifférente, contrairement à ce que peut laisser croire la lecture des seuls *Eléments*, à d'autres traditions, notamment l'application à la Géométrie de problématiques calculatoires qu'on rencontre régulièrement en Orient. D'ailleurs le prototype des problèmes ici traités se trouve, sur des cas limités, dans des textes babyloniens, où l'on cherche par exemple à partager des trapèzes ou des triangles au moyen de parallèles aux bases[28]. Cependant, si la problématique est comparable, la méthodologie diffère, le traité grec procédant à la solution par les voies de la Géométrie, là où, par exemple, nous obtiendrions une équation du second degré, dont les Babyloniens, de leur côté, n'ont qu'une approche purement numérique.

5. *Les arguments fallacieux* (ψευδάρια)

Avec ce livre commence la liste des œuvres qui ne nous sont pas parvenues. Proclus en donne une présentation en rappelant d'abord que des conséquences erronées peuvent apparaître faussement comme découlant de principes scientifiques et abuser les esprits superficiels : « [Euclide] nous a transmis des méthodes de nature à faire comprendre

26. *Journal Asiatique*, 1851, 233 sq. ; pour la discussion sur l'histoire du texte, v. *TBE* I, 8-9 et *HGM* I, 425-426.
27. *Pr.*, 69, 4 et 144, 22-26.
28. Cf. Vogel K., *Vorgriechische Mathematik*, t. II, « Mathematische Studienhefte », Hannover/Paderborn, 1959, et Caveing M., La tablette babylonienne AO 17264 du Musée du Louvre et le problème des six frères, *Historia Mathematica*, 12, Academic Press, 1985, 6-24.

avec discernement ces difficultés, dont la possession nous permettra d'exercer les débutants en mathématiques à découvrir les paralogismes et à demeurer inaccessibles à la tromperie. Il a donc donné à l'ouvrage par lequel il nous met en mains tout cet équipement le titre *Les arguments fallacieux* : il y énumère dans l'ordre leurs divers genres, il exerce notre intelligence dans chaque cas par des théorèmes variés, il met le vrai en face du faux, et adapte à la ruse la réfutation de la tromperie. Ce livre est donc propre à purifier et à exercer l'esprit, tandis que l'*Ordre des Éléments* constitue le guide complet et irréfutable de la théorie scientifique des questions de Géométrie prise en elle-même »[29].

Il semble ressortir de cette présentation que cet ouvrage empruntait sa matière à la Géométrie élémentaire.

6. *Les Porismes* (πορίσματα)

Avec les trois Livres des *Porismes*, nous abordons cette partie de l'œuvre d'Euclide qui n'appartient plus à la sphère de la Géométrie « élémentaire » et dont la disparition est d'autant plus déplorable. Le mot lui-même n'est pas pris ici dans l'acception courante que l'on trouvera dans les *Éléments*[30].

L'ouvrage est documenté par deux passages de Proclus et une longue notice de Pappus dans son « trésor de l'analyse »[31], mais la nature exacte d'un « porisme » ne ressort pas immédiatement de ces textes. Robert Simson en a donné une définition, citée par Michel Chasles, dont voici une traduction : « Un porisme est une Proposition dans laquelle on demande de démontrer qu'une ou plusieurs choses sont données, à propos desquelles, ainsi que de l'une quelconque d'une infinité de choses non certes données, mais qui ont la même « raison » avec celles qui sont données, il faut montrer qu'elles possèdent une cer-

29. *Pr.*, 70, 5-18 ; *Ordre des Eléments* traduit στοιχείωσις. Mention de « Pseudographemata » d'Euclide est faite dans le Commentaire aux *Réfutations sophistiques* d'Aristote (Fol° 25v, Wallies, 76, 23), attribué à Alexandre d'Aphrodisée, ou parfois à Michel d'Ephèse : le texte précise bien qu'il s'agit de l'étude de paralogismes dérivés des principes reconnus propres à une science.
30. Cf. *infra* ch. IV, § XV.
31. *Pr.*, 212, 12-17 et 301, 2 - 304, 10 ; Proclus expose la différence des deux acceptions du mot et se réfère à l'ouvrage d'Euclide ; *Papp.* II, 648, 18 - 660, 16 et *EHM* VIII, 238, 10 - 243, 5.

taine propriété commune décrite dans la Proposition »[32]. Cette définition donne, semble-t-il, un sens à l'affirmation de Proclus et de Pappus qu'un porisme n'est ni un théorème ni un problème, quoique participant de l'un et de l'autre[33]. Il s'agirait en effet de prouver la possibilité de trouver une certaine chose possédant une certaine propriété, mais sans la construire : il y aurait donc preuve comme dans un théorème, portant toutefois sur la détermination d'une chose à trouver, ce qui rappelle un problème.

Quoi qu'il en soit de ces distinctions formelles, il importe de souligner l'intérêt mathématique des *Porismes*, traité qui, selon Pappus, comprait 171 propositions, 38 lemmes, et distinguait 29 espèces de porismes. Un passage de Pappus considéré comme une glose par Heiberg indique qu'une classe importante de porismes concerne les lieux géométriques, et qu'en ce cas un porisme est un théorème local incomplet quant à ses hypothèses. Le problème de l'interprétation mathématique de l'ouvrage d'Euclide a conduit les mathématiciens modernes à plusieurs tentatives de reconstitution[34], à partir notamment des exemples fournis par Pappus. Certains historiens d'autre part ont vu dans le traité un recueil de propositions préparatoires à l'étude des coniques[35].

Chasles a pu conjecturer qu'il contenait des propositions appartenant à la théorie moderne des transversales et à la Géométrie projective. Rappelons que c'est au cours de sa tentative de reconstitution qu'il fut conduit à l'idée de rapport anharmonique[36].

7. *Les Coniques* (κωνικαὶ τομαί ou κωνικὰ στοιχεῖα)

L'existence de quatre Livres d'Euclide sur les sections coniques est attestée directement par Pappus et indirectement par Apollonius et Eutocius[37]. Pappus déclare qu'Apollonius compléta les quatre Livres des *Coniques* d'Euclide et en ajouta quatre autres. Il précise que nul

32. Cf. Roberti Simson, *Opera quaedam reliqua*, 1776, 315-594 et Michel Chasles, *Les trois Livres des Porismes d'Euclide rétablis*, Paris, Mallet-Bachelier, 1860, p. 27.
33. Sur la distinction des théorèmes et des problèmes, cf. *infra* ch. IV, § XIV.
34. Un aperçu de l'histoire de ces tentatives se trouve dans *HGM* I, 435-437.
35. Zeuthen H. G., *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum*, Copenhague, Fischer-Benzon, 1886, 168 et 173-174.
36. V. *TBE* I, 15 et *HGM* I, 436.
37 *Papp.* II, 672 ; *Apoll.* I, 3 et II, 168, 5 - 170, 26.

n'aurait pu ajouter quoi que ce soit à l'ouvrage d'Euclide sur la base des seules propriétés démontrées en son temps ; c'est dans la suite de ce texte qu'il évoque l'attitude d'Euclide à l'égard d'Aristée dont nous avons parlé ci-dessus[38]. Il semble ressortir du témoignage de Pappus que, si Aristée avait développé la théorie de façon originale, Euclide avait mis en forme tout ce qui était acquis à l'époque et que ses *Coniques* constituaient un ouvrage de référence et le restèrent jusqu'à la parution de celui d'Apollonius.

Celui-ci, parlant de son œuvre, indique que les quatre premiers des huit Livres forment une introduction élémentaire, et c'est en détaillant leur contenu qu'il évoque un théorème de lieu géométrique dont Euclide, dit-il, n'avait pas réussi la synthèse. On voit par là qu'en exposant les résultats nouveaux de son travail, il garde à l'esprit l'ouvrage d'Euclide dont il est parti et par rapport auquel il se situe.

Enfin Eutocius réfute un biographe d'Archimède qui attribuait à celui-ci — qui ne l'aurait pas publié — l'essentiel de ce qui se trouve chez Apollonius. Eutocius note qu'en plusieurs occasions Archimède se réfère à des *Éléments pour les Coniques* comme à un traité plus ancien, et qu'Apollonius d'autre part ne s'est pas approprié le bien d'autrui pour s'en proclamer l'auteur, puisqu'il dit lui-même s'être proposé l'approfondissement et la généralisation de ce qui avait été fait par d'autres dans des ouvrages publiés[39].

C'est un fait qu'Archimède utilise à plusieurs reprises des propositions qu'il ne démontre pas, en renvoyant pour la preuve à un ouvrage qu'il appelle *Les Coniques* ou *Éléments pour les Coniques*. Il ne mentionne pas Euclide, comme si des *Éléments* ne pouvaient être que de lui. Il parait d'ailleurs impossible qu'Archimède se réfère à des ouvrages non publiés et par là non disponibles pour ses correspondants. La convergence des témoignages entre eux sur cette attribution à Euclide renforce l'interprétation. Aussi peut-on légitimement, à partir des premiers Livres d'Apollonius et des références d'Archimède, dresser avec vraisemblance une liste de propositions qui devaient figurer dans les *Coniques* d'Euclide[40].

38. Cf. *supra* ch. I, § I.
39. Eutocius se réfère ici à ce que dit Apollonius à l'occasion du contenu du Livre I.
40. Cela a été fait par Heath, v. *HGM* II, 121-126 (v. aussi *ibid.* 119-121).

8. *Les Lieux rapportés à la surface* (τόποι πρὸς ἐπιφανεία)

Il résulte des distinctions de Proclus que le lieu d'un objet géométrique jouissant de telle propriété donnée peut être défini par une ou plusieurs lignes « planes », comme des droites, ou une ou plusieurs lignes « solides », comme des coniques, sections d'un solide, mais qu'il y a d'autres lieux qui sont définis par des surfaces[41]. En l'absence de précisions, on peut supposer que ces derniers sont soit des lieux de points, auquel cas il s'agit de lignes tracées sur une surface, mais autres que celles des deux classes précédentes, soit des lieux de lignes, correspondant à une surface entière[42].

C'est dans le « trésor de l'analyse », déjà cité, de Pappus, qu'il est fait mention des deux Livres d'Euclide sur *Les Lieux rapportés à la surface*. On est réduit, en ce qui concerne leur contenu, à des conjectures fondées sur deux lemmes donnés par Pappus comme étant indispensables à leurs démonstrations[43]. Il est donc possible que les lieux étudiés par Euclide aient été, entre autres choses, d'une part des surfaces cylindriques, coniques ou sphériques, d'autre part des surfaces de ce qu'Archimède nomme « conoïdes » ou « sphéroïdes »[44], soit en général des surfaces de révolution.

Avec cet ouvrage se termine la liste des traités proprement géométriques.

9. *Les Phénomènes* (φαινόμενα)

Ouvrages appartenant au corpus dénommé classiquement « la petite astronomie », les traités des « phénomènes » se proposaient la description de ce qui est visible de la sphère céleste en mouvement, à l'exclusion des mouvements « planétaires », c'est-à-dire les levers et couchers des astres ; ils supposent une connaissance de la géométrie de la sphère. Celui d'Euclide s'appuyait sur le livre plus ancien d'Autolycos de Pitane et sur un manuel élémentaire de géométrie sphérique.

41. *Pr.*, 394, 16 - 395, 12. Proclus indique que la portion de plan contenue entre deux parallèles du plan est le lieu des parallélogrammes égaux ayant une même base et qu'il s'agit d'un lieu plan rapporté à des lignes (les parallèles).

42. Confirmation du premier cas dans *Papp.* II, 662, 9. Il pourrait aussi s'agir de lieux d'objets autres situés par exemple entre des surfaces (cf. par analogie la note précédente).

43. *Papp.* II, 1004, 16 - 1010, 15, et *EHM* VIII, 274, 18 - 278, 15.

44. Il s'agit de paraboloïdes ou d'hyperboloïdes de révolution, et d'ellipsoïdes de révolution.

Ayant survécu en grec, il est disponible dans l'édition de Heiberg et Menge[45].

10. *L'Optique* (ὀπτικά)

Sous ce nom, il s'agit en fait ici d'un traité de perspective qui, partant de l'hypothèse de l'existence de rayons visuels rectilignes, cherche principalement à déterminer la partie que nous voyons effectivement d'un objet distant donné. Il est rangé par Pappus dans la « petite astronomie » et permet en effet de réfuter la thèse épicurienne que la grandeur apparente des corps célestes est leur grandeur réelle[46].

11. *La section du Canon* (κατατομὴ κανόνος)

Ce petit traité contient la théorie arithmétique des intervalles musicaux, dans l'esprit où la conçoit la tradition pythagoricienne. Sa place exacte dans le Corpus euclidien est controversée. Proclus en effet attribue à Euclide des *Éléments de Musique*[47] qui semblent avoir dû revêtir une plus grande ampleur pour mériter ce titre. Le texte que nous possédons en est-il un fragment ou un sous-produit ? Menge avance l'opinion qu'il s'agit d'un extrait remanié de la main d'un membre de l'École euclidienne. Un autre ouvrage attribué à Euclide dans les manuscrits des *Musici Scriptores Graeci*[48], l'*Introduction harmonique* (εἰσαγωγὴ ἁρμονική) est d'un disciple d'Aristoxène, Cléonide[49].

Il y a lieu toutefois de noter que *Les Phénomènes, L'Optique* et *La section du Canon* se présentent tous trois sous la forme euclidienne classique, telle qu'elle règne dans *Les Éléments*.

12. *Fragments de Mécanique attribués à Euclide*

Un traité en latin « De levi et ponderoso » provenant vraisemblablement d'une version arabe d'un texte grec semble cité, par le même intitulé, dans une liste arabe d'ouvrages d'Euclide : il contient, selon

45. *EHM* VIII, 2-156.

46. Texte grec dans *EHM*, VII. La *Catoptrique*, qui figure dans le même volume, compilation plus tardive, n'est pas authentique. V. aussi Simon G., *Le regard, l'être et l'apparence dans l'Optique de l'Antiquité*, Paris, Le Seuil, 1988.

47. *Pr.*, 69, 3. Marinus fait de même (*Commentaire aux Données*, *EHM* VI, 254, 19).

48. Ed. Jan, 1895.

49. Les deux traités sont édités in *EHM* VIII, 157-183 et 185-223.

Duhem, l'exposé le plus précis de la dynamique aristotélicienne des corps se mouvant librement.

Un traité en arabe intitulé « Le livre d'Euclide sur la balance », qui semble remonter à un original grec, cherche à établir une théorie du levier indépendante de la dynamique d'Aristote, par des moyens géométriques à la manière euclidienne.

Un fragment se référant au « Liber Euclidis de ponderibus secundum terminorum circumferentiam », découvert par Duhem, contient quatre propositions sur les cercles décrits par les extrémités du bras de levier.

Duhem pensait que ces trois fragments étaient, dans une certaine mesure, complémentaires et pouvaient être les débris d'un seul ouvrage, d'Euclide ou d'un autre auteur. Murdoch pense qu'Euclide a pu en être la source.

C'est un fait qu'aucun témoignage indépendant ne permet de penser qu'Euclide ait jamais écrit dans le domaine de la Mécanique. Mais, d'un autre côté, l'existence des ouvrages non strictement « géométriques » que nous venons de passer en revue, peut incliner à croire qu'il ait aussi touché à ce domaine[50].

III. LA TRADITION DES COMMENTATEURS GRECS

A la différence des *Eléments* qui l'avaient précédé et dont il sera discuté dans le Chapitre III ci-après, l'ouvrage d'Euclide fut considéré comme définitif. Il remplaça et fit tomber dans l'oubli ses prédécesseurs et n'eut pas de successeur. Signe de son succès, il fut en revanche

50. La liste que donne Proclus des œuvres d'Euclide autres que les *Eléments* (68, 23-70, 18) ne prétend pas à l'exhaustivité, puisqu'il cite ailleurs des traités qui n'y figurent pas, comme *Les arguments fallacieux*, *Les Porismes*, *Les lieux rapportés à la surface* ; en revanche, il fait figurer la *Catoptrique* et l'ensemble des *Eléments de Musique*. Du côté arabe, le *Kitāb al-Fihrist* (« la liste des sciences »), dû à Ibn an-Nadīm (*fl. ca.* 980) (trad. Suter H., Das Mathematiker-Verzeichniss im Fihrist, *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik*, VI, 1892, 1-87 ; *rééd.* Le Caire, 1969) cite *Les Phénomènes*, *Les Données*, un livre de musique qu'il déclare inauthentique, le livre *Sur les divisions des figures*, un livre *Sur les Utilisations* (S'agit-il des *Porismes* ?) considéré aussi comme inauthentique, la *Division du Canon*, le livre *Sur le lourd et le léger*, enfin deux livres considérés comme inauthentiques, l'un *Sur la synthèse*, l'autre *Sur l'analyse* ; le plus surprenant est ici l'absence de l'*Optique*, car les *Coniques* et *Les lieux rapportés à la surface* furent très tôt supplantés par les œuvres d'Apollonius et d'Archimède.

l'objet de nombreux commentaires, dont la plupart ne nous sont pas parvenus, mais dont l'un des derniers, celui de Proclus, constitue l'une des sources les plus importantes pour la connaissance de la mathématique grecque et la compréhension des *Eléments*. Nous lui consacrerons spécialement la section suivante du présent chapitre.

Proclus lui-même fait allusion aux commentateurs qui l'ont précédé, leur reprochant leur prolixité sur des détails, distinctions de cas de figure, énoncés de lemmes, etc..., leur confusion et leur style diffus[51], alors que la réflexion théorique sur les méthodes de preuve et les causes des propriétés démontrées devrait être le véritable objet d'un Commentaire. Il ne donne toutefois aucun nom dans le contexte de cette critique, concédant seulement qu'il est possible de trouver chez certains d'entre eux des remarques intéressantes. On peut souhaiter que les plus importants de ces commentateurs aient été ceux dont nous sont parvenus quelques échos.

1. *Héron d'Alexandrie*

La date de Héron, « le mécanicien », est controversée[52]. Proclus cite Héron à six reprises[53]. A la première il l'évoque à propos de la Mécanique, dans les cinq autres à propos des *Eléments*[54], mais en précisant deux fois qu'il s'agit du « mécanicien » ; d'autre part, deux autres de ces cinq occurrences se réfèrent, non pas à Héron purement et simplement, mais une fois aux « disciples de Héron et de Porphyre » (323,7) et une fois aux « disciples de Héron et de Pappus » (429,13). Cela pourrait suggérer une continuité dans le Commentaire, passant de Héron à Porphyre, puis à Pappus.

51. *Pr.*, 84, 8-23 ; 200, 6-18 ; 432, 15-19. En 289, 11-14 et 328, 15-16, se trouvent deux autres allusions critiques aux « commentateurs ».

52. Nous n'avons pas à traiter ici cette question. Les éléments de la discussion classique sont dans *HGM* II, 298-306 ; mais Neugebauer O., Über eine Methode zur Distanzbestimmung Alexandria-Rom bei Heron, *Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab. Historisk-filologiske Meddelelser*, 26/2 (1938), 26/7 (1939) et Drachmann A. G., Heron and Ptolemaios, *Centaurus*, I/2, 1950, 117-131, ont apporté des données nouvelles, d'après lesquelles l'œuvre de Héron ne serait pas antérieure à 62 de l'ère chrétienne ni postérieure à celle de C. Ptolémée (*ca.* 150).

53. *Pr.*, 41, 10 ; 196, 16 ; 305, 24 ; 323, 7 ; 346, 13 ; 429, 13.

54. Voici, dans l'ordre, ces cinq occasions de citer Héron : réduction du nombre des axiomes à trois ; — citation d'une critique faite à l'énoncé de I, 16 ; — autre preuve de I, 20 ; — autre preuve de I, 25, évitant la réduction à l'absurde ; — additions faites à I, 47 (*v. ad loc.*).

Quoi qu'il en soit, nous avons d'autres témoignages. Le *Kitāb al-Fihrist* indique que Héron écrivit un Commentaire aux *Eléments*, afin d'en expliquer les points obscurs[55]. Quant au Commentaire d'an-Nayrīzī (Anaritius)[56], il constitue la principale source : il cite en effet Héron nommément (Yrinus), transcrivant directement des extraits souvent étendus ou indiquant, dans d'autres cas, que Héron ne dit rien de telle ou celle proposition. Il ressort du texte d'an-Nayrīzī que le travail de Héron s'étendait au moins sur les huit premiers Livres des *Eléments*, les quatre premiers étant les plus abondamment pourvus de citations de l'Alexandrin ; curieusement l'auteur arabe ne cite rien se rapportant au Livre V qu'il commente lui-même ; ensuite il ne fait intervenir Héron que pour une proposition du Livre VI, deux du Livre VII, deux du Livre VIII, ces Livres étant d'ailleurs beaucoup moins abondamment commentés que les quatre premiers ; enfin pour les Livres IX et X, on ne trouve aucune référence à Héron, alors que le commentaire du Livre X, qui clôt le texte de an-Nayrīzī, est très étendu. L'ouvrage d'an-Nayrīzī et celui de Proclus se complètent : il arrive en effet qu'en plusieurs occasions une observation faite par l'un sans mention de la source est donnée par l'autre comme étant de Héron, et vice-versa. Au total le nombre des commentaires de Héron qui nous sont ainsi parvenus paraît assez élevé pour que nous puissions nous former une idée de l'ensemble. Il faut mettre d'abord à part les démonstrations des Propositions 2 à 10 du Livre II, faites sans le secours des figures, par application systématique de la loi de distributivité du produit des côtés d'un rectangle sur l'addition des segments découpés sur l'un d'entre eux, loi établie dans la première Proposition. Pour le reste, les interventions de Héron consistent soit à étudier des cas de figure laissés de côté par Euclide, soit à proposer des démonstrations différentes de nature à éviter une objection possible ou le raisonnement par l'absurde utilisé par Euclide, soit à donner la réciproque (converse) d'un théorème, soit enfin à étendre le champ d'un théorème ou à lui faire certains ajouts. On trouve aussi des remarques générales, comme celle qui porte sur le nombre des axiomes[57].

55. *Op. cit. supra* n. 50 (Suter), p. 16 et 22.
56. Cf. *Anar.*, et *infra* n. 167 et 191.
57. On trouvera les commentaires de Héron à la suite des énoncés concernés. Des références classées se trouvent dans *HGM* II, 310-314. Par des études comparatives, on a pu attribuer à Héron certaines notes figurant dans Proclus sans référence : cf. Van Pesch, *De Procli fontibus*, Lugduni Batavorum, 1900, et *TBE* I, 23.

Du point de vue mathématique, l'apport de Héron n'est pas de première importance. Il est aisé de voir que son travail est orienté par le désir de compléter les *Eléments*, ce qui correspond soit au souci de satisfaire un public qui ne comprend plus très bien les ressorts logiques internes de l'œuvre, soit au souci scolastique de la glose, volontiers « perfectionniste ».

2. *Porphyre*

Le néo-platonicien Porphyre vécut au IIIe siècle (*ca.* 232-304 de l'ère chrétienne).

Proclus se réfère à lui à cinq reprises, deux fois parce qu'il a fait voir, contre-exemples à l'appui, la nécessité de prendre au pied de la lettre, avec toute la précision requise, les énoncés des propositions d'Euclide[58], une troisième, déjà citée, parce qu'il est, de concert avec Héron, à l'origine de preuves alternatives d'un théorème[59], la quatrième pour avoir traité un cas de figure mineur[60] ; la cinquième, fort intéressante, rapporte à Porphyre la distinction des arguments qui procèdent à partir des principes et de ceux qui procèdent par réduction aux principes[61].

Le *Fihrist*, de son côté, le donne comme l'auteur d'un livre sur les *Eléments*[62], mais l'on peut s'interroger sur la nature exacte de cette œuvre. Dans la *Théologie platonicienne*, Proclus mentionne un ouvrage en deux Livres de Porphyre *Sur les Principes*, que cite aussi la *Souda*[63], et d'autre part, dans le Prologue à son Commentaire du Livre I des *Eléments*, après avoir traité des caractères de la pensée mathématique et de sa place dans la connaissance, il déclare ne pas ignorer tout ce que « le philosophe Porphyre » a pu écrire sur la question dans ses *Mélanges*[64], lesquels d'après la *Souda* comptaient sept Livres. Si Por-

58. Il s'agit de I, 14 et de I, 26, in *Pr.*, 297, 1 - 298, 10 et 352, 13-14.
59. Il s'agit de I, 20, in *Pr.*, 323, 7 : des trois preuves données, il n'est pas dit lesquelles reviennent aux « disciples de Héron », lesquelles aux « disciples de Porphyre ».
60. *Pr.*, 315, 11 - 316, 13, comm. à I, 18 ; une situation analogue est traitée par Proclus, en I, 6, quoique sans mention immédiate de Porphyre (256, 15 - 257, 3) ; cf. n. suivante.
61. *Pr.*, 255, 14, comm. à I, 6.
62. *Fihrist*, 9-10 et 45, n. 5 (Suter).
63. Proclus, *Théologie platonicienne*, éd. trad. Saffrey H. D. et Westerink L. G., Paris, Les Belles-Lettres, t. I, 1968, I, 11, p. 27-28 = p. 51, l. 4-5 ; *Souda*, *v. ad loc.*
64. *Pr.*, 56, 24-25.

phyre a écrit sur les mathématiques dans ses *Mélanges*, il est probable que c'est de cet ouvrage que Proclus a tiré ses autres observations, et que le traité *Sur les Principes* portait sur des points de métaphysique. Mais il semble clair, d'après les citations de Proclus, que le plus intéressant de la contribution de Porphyre consistait en remarques sur les formes d'argumentation, la précision des énoncés et la rigueur des preuves. Les préoccupations étaient donc probablement ici encore d'ordre logique plutôt que proprement mathématique, ce qui ne peut surprendre, de la part de l'auteur de l'*Isagoge* et du *Commentaire aux Catégories*.

3. *Pappus*

On sait par une note marginale au manuscrit de Leyde des Tables chronologiques de Théon d'Alexandrie que la production de Pappus se situe au temps de Dioclétien (284-305), c'est-à-dire à la fin de ce IIIe siècle dont la seconde moitié vit fleurir l'œuvre de Porphyre.

L'existence d'un Commentaire de Pappus aux *Eléments* est attestée par diverses autorités : la Préface de Marinus et un scholie aux Définitions des *Données*[65] en parlent, l'une en général, l'autre en référence au Livre X ; Eutocius, dans son commentaire d'Archimède (*De la sphère et du cylindre*, I, 13)[66], mentionne un problème, traité par Pappus dans son Commentaire, qui ne peut que se rapporter au Livre XII[67] ; le *Fihrist* attribue à Pappus un *Commentaire au Livre X* en deux parties[68], dont une version arabe a survécu[69] ; enfin Proclus cite Pappus à quatre reprises à propos du Livre I. Il est difficile dans ces conditions de décider si le Commentaire de Pappus portait ou non sur l'ensemble des *Eléments*. Les commentaires aux Livres X et XII pouvaient faire partie d'un travail qui eût complété Héron, lequel semble s'être arrêté au Livre VIII, comme nous l'avons vu. En ce cas, ce qui porte sur le Livre I aurait constitué un morceau séparé, peut-être antérieur : l'his-

65. *EHM*, respectivement VI, 256 et VI, 262
66. *Arch.* III, 28, 19-22.
67. Le problème est résolu dans le second scholie à XII, 1 ; v. *EHS*, V, 2, 259-260.
68. *Fihrist*, 22 (Suter).
69. Il s'agit du Ms. de Paris, Bibliothèque Nationale, Arabe n° 952, 2, qui contient une traduction, en deux Parties, par Abū 'Uṯmān ad-Dimašqī, d'un Commentaire grec du L. X, identifiable comme celui de Pappus ; cf. *TBE* I, 25, n. 3 et 4 ; v. *Papp. X*.

toire en effet montre combien il était difficile à un même auteur de venir à bout d'un commentaire complet des treize Livres[70].

Les observations de Pappus sur le Livre I portent sur les points suivants : les conditions de vérité de la converse du Post. 4[71] ; — plusieurs énoncés qui devraient figurer parmi les axiomes, ce que Proclus conteste[72] ; — la célèbre démonstration de I,5, qui a été interprétée comme superposition du triangle isoscèle à lui-même par rotation de 180° autour de son axe de symétrie, ce qui impliquerait qu'il quitte le plan de figure et y revient, objet de la critique de Kant[73] ; — des ajouts à I,47, attribués aux « disciples de Héron et de Pappus », déjà cités[74], et pour lesquels nous sommes réduits aux conjectures[75].

La connaissance du reste de l'œuvre de Pappus permet de conjecturer la présence de son inspiration en d'autres endroits : Proclus y évoque les angles curvilignes, la division d'un angle rectiligne selon un rapport donné par utilisation de la spirale d'Archimède, les figures isopérimétriques, certains « paradoxes », et enfin le « triangle à quatre côtés »[76].

Le *Commentaire au Livre X* contient notamment d'importantes notes historiques sur le développement de la théorie des lignes irrationnelles[77]. Il faut enfin garder en mémoire qu'en dehors du *Commentaire*, l'œuvre de Pappus comprend encore d'autres compléments aux *Eléments*, notamment les cinq démonstrations alternatives des Prop. XIII,13, 14, 15, 16, 17 et la généralisation de I,47. De façon générale la contribution de Pappus à la discussion des *Eléments* n'est jamais indifférente. Contestable dans certains cas, elle porte la marque d'un esprit qui ne craint pas d'innover et qui prend ses risques.

Ainsi les trois commentateurs que Proclus a retenus pour en tenir compte dans son propre travail sont assez différents l'un de l'autre. Il

70. V. ce qu'en dit Proclus lui-même : *Pr.*, 432, 9-19.
71. *Pr.*, 189, 12 sq.
72. *Pr.*, 197, 6 sq. et 198, 3 sq.
73. *Pr.*, 249, 20 sq.
74. *Pr.*, 429, 13.
75. Cf. l'extension de I, 47 que donne Pappus : *v. ad loc.*
76. Respectivement : *Pr.*, 333, 12 - 334, 2 *ad* I, 23 ; 381, 6-21 *ad* I, 32 ; 272, 10-14 *ad* I, 9 (cf. *Papp.* I, 286) ; 236, 22 - 237, 18 *ad* I, 4 ; 397, 1 - 398, 17 *ad* I, 35 ; 403-404 *ad* I, 37 (cf. *Papp.* I, 304-350) ; 328, 15-20 *ad* I, 21 (cf. *Papp.* I, 104-130) ; 165, 22 - 166, 13 *ad* Df. I, 24-29 ; 328, 21 - 329, 7 *ad* I, 21 (cf. *Papp.* III, App. 1154-1206).
77. Ce Commentaire sera plus amplement examiné dans la Notice au L. X, *infra*.

faut ajouter deux remarques : Proclus a choisi des auteurs relativement récents, mais comme il n'est guère vraisemblable qu'il n'y en ait pas eu d'autres dans les siècles qui peuvent séparer Euclide de Héron, on peut penser que leur propre travail avait rendu caduque la tradition dont ils héritaient ; d'autre part, si Héron, Porphyre et Pappus ont supplanté leurs prédécesseurs, il semble qu'ils aient été jugés, quant à eux, plus complémentaires que répétitifs[78].

4. *Simplicius*

Proclus n'a pas été le dernier des commentateurs grecs des *Eléments*. Simplicius, qui vécut au VI^e siècle, a écrit, d'après la notice du *Fihrist*, un Commentaire portant sur le début du traité d'Euclide et formant une Introduction à la Géométrie[79]. Ce Commentaire a été conservé, en tout ou en partie, dans celui d'an-Nayrīzī, lequel, pour les Définitions, les Postulats et les Notions communes, donne des notices assez étendues sous le nom que le traducteur latin transcrit par « Sambelichius ».

A trois reprises : la définition de l'angle, celle des parallèles, et le Postulat correspondant, le texte cite un certain Aganis, qualifié successivement par Simplicius de « compagnon », « philosophe » et « notre compagnon »[80]. La troisième citation est une tentative de démonstration du 5^e Postulat. L'identification d'Aganis a été l'objet de controverses, sans que la question soit tranchée[81].

Les observations de Simplicius, consacrées systématiquement à l'axiomatique euclidienne, sont d'un intérêt historique particulier[82].

IV. Le commentaire de Proclus

Le *Commentaire* de Proclus au Premier Livre des *Eléments* d'Euclide nous est parvenu intégralement, mis à part quelques lacunes. Il constitue, avec la *Collection* de Pappus, une source importante de l'histoire de la mathématique grecque, dont l'intérêt est accru par la disparition des traités antérieurs à celui d'Euclide.

78. Pour être complet, précisons que Proclus, in *Pr.*, 361, 21, *ad* I, 28, cite comme l'auteur d'un *Epitome* des *Eléments* un certain Ægéas d'Hiérapolis, qui n'est pas autrement connu.

79. *Fihrist*, 21 (Suter).

80. Cf. *Anar.* 13 ; 26 ; et 66, 70, 71, 73 *ad* I, 29.

81. Curtze identifie Aganis à Geminus (v. *Anar.* 13, n. 1), mais cf. *TBE* I, 27-28, et antérieurement Tannery P., Le philosophe Aganis est-il identique à Geminus? *Bibliotheca Mathematica*, II_3, 1, Leipzig (éd. Eneström G.), 1901, p. 9-11.

82. Cf. *infra* aux comm. des énoncés concernés.

Proclus de Lycie, dit « le Diadoque », vécut au V^e siècle, vraisemblablement de 412 à 485. Il naquit à Byzance, de parents originaires de Lycie, étudia à Alexandrie Aristote et les mathématiques, puis vint à Athènes, à l'Académie, qui connaissait alors un nouveau lustre. Là, ses maîtres en platonisme furent Plutarque d'Athènes et Syrianus, auquel il succéda à la tête de l'institution, d'où lui vint le titre de « Diadoque ».

Néoplatonicien, homme de grande dévotion (païenne), travailleur infatigable, Proclus écrivit un nombre considérable d'ouvrages, dont les plus connus sont ses Commentaires à certains Dialogues de Platon, ainsi que les *Eléments de Théologie* et sa *Théologie platonicienne*. Cependant son activité s'étendit aux mathématiques, à l'astronomie, à la physique, à la poésie, à la critique littéraire, ainsi qu'aux traditions religieuses et mythologiques, en sorte que Victor Cousin a pu qualifier sa production de véritable Encyclopédie du V^e siècle[83].

En écrivant un *Commentaire* aux *Eléments*, Proclus n'a pas en vue seulement la théorie mathématique. Si d'une part, chez lui, c'est la philosophie qui assigne leur place aux diverses régions du savoir, les mathématiques réciproquement ont un rôle philosophique propre : en tant qu'exercice de la pensée discursive, elles doivent préparer l'accès aux universaux et à la connaissance dialectique. Elles ont certes un rôle subordonné et un caractère « hypothétique », en ce sens que leurs principes reçoivent d'ailleurs leurs justifications ultimes. Mais en même temps, elles doivent être étudiées dans une perspective philosophique, qui seule permet d'approfondir la signification des « idées » dont elles traitent dans l'économie du savoir. C'est pourquoi, en conformité avec

83. Pour tout ce qui concerne la vie, la personnalité et l'œuvre de Proclus, cf. Morrow (Glenn R.), *Proclus — A Commentary on the First Book of Euclid's Elements*, Princeton University Press, 1970, § XV-XXI ; pour sa philosophie des Mathématiques, *ibid.* § XXXII-XLIII, ainsi que Mueller (Ian), Mathematics and Philosophy in Proclus' Commentary on Book I of Euclid's *Elements*, *in* Pépin J. et Saffrey H. D. éd., *Proclus, lecteur et interprète des Anciens*, Actes du Colloque international du CNRS, (2-4 octobre 1985), Paris, Editions du CNRS, 1987. On peut également se reporter à Ver Eecke (Paul), *Proclus de Lycie — Les Commentaires sur le Premier Livre des Eléments d'Euclide*, Bruges, Desclée de Brouwer, 1948, § IX-XV ; et pour l'histoire du texte, *ibid.* § XX-XXIV.

les critiques adressées aux autres commentaires[84], Proclus cherche à imprimer au sien un caractère différent : recherchant les « causes » des propriétés, il lui donne souvent un tour spéculatif, non seulement dans la partie du Prologue consacrée à la philosophie des mathématiques, mais aussi dans les notes aux divers énoncés.

On sait que, dans ces conditions, les mathématiques faisaient partie du « cursus » que devaient parcourir les étudiants de l'Académie, et il est hors de doute que ceux-ci formèrent le premier public de ce qui devint le *Commentaire*. Le texte contient d'ailleurs des références aux « auditeurs » et aux « commençants »[85], ainsi que des explications tout-à-fait triviales et des invites à s'exercer en respectant des règles données[86]. Toutefois, il faut ajouter aussitôt que le but de la rédaction était aussi de produire un ouvrage de référence pour un public plus large, désireux de pouvoir situer les *Eléments* dans le cadre plus général de la problématique mathématique : en témoignent les développements « métamathématiques », épistémologiques et historiques des deux Parties du Prologue, les longues notices sur les principes et notamment la discussion du Postulat des parallèles, les références à des courbes dont l'étude ne relève pas des *Eléments*, mais d'un niveau supérieur de la Géométrie.

Le souci pédagogique et didactique se manifeste par le fait que Proclus suit en général un plan dans ses notices sur les Propositions : explication de la preuve euclidienne, examen des variantes ou cas de figure dans un but d'exercice, réfutation des objections soulevées par des détracteurs ; de plus, des indications historiques sur l'origine de l'énoncé ou sur sa première démonstration viennent compléter ces bases de réflexion.

Le *Commentaire au Livre I* a-t-il eu une suite ? Des allusions aux Livres suivants montrent que Proclus y songeait et avait déjà des notes[87]. Cependant on ne trouve nulle trace de ces notes dans les Scholies[88] et rien n'indique que les scholiastes aient eu de Proclus, qu'ils recopient souvent pour le Livre I, un texte plus étendu et meilleur que le nôtre. La fin du texte, d'autre part, laisse entendre que Proclus

84. V. *supra* n. 51

85. *Pr.*, 210, 19 ; 375, 9 ; 272, 13.

86. Par ex. *Pr.*, 298, 14 ou 210, 17-25.

87. Allusion au L. II : *Pr.*, 398, 19 ; allusion au L. III : 272, 15 ; allusion au L. XII (éventuellement) : 423, 6

88. *EHS*, V, t. 1 et 2.

doute fortement, quelle qu'en soit la raison, de pouvoir réaliser l'équivalent pour les Livres suivants[89].

Concevant son travail à partir des préoccupations philosophiques et pédagogiques que nous avons rappelées, Proclus se devait de réunir la documentation la plus complète susceptible d'alimenter sa réflexion. Il ne fait pas mystère, nous l'avons vu, d'utiliser les commentateurs précédents, sans pour autant se faire obligation de toujours citer sa source, comme le montre par exemple la comparaison entre ses citations explicites de Héron, et la teneur de sa propre rédaction en des points où Héron est cité par an-Nayrīzī. Il suit de là que les notes données sans référence à une autorité, loin de devoir être attribuées d'emblée à Proclus lui-même, doivent faire l'objet d'une recherche de source, cette règle demeurant valable même quand l'auteur parle en première personne selon l'usage du temps, et même quand il semble présenter une objection comme éventuelle, alors qu'il indique par ailleurs qu'elle a été effectivement articulée. Outre cela, il faut noter que Proclus ne donne pas toujours le titre de l'ouvrage auquel il fait des emprunts, n'indique pas toujours qu'une citation est faite de deuxième main, résume souvent les commentaires des autres, et se permet même de citer de mémoire Platon, Aristote, Plotin et Euclide lui-même, tout en affirmant retranscrire leurs propres termes[90].

Outre ses prédécesseurs dans l'art du commentaire, les œuvres des grands philosophes, et celles de ses maîtres, Proclus cite les ouvrages suivants : *Les Bacchantes*, de Philolaos, les *Mélanges*, de Porphyre (cf. *supra*), *Sur la sphère et le cylindre*, d'Archimède, *Sur l'hélice cylindrique*, d'Apollonius, l'*Histoire de la Géométrie* et un ouvrage *Sur l'Angle*, d'Eudème, l'ouvrage de Posidonius contre Zénon de Sidon, l'épicurien, l'*Astronomie*, de Carpus d'Antioche, « le mécanicien », un traité de Claude Ptolémée sur le Postulat des parallèles, et enfin *Philokalia*(?) de Geminus[91].

89. *Pr.*, 432, 9-19.

90. Sur le détail de ces questions, cf. *TBE* I, 33-34.

91. Respectivement : *Pr.*, 22, 15 ; 56, 25 ; 71, 18 ; 105, 6 ; 352, 15 ; 125, 8 ; 200, 2 ; 241, 19 ; 362, 15 ; 177, 24 ; (sur la nature de la *Philokalia* de Geminus, cf. *infra*). Outre ces ouvrages, Proclus mentionne Hérodote, Speusippe, Xénocrate, Zénodote, Zénodore, Eratosthène, Menelaus, Philon de Byzance, Théodore d'Asine, Nicomède, Persée, tous les mathématiciens figurant dans le « résumé » de l'histoire de la Géométrie, et de nombreux autres personnages, dont certains ne sont pour nous que des noms.

Nous examinons ci-après ces sources, avant de tenter de déterminer l'apport propre de Proclus.

1. *Eudème de Rhodes, le péripatéticien*

Eudème de Rhodes, disciple d'Aristote, écrivit, dans le cadre de l'entreprise encyclopédique conduite par le Lycée, une histoire de l'Arithmétique, une histoire de l'Astronomie, et une histoire de la Géométrie. La perte de ces ouvrages peut difficilement être surestimée, car Eudème avait sous la main plusieurs des livres des premiers géomètres qui ont disparu après le traité d'Euclide. Un fragment très significatif nous en a été conservé par Simplicius : il s'agit de la célèbre quadrature des lunules par Hippocrate de Chio[92]. Les fréquents recours faits par les anciens auteurs à l'*Histoire de la Géométrie* en attestent assez l'importance. Eutocius notamment, parlant des paralogismes liés aux tentatives de quadrature du cercle, les déclare bien connus de ceux qui ont examiné le livre d'Eudème[93]. De plus, ces deux citations semblent pouvoir accréditer l'idée que Proclus, antérieur à Simplicius et à Eutocius, devait l'avoir lui aussi sous les yeux.

Cinq citations d'Eudème par Proclus se rapportent aux premiers temps de la Géométrie grecque :

— l'attribution à Thalès des Prop. I, 15 et I, 26;

— l'attribution de I, 23 à Œnopide de Chio;

— l'attribution de I, 32 et de I, 44 aux Pythagoriciens[94].

En appliquant les principes de critique découlant des remarques faites ci-dessus, on peut conjecturer avec vraisemblance l'autorité d'Eudème pour les notes suivantes :

— l'attribution à Thalès de la bissection du cercle par son diamètre, de I, 5, et de l'expression archaïque employée pour l'égalité des angles;

— l'attribution de I, 12 à Œnopide;

— l'attribution aux Pythagoriciens du théorème du pavage du plan;

92. Simplicius, *in Phys.*, 61, 5-68, 32 (Diels). Simplicius annonce qu'il va citer Eudème *expressis verbis*, tout en ajoutant quelques explications en raison du style abrégé qu'il utilise (*ibid.* 60, 27).

93. In *Arch.* III, 228.

94. Respectivement : *Pr.*, 299, 3; 352, 14-18; 333, 6; 379, 1-16; 419, 15-18.

— peut-être l'indication des deux formules, l'une dite de Pythagore, l'autre de Platon, pour former en nombres entiers des triangles rectangles[95].

Il convient cependant d'user de prudence en ce qui concerne les attributions aux Pythagoriciens, comme le montre la note à I, 47, où Proclus mentionne certaines traditions assez confuses dont il semble douter lui-même et dont il paraît difficile qu'Eudème soit la source[96].

Dans la deuxième Partie de son Prologue, Proclus retrace dans ses grandes lignes une histoire de la Géométrie jusqu'à Euclide : ce célèbre « résumé » dut avoir — il est légitime de le penser — Eudème parmi ses sources. La question a été envisagée par Tannery, lequel pensait que l'ouvrage était déjà perdu au temps de Proclus, et que celui-ci avait emprunté son « résumé » à Geminus qui aurait été l'intermédiaire[97]. Cependant la nécessité de cette thèse ne s'impose pas, car l'œuvre de Geminus avait le caractère d'une somme de questions de fond relatives aux mathématiques prises comme sciences constituées, et non d'un ouvrage historique. Mais d'un autre côté, Eudème, directement ou non, ne peut être la seule source. Ecartons ce qui concerne Euclide — et ne peut bien entendu venir de lui — le texte de Proclus est, en grande partie, axé sur « l'archéologie » des *Eléments*, ce qui ne pouvait être le cas de l'*Histoire* d'Eudème, comme en témoigne le fragment sur les lunules conservé par Simplicius. De plus, ce « résumé » est fait d'un point de vue éminemment platonicien : Démocrite, par exemple, n'y figure pas, malgré ce que nous savons par Archimède de sa contribution aux *Eléments*, et, à partir de la mention d'Eudoxe jusqu'à celle d'Euclide, il n'est fait état que de géomètres ayant, de près ou de loin, partie liée avec l'Académie : ce caractère unilatéral ne pouvait appartenir à l'ouvrage d'Eudème, compte tenu de l'intention encyclopédique des travaux historiques voulus par Aristote pour le Lycée. Si l'on remarque en outre, comme nous l'avons vu ci-dessus, que Proclus cite Eudème à propos de résultats tous acquis avant Platon, on pourra conclure que c'est surtout pour l'histoire préplatonicienne des mathématiques qu'il l'a utilisé aussi dans le « résumé », et que, pour la période suivante, il disposait, concurremment ou non, de

95. Respectivement : *Pr.*, 157, 10-13 *ad* Df. I, 17; 250, 20 - 251, 2; 283, 7-10; 304, 11 - 305, 3 *ad* I, 15; 428, 7 - 429, 8 *ad* I, 47.

96. *Pr.*, 426, 6-9; cf. aussi *TBE* I, 36-37 et not. « Sur Pythagore... ».

97. Cf. *GG.*, notamment 71-75 et 89-84.

la tradition propre de l'Académie. Cela expliquerait le pluriel qu'il emploie pour désigner ses sources, dans l'expression : « Ceux qui ont écrit l'histoire... »[98]. La conclusion serait alors que Proclus lui-même est l'auteur du « résumé ». Pour la thèse contraire on fait valoir que, si le style de ce morceau est incontestablement un, il n'est pas tel qu'on puisse y reconnaître Proclus lui-même[99]. En revanche on peut y reconnaître sa philosophie, et entre autres choses une conception du pythagorisme qui semble bien néo-platonicienne, en sorte que l'argument du style ne nous paraît pas décisif.

En ce qui concerne le livre *Sur l'angle* dont Eudème était l'auteur, nous savons qu'il existait, sur la question de la nature de l'angle, une controverse importante, justifiant un écrit spécial dans l'Ecole péripatéticienne[100].

2. *Geminus de Rhodes*

Originaire probablement de Rhodes et disciple du philosophe stoïcien Posidonius, Geminus semble avoir écrit entre 73 et 67 avant l'ère chrétienne[101]. Il est l'auteur, outre un ouvrage élémentaire d'Astronomie, d'un grand traité, dont l'intitulé est diversement rapporté par Pappus : *Sur la classification des Mathématiques*, par Eutocius : *Sur la théorie des Mathématiques*, et par Proclus qui le désigne par le terme de

98. *Pr.*, 68, 4-5; v. la trad. du « résumé » *infra* ch. III, § XI. Dans un ouvrage récent, Lasserre F. (*De Léodamas de Thasos à Philippe d'Oponte*, Témoignages et Fragments, éd., trad., comm., Naples, Bibliopolis, 1987), tout en admettant le relais par Geminus, suggère Philippe d'Oponte comme étant la source académique. Celui-ci n'est cité qu'une fois par Proclus dans le *Commentaire*, *i.e.* dans le « résumé » lui-même, si on l'identifie au « Philippe de Medma » de 67, 23; et aussi, si l'on en croit Lasserre (p. 605), en 305, 24, où la mention du nom sans le toponyme, en provenance de Héron, le désignerait.

99. Cf. *TBE* I, 38; Heath fait valoir un deuxième argument : si Proclus était l'auteur, il n'aurait pas manqué de mentionner la découverte de la méthode analytique qu'il attribuait à Platon et à laquelle il attachait tant d'importance; or l'argument est faible, car le « résumé » fait effectivement mention des « analyses » en vue de résultats ayant pris source chez Platon, cf. *Pr.*, 67, 6-7, qui ne contredit pas formellement 211, 19-23, invoqué par Heath. Quant au § 136, 1, qui figure dans les *Definitiones* de Héron (*Hero*, IV, 108), pâle réplique du « résumé », il dépend bien évidemment de Proclus, ou de quelque collection de scholies en procédant, comme le note Heiberg (*ibid.* p. IV).

100. Sur ce point, cf. *infra* comm. *ad* Df. I, 8.

101. Une certaine incertitude règne quant à la date et au lieu de naissance, et même au nom de Geminus; sur ces controverses, cf. *TBE* I, 38-39; *HGM* II, 222-223; Ver Eecke, *op. cit. supra* n. 83, p. 31, n. 3.

Philokalia(?). Il s'agissait en fait d'une sorte d'encyclopédie mathématique[102], donnant de l'ensemble de ces sciences une vue complète.

Proclus se réfère une quinzaine de fois à Geminus. Voici la liste de ces passages :

— dans la première Partie du Prologue, la classification des mathématiques[103];

— au commentaire de I,Df.4, la classification des lignes[104];

— au commentaire de I,Df.7, la classification des surfaces et des solides[105];

— au commentaire de I,Df.23, la définition des asymptotes, et celle des parallèles selon Posidonius[106];

— sur la distinction entre axiomes et postulats[107];

— sur les trois premiers Postulats[108];

— sur I,Post.5, la difficulté des asymptotes[109];

— sur I,1, la matière de la Géométrie, les théorèmes, problèmes et diorismes[110];

— sur I,5, la généralisation aux lignes homéomères[111];

— sur I,10, la question des « lignes indivisibles »[112];

— sur I,35, la notion de « lieu géométrique »[113].

En appliquant les principes d'exégèse dont il a été fait état plus haut, on peut conjecturer avec vraisemblance d'autres références, quoique non explicites. Ce sont : un passage du Prologue sur le caractère des preuves admissibles en Géométrie, un autre sur les fondements et les méthodes de cette science, un autre sur la nature des *Éléments*[114]; plusieurs passages sur les problèmes, les théorèmes, et leurs

102. On peut inférer d'Eutocius que le 6ᵉ Livre traitait des coniques (v. *Apoll.* II, 170), de Proclus qu'il y était traité de courbes supérieures; quant au titre donné par Pappus, il pouvait s'appliquer au 1ᵉʳ Livre (*Papp.* III, 1026, 9).

103. *Pr.*, 38, 1 - 42, 8, à l'exception de 41, 8-10.

104. *Pr.*, 105, 13 - 107, 10; 111, 1 - 113, 3.

105. *Pr.*, 117, 14 - 120, 12.

106. Pr., 176, 5 - 17; 176, 18 - 177, 25.

107. Pr., 182, 4 - 184, 10; cf. 188, 3-11.

108. *Pr.*, 185, 6-25.

109. *Pr.*, 192, 5-29.

110. *Pr.*, 200, 21 - 202, 25.

111. *Pr.*, 251, 2-11.

112. *Pr.*, 277, 25 - 279, 11.

113. *Pr.*, 394, 11 - 395, 2 et 395, 13-21.

114. Respectivement : *Pr.*, 33, 21 - 34, 1; 57, 9 - 58, 3; 72, 3 - 75, 4 ainsi que 77, 3-6.

espèces[115]; un passage sur la classification des angles[116]; plusieurs passages sur la notion de « figure » et les classifications afférentes[117]; une note sur les lignes fermées ou non[118]; la définition du terme « porisme » dans le titre de l'ouvrage d'Euclide de ce nom[119]; deux passages sur les parallèles[120]; enfin une note sur une objection des Épicuriens[121].

Le caractère notionnel de ces contributions apparaît nettement, et semble en accord avec l'intérêt porté par Geminus aux questions relatives aux fondements et aux principes des sciences mathématiques.

3. *Apollonius de Perga*

Indépendamment des passages où Proclus cite les *Coniques*, le livre sur les lignes irrationnelles, et celui sur l'hélice cylindrique[122], les références faites à Apollonius sont surprenantes en ce qu'elles se rapportent à la Géométrie élémentaire et qu'elles révèlent une tentative du grand géomètre, peu suivie de succès apparemment, de réviser les fondements de la Géométrie. C'est ainsi qu'il aurait voulu fonder sur l'expérience les notions de ligne et de surface, donné une nouvelle définition de l'angle, tenté de réduire le nombre des axiomes, et proposé de nouvelles solutions pour les problèmes de I,10, I,11 et I,23[123]. Il est difficile de juger de cette tentative par ce qu'en dit Proclus, lequel lui reproche de ne pas respecter l'ordre des *Éléments*, mais l'on peut penser que, si les fondements étaient autres, l'ordre aussi pouvait être différent. Les trois constructions attribuées à Apollonius sont demeurées usuelles pour la pratique courante.

115. *Pr.*, 220, 7 - 222, 14; 244, 14 - 246, 12; 252, 5 - 254, 20.
116. *Pr.*, 126, 7 - 127, 16.
117. *Pr.*, 102, 22 - 103, 18; 159, 12 - 160, 9; 162, 27 - 164, 6; 143, 5-11; 168, 4-12.
118. *Pr.*, 187, 19-27.
119. *Pr.*, 301, 21 - 302, 13.
120. *Pr.*, 355, 20 - 356, 16; 364, 9-12 et 364, 20 - 365, 4.
121. *Pr.*, 322, 4 - 323, 3. Selon F. Lasserre (*op. cit. supra* n. 98), il conviendrait d'attribuer en outre à Geminus, comme provenant de Philippe d'Oponte, les passages suivants : *Pr.*, 72, 23 - 73, 12; 77, 7 - 78, 20; 179, 19-22; 181, 16-17 et 21-24; 202, 9-18; 220, 7-12; 253, 16 - 254, 5.
122. *Pr.*, 71, 19; 74, 23; 105, 5-6 et 14-15; 356, 8-9.
123. Respectivement : *Pr.*, 100, 5-19; 114, 20-25; 123, 15-19; 124, 18; 125, 17; 183, 13 et 18; 194, 25 - 195, 5; 279, 16 - 280, 4; 282, 8-19; 335, 16 - 336, 5.

4. *Claude Ptolémée*

Proclus donne deux extraits importants du traité dans lequel Claude Ptolémée tentait de prouver le postulat des parallèles, intitulé : *Sur la rencontre des droites prolongées à partir d'angles plus petits que deux droits*[124].

5. *Posidonius d'Apamée*

Chef de l'École stoïcienne à Rhodes dans la seconde moitié du II^e siècle avant l'ère chrétienne, Posidonius est plusieurs fois cité, très probablement de seconde main, par l'intermédiaire de son disciple Geminus, qui est l'autorité de Proclus. Cependant, en tant que stoïcien, sa controverse avec l'épicurien Zénon de Sidon a un autre caractère et relève d'un ouvrage distinct, qui est sur ce point la source de Proclus. Zénon ne se proposait rien de moins que de montrer l'infidélité de la Géométrie à ses propres principes et attaquait la première Proposition du Livre I d'Euclide[125].

6. *Carpus d'Antioche*

Dit « le mécanicien » et de date inconnue, il était, selon Proclus, l'auteur d'un ouvrage d'Astronomie, dans lequel il avait ranimé la discussion sur la distinction entre problèmes et théorèmes; Proclus en donne un extrait, cité *expressis verbis*[126].

Cet examen des principales sources identifiables de Proclus permet d'entrevoir la richesse des informations que nous donne son *Commentaire* sur l'histoire de la Géométrie grecque. Celui-ci cependant ne se réduit pas à une simple juxtaposition. C'est un ouvrage original, d'abord par la philosophie de la connaissance et l'« épistémologie » exposées dans le Prologue, ensuite par les discussions logiques auxquelles donnent lieu les principes, enfin par le caractère systématiquement ordonné des commentaires aux Propositions. Quant à l'apport

124. *Pr.*, 362, 14 - 363, 18 et 365, 7 - 367, 27; v. en outre 191, 23 et comm. *ad loc.*
125. *Pr.*, 199, 11 - 200, 3; 214, 18 - 215, 13; 216, 10 - 218, 11; cf. comm. à I,1.
126. *Pr.*, 241, 19 - 243, 11 : citation à partir de 242, 22; en outre 243, 23. Il existe de nombreux passages qui paraissent empruntés par Proclus à des auteurs que la critique est incapable d'identifier; une liste en a été dressée par Van Pesch (*op. cit. supra* n. 57)

proprement mathématique de Proclus, on peut en fixer comme suit les principales composantes : d'abord la préoccupation de découvrir les « causes » des propriétés mathématiques; étant partagée en général par Geminus, cette idée ne peut constituer un critère que lorsqu'elle peut s'appliquer à des Propositions déterminées, car Geminus ne les traitait pas une par une, soit les commentaires à I,8, 16, 17, 18, 32, 47; — viennent ensuite les remarques faites sur certaines idées de Pappus : comme celui-ci est son plus immédiat prédécesseur, elles lui appartiennent nécessairement[127]; — enfin la critique de la tentative de prouver le 5^e Postulat due à Ptolémée, suivie de l'exposé de sa propre solution[128]. D'ailleurs Philopon assure que Proclus, comme Ptolémée, avait écrit un livre entier sur la question du postulat des parallèles[129].

127. Par ex. *Pr.*, 190, 9-23; 198, 5-15; 250, 12-19.
128. Comm. à I,29 : *Pr.*, 368, 1-23; 371, 10 - 373, 2; *v. ad loc.*
129. *In Arist. An. Post. Comm.*, CAG XIII, Berlin, 1909, (Wallies), vol. IV, 214 a 9-12, comm. à *An. Post.* I,10.

CHAPITRE II

L'histoire du texte et les traductions

V. LE TEXTE DES MANUSCRITS

L'histoire du texte des *Éléments* d'Euclide est dominée par les trois lignes que voici : « Mais que dans des cercles égaux les secteurs sont entre eux comme les angles sur lesquels ils s'appuient, cela nous l'avons prouvé dans notre édition des *Éléments* à la fin du Livre VI ». Ces lignes sont de Théon d'Alexandrie, qui vivait au IV^e siècle de notre ère, et se trouvent dans son *Commentaire* à l'*Almageste* de Ptolémée[130]. Ainsi Théon nous apprend lui-même qu'il a édité les *Éléments* et que la seconde partie de VI,33, qui figure dans presque tous les manuscrits, a été ajoutée par lui. La plupart des manuscrits du texte grec montrent d'ailleurs par leurs titres qu'ils proviennent de cette édition, car cette origine y est explicitement mentionnée.

Aussi lorsque Peyrard, en 1808, découvrit un codex du Vatican qui ne présentait ni la mention susdite dans le titre ni la seconde partie de VI,33, il put légitimement conclure qu'il se trouvait en présence d'une copie d'une édition antérieure à celle de Théon. Plus précisément le copiste de ce codex avait sous les yeux les deux versions, car une note marginale de première main à XIII,6 indique : « Ce théorème n'est pas donné dans la plupart des copies de la nouvelle édition,

130. Rome A. ed., *Commentaires de Pappus et de Théon d'Alexandrie sur l'Almageste*, 3 vol., « Studi e testi 54, 72, 106 », Rome & Vatican City, Bibl. Apostol. Vat., 1931, 1936, 1943 : n° 72, p. 492, 6.

uns, éléments des autres, c'est-à-dire qu'une proposition donnée du traité y a éventuellement une postérité. C'est pourquoi, il est possible pour chaque proposition d'indiquer explicitement quels sont ses « ancêtres », c'est-à-dire les propositions que sa démonstration utilise, et c'est aussi pourquoi les « éléments » ne sont pas présentés dans un ordre indifférent, mais constituent un ensemble appelé στοιχείωσις, terme que nous pouvons rendre par « ensemble ordonné des éléments »[209].

XI. La genèse des *Eléments*

A l'examen cependant, le traité d'Euclide, en dépit de l'unité de son dessein général et de son inspiration, telle que l'exprime Proclus, révèle des différences dans l'approche mathématique de certaines questions qui peuvent être interprétées comme des indices de l'existence de plusieurs couches rédactionnelles. Proclus lui-même — on l'a vu — relativise son jugement, malgré l'admiration qu'il ne cache pas : c'est la mieux réussie des multiples tentatives qui ont eu lieu, et dont chacune avait pris un parti déterminé. A ces différences s'ajoutent, quand il s'agit d'ouvrages échelonnés dans le temps comme ceux qu'évoque son « résumé » historique, celles qui concernent le contenu, en fonction du progrès de la science. Une œuvre comme les *Eléments* d'Euclide représente en réalité un point d'aboutissement, le couronnement d'un effort d'organisation portant sur des matériaux accumulés par les siècles antérieurs, et différant les uns des autres tant par la date de leur découverte que par leur style mathématique. Cette dernière différence serait-elle due à la pluralité des rédacteurs? Cette hypothèse ne nous paraît pas résoudre la question. Une équipe rédactionnelle n'aurait pas manqué de faire effort pour unifier le plus possible la présentation à travers tout l'ouvrage. Si des différences appréciables subsistent, il faut les attribuer à la persistance de traditions historiques assez fortes et assez prestigieuses pour avoir inspiré le souci de les respecter et d'en faire sentir les traces. La certitude demeure donc de la pluralité des apports historiques constituant les matériaux initiaux.

209. C'est la méconnaissance de cette propriété d'ordre de la suite des « éléments » qui a conduit certains traducteurs à bouleverser l'ordre des treize Livres, chose injustifiable; cf. par ex. Kayas, *op. cit. supra* n. 203.

En somme, le monument euclidien résulte d'un compromis entre deux exigences : d'une part l'exigence d'unité propre à la conception même d'un recueil présentant les qualités que nous avons vu énumérer, d'autre part une exigence de fidélité à l'égard des grandes théories mathématiques léguées par l'histoire, et de leurs initiateurs, dont le public informé s'attendait légitimement à retrouver la tradition.

Il convient ici d'être en garde contre une autre sorte de méprise : pas plus que les *Eléments* ne sont une somme ou un résumé du savoir qui leur est historiquement contemporain, pas davantage leur ordre ne représente-t-il l'ordre d'apparition historique des connaissances; le croire serait se faire de l'histoire une conception bien naïve, qui consisterait à penser qu'elle procède logiquement, allant du simple au complexe, en suivant une voie synthétique. Il serait d'ailleurs tout aussi naïf de croire que les premiers géomètres disposaient d'une théorie complète organisant leurs résultats : comme on l'a dit, il faut se garder de leur attribuer « les principes de leurs conséquences ».

Voici maintenant le texte de Proclus qui se rapporte, en partie, à l'histoire antérieure des *Eléments* :

> « Or, de même que chez les Phéniciens, du fait du commerce maritime et des contrats, débuta la connaissance précise des nombres, de même aussi chez les Egyptiens a été découverte la Géométrie pour la raison susdite[210].
>
> Premièrement Thalès, étant allé en Egypte, transporta en Grèce cette étude et, s'il trouva lui-même de nombreux résultats, il mit ses successeurs sur la voie de beaucoup d'autres, usant d'approches tantôt plus universelles, tantôt plus empiriques. Après lui, Mamercos (?)[211], frère du poète Stésichore, est mentionné pour s'être appliqué avec zèle à la Géométrie, et Hippias d'Elis a rapporté qu'il y avait acquis de la réputation.
>
> Après eux, Pythagore changea la conception de la Géométrie et lui donna la forme d'une culture libérale : reprenant du début l'examen de ses principes et explorant ses théorèmes de façon immatérielle et intellectuelle, c'est lui qui découvrit ainsi la difficulté des irrationnelles[212] et la constitution des figures cosmiques. Après lui, Anaxagore de Clazomènes s'appliqua à de nombreuses questions qui relèvent de la Géométrie, et de même Œnopide de Chio, un peu plus jeune qu'Anaxagore, l'un et l'autre mentionnés par Platon dans *Les Rivaux*[213] comme s'étant acquis de la réputation dans les mathématiques. Après eux, Hippocrate de Chio, l'inventeur de la quadrature de la lunule, et Théodore de Cyrène s'illustrèrent dans la Géométrie. Hippocrate fut en effet le premier, de ceux que la tradition mentionne, qui ait aussi composé des *Eléments*.
>
> Platon, qui vint après eux, fit prendre un très grand essor à la mathématique tout entière et à la Géométrie spécialement, par le zèle qu'il y consacra, lui qui — c'est assez évident — a renforcé ses ouvrages d'arguments mathématiques et éveille partout à leur endroit l'admiration de ceux qui se consacrent à la Philosophie. A cette époque il y eut aussi Léodamas de Thasos, Archytas de Tarente, et Théétète d'Athènes, par qui l'ensemble des théorèmes fut augmenté et progressa vers un arrangement plus scientifique; puis, plus jeune que Léodamas, Néoclide et son disciple Léon, qui procurèrent beaucoup de résultats s'ajoutant à ceux de leurs prédécesseurs, en sorte que Léon put lui aussi rassembler des *Eléments*, en accordant plus de soin au nombre et à l'utilité des résultats établis, et trouver des « diorismes », ou distinctions entre les cas où le problème cherché est possible et les cas où il est impossible.
>
> Mais c'est Eudoxe de Cnide, un peu plus jeune que Léon et devenu familier du cercle de Platon, qui le premier augmenta le nombre des théorèmes dits « généraux », aux trois proportions en adjoignit trois autres, et accrut les résultats touchant la « section » qui avaient pris source chez Platon, utilisant pour cela les analyses. Amyclas d'Héraclée, l'un des familiers de Platon, Ménechme, élève d'Eudoxe, mais qui avait fréquenté l'enseignement de Platon, et son frère Dinostrate, rendirent encore plus achevée la Géométrie entière. Theudios de Magnésie eut la réputation d'un esprit distingué en mathématiques, autant que dans le reste de la Philosophie : en effet il mit en bel ordre les *Eléments* et rendit plus généraux bon nombre de résultats partiels. A noter aussi qu'Athénée de Cyzique, qui vécut dans la même période, s'illustra dans les autres branches des mathématiques, mais surtout en Géométrie. Ceux dont il est ici question séjournaient donc ensemble à l'Académie, menant leurs recherches en commun.
>
> Hermotime de Colophon développa plus avant les résultats antérieurement procurés par Eudoxe et Théétète, découvrit beaucoup d'« éléments » et composa l'un des *Lieux*. Philippe de Medma, disciple de Platon qui l'orienta vers les mathématiques, conduisait ses recherches d'après les indications de Platon et se proposait toutes les questions qu'il pensait devoir contribuer à la philosophie de Platon. Ceux qui ont écrit l'histoire prolongent donc jusqu'à cette époque le perfectionnement de cette science.
>
> Euclide n'est pas de beaucoup plus jeune que ceux-là : en rassemblant les *Eléments*, il mit en ordre bon nombre de résultats d'Eudoxe et perfectionna beaucoup de ceux de Théétète, et de plus il éleva au niveau de démonstrations irréfutables ceux dont ses prédécesseurs n'avaient rendu compte que de façon assez relâchée. Cet homme vécut sous le premier Ptolémée : car Archimède qui suivit de près le premier [Ptolémée] mentionne Euclide, et, notons-le, on raconte qu'un jour Ptolémée lui demanda s'il y avait pour la Géométrie un chemin plus court que l'*Ordre des Eléments* : et lui de répondre qu'il n'y a pas, vers la Géométrie, de voie directe réservée aux rois. Il est donc plus

210. Proclus vient de se faire l'écho de la tradition, remontant à Hérodote (II, 109), qui place en Egypte les débuts de la Géométrie, en raison de la nécessité de révoir les bornages après les crues du Nil. Il a précisé que l'on ne doit pas s'étonner que la découverte des sciences commence par l'utilité, parce que dans le monde de la génération tout procède de l'imparfait au parfait, et qu'on passe donc de la perception sensible au raisonnement, et du raisonnement à l'intuition intellectuelle. Mais cf. Arstt. *Met.* 981b23, qui voit dans le loisir de la caste sacerdotale égyptienne la cause de son savoir mathématique.

211. La *Souda* donne « Mamertinos » comme nom du frère de Stésichore; d'autres formes (« Ameristos », « Mamertios ») apparaissent dans les Mss. On ne sait guère de lui que ce qu'en dit ici Proclus. Stésichore appartient à la fin du VIIe ou au début du VIe siècle; il était originaire d'Himère, sur la côte nord de la Sicile, et d'ascendance ionienne. L'« acmè » d'Hippias d'Elis (ville du Péloponnèse) peut être située *ca.* 420.

212. Nous traduisons ici le texte de Friedlein : τῶν ἀλόγων; il faut suppléer γραμμῶν : « lignes irrationnelles ». Cette interprétation serait conforme à la tradition invétérée chez les Pythagoriciens d'attribuer au maître tout ce qui a pu être réalisé dans l'Ecole. Il paraît exclu que les irrationnelles aient été découvertes dès l'époque de Pythagore, mais il est exact que c'est par un traitement « immatériel » et purement intellectuel qu'on peut les découvrir, et non par l'observation ou le tâtonnement. Un Ms. a une autre leçon : ἀναλόγων; on a remarqué qu'il aurait fallu ἀναλογιῶν ou ἀνὰ λόγον, expression qui peut être précédée de l'article. La découverte alors aurait été celle de la « théorie des proportions », mais il est exclu également qu'il y ait eu une mise en forme théorique de la question à l'époque de Pythagore. En fait ἀναλόγων peut être un neutre pluriel substantivé, et il ne s'agirait alors simplement que de l'étude des choses qui sont proportionnelles. Toutefois, des proportions numériques à l'irrationalité la transition n'est pas impraticable, puisqu'une ligne moyenne proportionnelle peut être irrationnelle, ou « inexprimable » : alors la difficulté rencontrée dans « les choses proportionnelles » pourrait être simplement l'impossibilité de l'expression numérique. Y a-t-il là une explication de l'hésitation d'un copiste de Proclus?

213. *Rivaux*, 132 a, il s'agit d'un Dialogue d'attribution douteuse.

jeune que les disciples de Platon, mais plus vieux qu'Eratosthène et Archimède. Ceux-ci sont en effet contemporains, comme le dit quelque part Eratosthène. »

Nous avons dit précédemment[214] que ce résumé, qui se trouve dans une section du texte consacrée au développement de la Géométrie, est sans doute composé par Proclus lui-même à partir de plusieurs sources : l'*Histoire de la Géométrie* d'Eudème de Rhodes certes, mais aussi la tradition pythagoricienne et la tradition académique. Il n'est pas inutile de signaler les omissions remarquables de ce texte, d'ailleurs en partie justifiées. S'agissant d'histoire de la Géométrie, on admettra que des astronomes, comme les successeurs d'Eudoxe à la tête de l'Ecole de Cyzique autres que Ménechme (Hélicon, Polémarque, Callippe) n'y figurent pas, de même que les « musiciens » comme Lasos d'Hermione ou Aristoxène de Tarente. Aucun pythagoricien n'est mentionné (hormis Archytas, mais c'est de règle) et, selon leur propre tradition, seul Pythagore apparaît : Aristote, prudent, avait pris le parti de ne rien dire de Pythagore et de ne parler que des Pythagoriciens ; le texte d'Eudème sur ce point serait précieux. D'un autre côté, il est probable que la contribution géométrique propre d'Aristée de Crotone, d'Hippase de Métaponte ou de Philolaos était faible. Les sophistes naturellement (Antiphon, Bryson, Hippias d'Elis, simplement cité comme témoin) sont traités par prétérition, alors qu'Eudème les mentionnait peut-être, au moins comme objets de la critique d'Aristote. Les démocritéens subissent le même sort, Démocrite le premier, malgré le témoignage d'Archimède. Enfin l'absence du nom d'Aristée, le spécialiste des *Coniques* et des *Lieux* évoqué ci-dessus[215], donne à penser que Proclus, bien que citant les *Lieux* d'Hermotime, ne songe qu'à l'histoire des *Eléments* et non à celle de la Géométrie dans son ensemble. *A contrario*, l'histoire de l'Arithmétique n'intervient pas explicitement dans le « résumé », alors que le traité comporte trois Livres, et que Proclus a fait allusion à des auteurs d'*Eléments d'Arithmétique* qu'Euclide a sans doute aussi utilisés. On pourra donc conclure que ce texte de Proclus ne peut se défendre d'un certain caractère partiel.

214. Cf. *supra* ch. I, § IV, 1.
215. Cf. *supra* ch. I, § I et ch. I, § II, 7.

Il convient de noter que, pour l'histoire des mathématiques grecques antérieures à Euclide, nous ne disposons que de quatre sources directes : l'œuvre de Platon, celle d'Aristote, les traités relevant de la « petite astronomie » d'Autolycos de Pitane[216], qui témoignent pour la géométrie élémentaire de la sphère et la forme démonstrative des connaissances, exposées *more geometrico*, enfin les fragments d'Eudème de Rhodes transcrits littéralement par certains commentateurs. Tout ce que nous pouvons apprendre ou conjecturer par ailleurs prend appui sur des écrits postérieurs, ou bien sur l'analyse du contenu du texte euclidien lui-même. Nous allons examiner maintenant les principaux points du « résumé » de Proclus, en les confrontant avec ce qui ressort actuellement de la critique historique en ce domaine[217].

1. *La question des débuts*

La question historique des débuts des mathématiques en Grèce a été très souvent traitée comme la question philosophique des « origines de la mathématique », en raison de la fascination exercée par la culture grecque. Le texte de Proclus lui-même, en interprétant la tradition historienne grecque dans le cadre néo-platonicien, invitait à cette approche philosophique, quoiqu'en admettant un emprunt aux Egyptiens. La connaissance meilleure que nous avons aujourd'hui des civilisations qui régnaient aux limites de l'Hellade nous permet d'envisager autrement la problématique historique.

Nous possédons des textes à caractère mathématique en provenance de l'Egypte et de la Mésopotamie. Ils nous apprennent l'existence de codes de calcul systématiquement transmis par l'enseignement, fortement dépendants des systèmes de numération et des systèmes métrolo-

216. Autolycos de Pitane, *La Sphère en mouvement. Levers et couchers héliaques*, éd., trad. par Aujac G., avec la collaboration de Brunet J.P. et Nadal R., Paris, Les Belles-Lettres, 1979.
217. Au cours du XX^e siècle, l'histoire des mathématiques grecques avant Euclide a donné lieu à un très grand nombre d'études et à quelques ouvrages plus synthétiques. En dehors des histoires des Mathématiques dans leur ensemble, nécessairement cursives sur l'Antiquité, ou des ouvrages d'histoire de la science antique, dont, pour les mathématiques grecques, *HGM* I et II reste le meilleur exemple, on pourra consulter : outre *EEE, GG, MSc* et *Tb* II et III, Heath T.L., *Mathematics in Aristotle*, Oxford, 1949, rééd. 1970 ; Michel P.H. *De Pythagore à Euclide*, Paris, 1950 ; Van der Waerden B.L. *Science Awakening*, Groningue, 1954 ; ainsi que Lasserre F., *op. cit. supra* n. 98. On trouvera des bibliographies dans *EEE, PMDSEE*, et *Tb* III. Des textes sont accessibles, avec traduction anglaise dans Thomas (Ivor) *op. cit. supra* n. 17, avec bibl.

giques en usage, et réglant les divers types de calcul dont ces civilisations avaient besoin. Ces textes ont un caractère scolaire et empruntent leurs thèmes aussi bien à la vie économique qu'à des problèmes de chantier, touchant les gros travaux et l'architecture, ou à la vie agricole, et par conséquent à des problèmes de mensuration d'« objets » dont la morphologie pouvait être modélisée « géométriquement » ; néanmoins les « figures » qui accompagnent éventuellement ces textes ont toujours le caractère de croquis cotés dont les éléments constitutifs (lignes, etc.) ne sont utilisés que comme supports pour l'inscription de données numériques. Cela étant, les Egyptiens savent calculer l'aire du triangle, du carré, du rectangle, du trapèze, une approximation de celle du cercle ; les volumes et capacités cylindriques et parallélépipèdiques, ainsi que le volume de la pyramide et du tronc de pyramide à base carrée[218]. Ils évaluent la pente d'un plan incliné comme l'écart de la verticale par coudée de hauteur[219] : on trouve des exemples d'une même « pente » pour des pyramides diversement grandes, avec par conséquent des valeurs proportionnelles pour les longueurs.

Dans les textes babyloniens, on trouve des problèmes plus compliqués : recherche de triangles rectangles en nombres, mesures dans des triangles rectangles placés en homothétie, détermination de trapèzes par la pente des côtés, relations métriques (approchées) dans le cercle, ou le segment de cercle, ou des cercles concentriques, rapports entre cercle et hexagone inscrit, entre cylindre et prisme circonscrit, calcul du volume, non seulement du tronc de pyramide, mais aussi du tronc de cône (formules approchées), proportions entre côtés de triangles que nous qualifierions de semblables, mais les notions d'« angle », de « parallèle » et de « similitude » sont absentes[220] : il s'agit toujours en

218. Pour les aires, v. les problèmes n[os] 48 à 55 du Papyrus Rhind ; le cercle est fait égal à un carré dont le côté serait le diamètre moins le neuvième de celui-ci ; pour les volumes, v. les n[os] 41 à 46 ; une pyramide à base carrée est évidemment le sixième d'un cube si sa hauteur est la moitié du côté de la base, ce qui suggère la formule ; le tronc de pyramide à base carrée peut être calculé comme le sixième de l'espace compris entre deux cubes « concentriques » (volume des planches d'une caisse cubique, calculé de deux manières : soit en les ajustant « en biseau », soit non) ; cf. Problème n° 14 du Papyrus « Golenischev » de Moscou ; l'interprétation des calculs du n° 10 du même Papyrus est controversée, certains auteurs n'hésitant pas à y voir le calcul de la surface d'une demi-sphère, comme le double de celle du grand cercle.
219. Calcul « seq'd », cf. les n[os] 56 à 60 du Papyrus Rhind.
220. Cf. dans *Tb.* I l'analyse des tablettes BM 85194, BM 85210 et Str. 364, p. 194-274.

effet de procédures calculatoires dans lesquelles sont associées aux longueurs, surfaces et volumes des mesures « rationnelles ». La problématique traitée à Babylone est manifestement plus variée qu'en Egypte et la gamme des configurations plus étendue.

Cependant la plus importante différence entre les deux civilisations réside dans leur système de numération, et ce qui en découle. Les Egyptiens notent les entiers dans un système additif décadique, ainsi que leurs inverses, dont la valeur est exprimée comme partie d'entier. Les Babyloniens disposent, avec deux signes seulement, d'un système sexagésimal de position, à « virgule flottante ». D'autre part, les tables de résultats d'opérations précalculés sont beaucoup plus variées et étendues à Babylone qu'en Egypte. Aussi les Babyloniens sont-ils bien mieux outillés pour aborder des calculs compliqués ; c'est ainsi qu'ils traitent couramment des problèmes qui, mis en équations selon nos méthodes, correspondraient à certaines formes de l'équation du second degré (en nombres positifs et sans le zéro) ; il leur arrive également de donner des valeurs approchées de racines carrées irrationnelles.

De tout cela résulte un certain nombre de conclusions et de questions. En premier lieu on constate hors de Grèce une pratique mathématique variée, dont le niveau, malgré la part d'artificialisme scolaire, apparaît assez bien à l'examen des thèmes traités : exploitation des systèmes écrits de numération et métrologiques, — prix et profits commerciaux, — salaires, temps de travail, effectifs, rations, partages égaux ou progressifs, — prêts et intérêts, simples ou composés, — héritages, — changes et monnaies, — terrains, cadastres, propriétés, — grands travaux (irrigation, urbanisme, architecture), — techniques artisanales ou artistiques (alliages, céramiques, dallages, décors, « cartons », esquisses, facture d'instruments de musique), en bref tout ce que peuvent mettre en jeu des civilisations complexes et évoluées, ayant des millénaires d'existence lorsque les Grecs émergent de leur « Moyen-Age » et accèdent à l'écriture alphabétique au VIII^e siècle. Quelles que soient les modalités historiques de codification de ces pratiques, elles enveloppent un savoir mathématique, mais celui-ci, pour sa plus grande part, demeure implicite et n'est pas thématisé : il n'apparaît pas « en personne ». Sous cette forme, le savoir mathématique est de tout temps, même si l'apparition des codes peut être datée.

En deuxième lieu, il n'est pas vraisemblable que les Grecs d'Ionie, au VI^e siècle, et notamment les marchands grecs, n'aient rien su des pratiques calculatoires en usage hors de Grèce, chez leurs partenaires commerciaux, et qu'on doive admettre que les mathématiques grecques aient débuté sur une « table rase ». En réalité, un matériel considérable était déjà accumulé, qui n'avait pas fait l'objet d'un traitement théorique rationnel. De quoi les Grecs ont-ils eu connaissance? Nous ne pouvons sur ce point rien affirmer qui s'appuie sur des sources directes.

En troisième lieu, les Grecs ont peu parlé de l'origine de leur Arithmétique, et la mention que fait ici Proclus à propos des Phéniciens a de quoi surprendre. Sans doute il est possible que ceux-ci aient transmis quelque chose des codes en usage au Proche-Orient. Cependant, l'analyse comparée montre que la corrélation la plus forte existe entre l'Arithmétique des Grecs et le savoir implicite dans la pratique égyptienne des nombres, ce qui peut laisser supposer un transfert de savoir-faire, matériau offert à une théorisation ultérieure.

En quatrième lieu et à l'inverse, on peut être surpris de l'autre affirmation de Proclus, reprise d'Hérodote, qui crédite l'Egypte de l'initiative en Géométrie, alors que ressort essentiellement des textes égyptiens une grande habileté arithmétique, et non pas l'étendue des connaissances géométriques, laquelle au contraire est manifeste dans les textes babyloniens.

En bref les attributions de paternité de Proclus laissent perplexe. Il ne sert de rien de répéter des légendes, de rechercher des « origines » que d'ailleurs l'on contestera ensuite en les jugeant empiriques. Seule la confrontation interne des « mathématiques » des divers peuples peut conduire à des rapprochements susceptibles d'autoriser des hypothèses de transfert, sous réserve de l'existence d'« universaux », qui peuvent suffire à rendre compte des similitudes.

2. *La Géométrie des Ioniens*

La mention inaugurale de Thalès de Milet dans le « résumé » de Proclus a marqué la mémoire des siècles. En revanche la critique historique est très réticente à l'égard des indications fournies par la tradition. Il n'existait pas en Grèce d'ouvrage dont Thalès eût été l'auteur : ni Hérodote, ni Platon, ni Aristote n'avaient donc en main un écrit du fondateur de l'Ecole ionienne, et pas davantage Eudème de Rhodes. C'est donc, dès cette époque, par des témoignages d'autres auteurs

que l'on pouvait connaître son œuvre[221]. Dans ces conditions, il faut se contenter d'une interprétation prudente de ce qui nous est parvenu.

Proclus attribue à Thalès quatre propositions :

— la dichotomie du cercle par le diamètre, propriété incluse par Euclide dans la définition même du diamètre[222] ;

— l'égalité des angles à la base du triangle isocèle[223] ;

— l'égalité des angles opposés par le sommet, information que Proclus réfère à Eudème[224] ;

— l'égalité des triangles ayant un côté égal et deux angles respectivement égaux, information explicitement tirée de l'*Histoire de la Géométrie* d'Eudème[225].

Il ne fait guère de doute que, pour les deux premières propriétés, la source de Proclus est également Eudème. D'autre part, on doit noter une certaine cohérence entre les propriétés qui sont ici rassemblées. Elle provient de la prédominance de certains thèmes intuitifs, comme les symétries et les égalités d'angles, qui jouent un rôle médiateur : les polygones réguliers les plus simples, carré et triangle équilatéral, véhiculent en effet l'intuition de figures semblables et d'angles égaux; celle-ci peut être transférée aux triangles quelconques, aux angles respectivement égaux; les figures à symétrie axiale, isocèles, sont intermédiaires; enfin l'égalité d'une longueur, le côté « homologue », transforme la similitude en congruence, et les conditions de celle-ci peuvent être énumérées. Sont-ce là les « nombreux résultats » dont

221. Dicks D.R. a développé à fond cette critique dans l'art. Thales, *Classical Quaterly*, 9, 1959, 294-309. L'« acmè » de Thalès est généralement fixée en référence à Hérodote, I, 74, qui fait état d'une éclipse de Soleil : celle du 28 mai 585.

222. *Pr.*, 157, 10; cf. *El.*, Df. I, 17.

223. *Pr.*, 250, 20; cf. *El.*, Prop. I, 5.

224. *Pr.*, 299, 1; cf. *El.*, Prop. I, 15.

225. *Pr.*, 352, 14; cf. *El.*, Prop. I, 26. A cela s'ajoute une attribution que Diogène Laërce lui-même (I, 24-25) rapporte comme non-certaine : l'inscription du triangle rectangle dans le (demi-)cercle, que certains attribuaient à Pythagore; c'est la converse de la première partie de la Prop. III, 31 d'Euclide, en sorte qu'il est normal de n'en pas trouver trace dans Proclus, qui commence le L. I. Par ailleurs un texte de Callimaque, documenté par une citation de Diodore (X, 6, 4) et l'un des *Oxyrhynchi Papyri* (VII, 33, éd. Hunt), met en scène un Thalès examinant le « cercle de sept longueurs », ce qui serait une moyenne entre le périmètre de l'hexagone 6R et celui du carré circonscrit 8R. Enfin Diogène Laërce (I, 27), Pline (*Hist. Nat.*, XXXVI, 82) et Plutarque (*Conv. sept. sap.*, 2, 147A) assurent, chacun à sa manière, que Thalès mesura la hauteur des Pyramides par la longueur de leur ombre, en prenant comme témoin un objet vertical, au moment où l'ombre en était égale à la hauteur. Pour la discussion détaillée de tous ces témoignages, v. *Th.* II, 530-573.

le « résumé » crédite Thalès? Même limité à ce noyau de propriétés, l'apport des Ioniens serait considérable. Il ne saurait, certes, être question de démonstrations proprement dites : l'appareil logique et celui des principes font défaut, et Proclus lui-même concède la diversité des approches de Thalès.

Mais ce qui fait la nouveauté de la géométrie grecque, c'est qu'elle thématise la « figure » (σχῆμα) : cet objet graphique bien identifié, pourvu d'un nom, devient le lieu d'observation des relations internes entre ses parties constitutives, parmi lesquelles l'égalité des longueurs, celle des angles; la congruence des figures, relation distinctive d'un discours « mathématique » (l'égalité est le « propre » de la quantité, dira Aristote), fait son apparition. Le tracé de la figure, sa contemplation (θεωρία), l'énoncé de ses particularités les plus apparentes, le commentaire propre à en justifier l'affirmation aux yeux d'autrui, dans une civilisation du libre exercice de la parole, voilà sans doute les moments de ce savoir débutant, tels que nous pouvons les reconstituer. Au lieu d'être la fin ou l'occasion d'un calcul numérique particulier, la figure est interrogée en elle-même, invitée à exhiber ce qui la caractérise et la différencie d'une autre; elle devient en soi un objet d'étude, en tant qu'elle est le paradigme de configurations empiriques qui lui sont morphologiquement semblables à une autre échelle.

L'interprétation proposée est donc que, si les Ioniens ont été considérés par un auteur comme Eudème, disciple du Lycée, comme les pères de la Géométrie, c'est qu'ils ont inauguré la manière grecque de traiter la « figure », objet de contemplation, non seulement à des fins esthétiques, mais à des fins de connaissance. Il y a tout lieu de penser que les premiers des polygones réguliers, triangle équilatéral et carré, ont été avec le cercle, les objets privilégiés d'une méditation vouée à des analyses intuitives, car l'attention se porte d'abord aux formes particulières, c'est-à-dire régulières. Le triangle en général, quelconque, « scalène », est déjà une abstraction : sur le chemin qui y mène, on a sans doute découvert la classification des triangles et rencontré diverses propriétés, dont certaines seulement se retrouvent dans les *Eléments* que nous avons.

3. *Du VI^e au V^e siècle*

De l'obscur Mamercos jusqu'à Hippocrate de Chio, le « résumé » énumère seulement trois noms : Pythagore, Anaxagore de Clazomènes, Œnopide de Chio.

D'Anaxagore comme mathématicien nous savons peu de chose : Plutarque lui attribue une recherche de quadrature du cercle, Vitruve des études de perspective, *Les Rivaux* paraissent faire allusion à l'inclinaison de l'écliptique sur l'équateur[226] : tout cela pourrait fort bien s'accorder avec son explication, correcte en son principe, des éclipses de Soleil et de Lune[227]. Proclus ne le cite nulle part ailleurs.

Restent donc, après les Ioniens, l'Ecole de Pythagore et celle de Chio. Nous sommes incomparablement mieux documentés sur la seconde que sur la première. En ce qui concerne en effet le pythagorisme, on a pu dire que les informations deviennent d'autant plus abondantes et précises que l'on s'éloigne davantage de l'époque du fondateur, dont l'« acmè » peut être située vers 530 et dont les livres sont tous apocryphes. L'apparition d'un syncrétisme platono-pythagoricien dans l'Ancienne Académie a favorisé la fabrication de compilations apocryphes, qui s'échelonnent du II^e siècle avant l'ère chrétienne au 1^er. après, et prêtent à Pythagore lui-même des doctrines dont on ne peut affirmer qu'elles aient été les siennes, ou dont on peut même affirmer qu'elles ne l'ont pas été. L'attribution de résultats scientifiques procède de la même tendance. Quant à la personnalité même du fondateur, elle donne lieu à controverse et la question se pose avec sérieux de savoir s'il fut lui-même géomètre[228].

En revanche nous possédons, grâce à Simplicius, un long texte d'Eudème qui relate en détail la quadrature des lunules par Hippocrate de Chio. L'« acmè » de celui-ci, né sans doute aux environs de 470, peut être placée en 435, soit un siècle et demi après celle de Thalès. Il peut donc sembler pertinent de prendre connaissance de l'état de la Géométrie à cette époque, quitte à évaluer après coup ce qu'a pu être l'apport des Pythagoriciens dans l'intervalle.

L'Ecole de Chio remonte à Œnopide que le « résumé » cite comme appartenant à la génération qui précède Hippocrate. Proclus nous apprend qu'il a donné la solution de deux problèmes : mener la perpendiculaire à une droite donnée par un point ne lui appartenant

226. Plutarque, *De exil.*, 17, 607F; Vitruve, *De archit.* VI, Praefatio 11; *Rivaux*, 132 a.

227. Hippolyte, *Refut.* I, 8 = *Vors.* II, 59, A42 (9), p. 16, 24-28.

228. Sur le Pythagorisme, on pourra se reporter à Philip J.A., *Pythagoras and early pythagoreanism*, Toronto University Press, 1966, et Festugière A.J., Les mémoires pythagoriques cités par Alexandre Polyhistor, *Revue des Etudes grecques*, 58, 1945, 1-65.

pas, et construire, en un point d'une droite donnée, un angle égal à un angle donné[229]; la source indiquée, pour ce second problème, est encore Eudème, comme il doit l'être pour le premier. Il n'est pas vraisemblable qu'on n'ait jamais, avant Œnopide, construit une perpendiculaire, mais sans doute au moyen d'une équerre. Si Eudème mentionne ces deux problèmes, c'est probablement parce qu'Œnopide a donné la solution canonique, c'est-à-dire par la règle et le compas : la maîtrise opératoire de l'égalité des angles était alors acquise, l'étalon de mesure, l'angle droit, fixé, le tracé des figures devenait méthodique, on était sur la voie où l'existence mathématique pouvait se lier à l'effectivité d'une méthode de construction géométrique pure, les preuves d'existence étant considérées comme la matière des « problèmes »[230].

C'est en vue d'obtenir la quadrature du cercle qu'Hippocrate de Chio s'est attaqué à celle des lunules, qu'il a effectuée pour trois cas particuliers sur les cinq cas de lunules quarrables, avec en outre la quadrature d'une aire formée de la réunion d'une lunule et d'un cercle. Comme nous possédons, grâce à Eudème, les preuves qu'il donnait[231] et que Proclus nous apprend qu'il fut le premier à écrire des *Eléments*, il est possible de conjecturer, par l'analyse des preuves[232], ce que ces derniers pouvaient contenir, en admettant qu'ils contenaient au moins ce qui est explicitement utilisé dans les preuves. On aboutit à la liste suivante :

— Pour le L. I : les constructions de base (I, 9, 10, 11, 12, 23); les cas d'égalité des triangles, et annexes (I, 18, 19, 20, 24, 25); les propriétés et constructions relatives aux parallèles (I, 28, 29, 31); la somme des angles d'un triangle (I, 32); le théorème du triangle rectangle (I, 47).

— Pour le L. II : l'application d'une aire sur une droite avec excès d'un carré (II, 6); l'extension du théorème du triangle rectangle (II, 12, 13); la quadrature d'une figure rectiligne (II, 14, qui suppose I, 45).

229. *Pr.*, 283, 4; cf. *El.*, Prop. I, 12; *Pr.*, 333, 1; cf. *El.*, Prop. I, 23.

230. Proclus (*Pr.*, 80, 15) fait état d'un des successeurs d'Œnopide à la tête de l'Ecole de Chio — Zénodote — qui distinguait précisément de cette façon le problème du théorème; cf. *infra* ch. IV, § XIV, ainsi que le comm. au Post. 3.

231. Simplicius, *in Phys.*, 55, 26; 60, 22; 61, 5 - 68, 32 (Diels), cf. *Vors.* I, *42*, 3, 395, 36 - 396, 11.

232. Pour le détail de cette analyse, cf. *Tb.* II, 625-691.

— Pour le L. III : la propriété du rayon et de la corde perpendiculaire (III, 3); celles des angles au centre ou inscrits (III, 20, 21, 22, 26, 27); la comparaison des segments dans des cercles égaux (III, 28,29); la dichotomie d'un arc de cercle (III, 30); la généralisation de la propriété de l'angle inscrit dans un demi-cercle (III, 31); une Définition des segments semblables dans deux cercles, autre que III, Df. 11.

— Pour le L. IV : la circonscription d'un cercle à un polygone régulier (IV, 5, 9); la construction de l'hexagone (IV, 15).

D'autre part, Hippocrate utilise un lemme de proportionalité des segments circulaires semblables aux carrés de leurs bases qui, dans Euclide, peut être dérivé de XII, 2; il sait également construire, un segment de droite « a » étant donné, les carrés d'aire $3a^2$, $3/2$ (a^2), $6a^2$, et il sait que le carré du côté du triangle équilatéral inscrit dans le cercle de rayon R est $3R^2$, ce qui correspond à *El.*, XIII, 12. Il indique explicitement que les aires sont « en raison double » des longueurs, ce qui correspond à *El.*, VI, 19, 20, et l'on sait qu'il réduisit par ailleurs le problème de la duplication du cube à la recherche de deux moyennes proportionnelles[233], ce qui implique que les volumes sont « en raison triple » des longueurs.

Nous ne savons rien de la forme sous laquelle se présentaient les *Eléments* d'Hippocrate qui, certainement, méritaient ce nom par le caractère de leur contenu, sans pour autant comporter la présence d'énoncés liminaires de type axiomatique, quelques définitions sans doute exceptées. Nous mesurons néanmoins le chemin parcouru en un siècle et demi, puisqu'une bonne partie des IV premiers Livres d'Euclide est désormais acquise. En revanche la question des lignes irrationnelles est loin d'être élucidée et le détour par les carrés est la règle, bien que la notion de « moyenne proportionnelle » soit en usage. Enfin l'orientation théorique est maintenant pleinement affirmée : Hippocrate ne cherche pas à donner une valeur approchée pratique de la mesure du cercle; il cherche s'il est *possible* ou non de parvenir à une mesure exacte.

Quelle a été la part des Pythagoriciens dans cette évolution? Les Propositions du L. I qui leur sont explicitement attribuées ne sont que

233. *Arch.* III, 104, 11 (Eutocius) = *Vors.* I, *42*, 4, 396; et *Pr.*, 212, 24 - 213, 11.

deux : la valeur de la somme des angles du triangle[234], pour laquelle Proclus cite Eudème comme source : c'est ici l'idée d'additivité des angles qui est capitale; le théorème du triangle rectangle, connu historiquement comme « théorème de Pythagore », pour l'attribution duquel Proclus est très prudent[235]. D'autre part, Proclus, se référant encore à Eudème, affirme que l'application des aires, soit simple, soit par défaut ou par excès, est une découverte pythagoricienne[236], que Plutarque cite concurremment au théorème de Pythagore[237]. Les deux Propositions sont très voisines dans Euclide : I, 44 et I, 47, et d'elles découle tout le L. II.

Mais le « résumé », lui, cite la « constitution » des figures cosmiques, contribution qu'un scholie limite au cube, à la pyramide et au dodécaèdre[238]. Or Proclus attribue aux Pythagoriciens le théorème du pavage du plan[239], d'où l'on peut dériver aisément les règles de la formation d'angles solides au moyen de polygones réguliers. Le cas le plus intéressant est le dodécaèdre, seul à faire intervenir des faces pentagonales; le pentagramme fut l'emblème pythagoricien[240] et la construction du pentagone dépend du L. II des *Eléments*[241]. De même que le théorème du triangle rectangle, l'étude du pentagone conduit à la découverte de certaines lignes incommensurables entre elles. En ce qui concerne la question des « proportions » évoquée, semble-t-il, dans le « résumé », il est exclu qu'une théorie des grandeurs proportionnelles et des figures semblables puisse dater de Pythagore. Les proportions numériques en revanche ont pu être étudiées aux VI^e et V^e siècles et les trois moyennes ou « médiétés » (arithmétique, géométrique et harmonique) identifiées, en relation avec les recherches sur les intervalles

234. *Pr.*, 379, 1-18; cf. *El.*, Prop. I, 32.

235. *Pr.*, 426, 6-10; cf. *El.*, Prop. I, 47. Pour la discussion de l'histoire de ce théorème, cf. comm. *ad loc.*

236. *Pr.*, 419, 15-24; cf. *El.*, Prop. I, 44.

237. Plutarque, *Non posse suav. vivi sec. Epic.*, 11, 1094B et *Quaest. conviv.*, VIII, 2, 4, 720A.

238. Schol. n° 1 au L. XIII, in *EHS* V t.2, 291.

239. *Pr.*, 304, 11 - 305, 3; cette propriété résulte directement du Porisme de I, 15 et du théorème de la somme des angles I, 32.

240. Il s'agit du pentagone étoilé; cf. Lucien, *Pro lapsu in salute* § 5 (I, 447-448, éd. Jacobitz) et schol. au vers 609 des *Nuées* d'Aristophane.

241. Dans Euclide, la filiation des Prop. est la suivante : II, 6 → II, 11 → IV, 10 → IV, 11.

musicaux[242] : là aussi le problème des grandeurs irrationnelles se profile[243].

Restent les affirmations générales du « résumé » : que Pythagore ait prôné une conception « libérale » du savoir, c'est probable; qu'il ait repris « du début » l'examen des « principes », c'est excessif, quand Aristote nous apprend que les Pythagoriciens ne firent que commencer à poser des définitions, et encore maladroitement[244]; qu'il ait — lui ou ses successeurs — exploré les propriétés géométriques de façon non empirique, cela ne veut pas dire que le pythagorisme ait conçu les nombres ou les grandeurs comme de pures idéalités : Aristote ne cesse de dire qu'il confondait les nombres et le sensible. On ne peut oublier, en lisant Proclus, que la tradition pythagoricienne tardive, après Speusippe, a prêté au fondateur les vues de Platon[245].

4. *De Théodore de Cyrène à Eudoxe de Cnide :*

Dans le « résumé » Théodore de Cyrène est couplé avec Hippocrate de Chio, mais, s'ils furent sans doute à peu près contemporains, nous ne connaissons guère le premier que par le texte célèbre du *Théétète*[246]. D'après Platon, c'était un mathématicien complet : géomètre, calculateur, astronome, théoricien de la musique, le plus grand maître de l'époque[247]. Son enseignement aboutit à montrer, pour chaque carré dont la surface se mesure par un entier non carré parfait compris entre 3 et 17 inclus, que son côté est incommensurable à l'unité de longueur : ce résultat peut être obtenu au moyen des techniques fondées sur le L. II des *Eléments*; cela indique que le cas du côté du carré double du carré unité, évoqué dans le *Ménon*[248], était déjà bien

242. Cf. Plat., *Resp.*, 531 b 7-c 4.

243. V. *supra* n. 212.

244. Cf. Arist., *Met.* A, 5, 987a 20-27; Aristote parle là de la doctrine dans son ensemble, mais il semble que la conception qu'il décrit devait entacher aussi les définitions de géométrie.

245. Sur l'orientation initiale de la Géométrie grecque, ses liens avec l'astronomie sphérique, son attitude contemplative et sa valeur cognitive du « cosmos », l'activité d'astronome de la plupart des géomètres, la thématisation privilégiée de la droite, de l'angle et du cercle, cf. *Tb.* II, 714-723.

246. Plat., *Theaet.*, 147d-148b; Théodore est également cité, semble-t-il, par Xénophon, *Mémorables*, IV, 2, 10.

247. Plat., *Theaet.*, 145 a 5-6, c 6-d; et *Polit.*, 257 a 6-8.

248. Plat., *Men.*, 82 b sq. Sur l'interprétation du texte du *Théétète*, les controverses auxquelles il a donné lieu, les techniques susceptibles d'avoir été employées, le caractère particulier des preuves et l'arrêt sur le cas de $\sqrt{17}$, cf. *Tb.* III, 1309-1385.

connu. Ainsi, au temps de la jeunesse de Platon, l'existence des longueurs incommensurables, voilée chez Hippocrate, était devenue une question systématiquement étudiée, au moins par énumération des cas. Un autre passage du *Ménon* fait allusion à un problème qui semble relever de l'application des aires, et donc aussi du L. II[249], quoique la solution ne dépende pas seulement des *Eléments*.

Mais, tout en faisant allusion aux *loci mathematici* de Platon, Proclus souligne surtout l'impulsion donnée aux recherches mathématiques dans l'Académie, dont nous avons l'écho dans les Dialogues[250]. Sans parler du rôle que joue la science mathématique dans la doctrine métaphysique des Idées, la contribution de Platon aux mathématiques elles-mêmes se situe essentiellement sur le plan épistémologique et méthodologique et comprend la réflexion sur les postulations d'existence, les définitions, la distance qui sépare la figure de l'idée, le rôle des constructions, et la méthode analytique de raisonnement et de recherche[251]. Par rapport aux *Eléments*, c'est une contribution importante à la détermination de leur structure formelle, qui sera développée et complétée par Aristote, dont Proclus ne dit pas un mot.

Léodamas de Thasos que le « résumé » cite ensuite n'est pas autrement connu, mais Proclus lui-même le mentionne ailleurs, car Platon lui aurait enseigné précisément la méthode du raisonnement analytique, dont il se serait servi avec succès comme méthode heuristique[252]. En ce qui concerne Archytas de Tarente, le cas est différent ; c'est sa contribution aux *Eléments* qui n'apparaît pas de prime abord : en effet la solution de la duplication du cube par l'intersection d'un tore, d'un cylindre et d'un cône n'appartient pas aux *Eléments* ; mais il faut considérer que c'est une recherche de moyennes proportionnelles. Or, on doit reconnaître que ce qui nous est parvenu d'Archytas gravite

Il y a lieu de noter que les preuves envisagées, fondées sur un équivalent de l'« algorithme d'Euclide » (*El.*, VII, 1), mais appliqué aux segments de droite, sont incomplètes par défaut d'un lemme équivalent à la Prop. X, 1 d'Euclide.

249. Plat., *Men.*, 86 e 4-87 b 1. Cf. *HGM* I, 298-303, qui expose l'interprétation la plus généralement admise, et not. « Application des aires ».

250. V. en particulier *Resp.* VII, 528 a 7-528 e, à propos de la stéréométrie.

251. Une vue rapide de ces questions est donnée dans *HGM* I, 286-294. La méthode analytique est précisément indiquée dans le texte cité *supra* n. 249.

252. *Pr.*, 211, 18-23 ; cf. Diogène Laërce, III, 24 ; il est possible que l'heuristique dont il s'agit soit l'art de découvrir des lemmes cachés dans des démonstrations, ce qui permet de rendre ces dernières plus exactes : cf. *infra* n. 351.

autour du problème des médiétés[253], des proportions, des puissances, et finalement des racines carrées inexprimables. Aussi a-t-on pu lui attribuer la paternité d'une partie des Livres arithmétiques des *Eléments*, soit le L. VIII, en supposant le L. VII déjà acquis (mais grâce à qui ?), soit des séquences de Propositions des L. VII et VIII[254], ce qui est plus probable.

Sur l'histoire de l'Arithmétique, la plus ancienne source et sans doute la principale ne peut être que l'analyse des Dialogues de Platon. Il semble que celui-ci distingue une théorie du nombre (Arithmétique proprement dite) et une théorie des rapports (Logistique). La première est désignée comme science du pair et de l'impair : basée sur la divisibilité par 2, on en trouve des traces dans *El.*, IX, 21 à 36, et le témoignage d'Aristote permet d'attribuer aux Pythagoriciens des résultats en ce domaine par la technique de l'arithmo-géométrie[255]. Quant à la science des rapports, des témoignages tardifs des Néopythagoriciens permettent de faire remonter à l'ancienne Ecole la classification et la terminologie attestées chez Platon[256]. Archytas, en tant que Pythagoricien, est certainement héritier d'une tradition, mais la première mention du nombre des facteurs d'un nombre est dans Platon[257]. La présentation euclidienne des Livres arithmétiques reposant sur l'« algo-

253. Sur la duplication du cube, v. Eutocius, *in Arch. sphaer. et cyl.* II (*Arch.* III, 84) = *Vors.* I, *47*, A14, 425-426 ; d'autre part, dans *Vors.*, le Fragment B1 contient le préambule au *Traité d'Harmonie* sur la nature physique du son (Porphyre, *in Ptol. Harm.*, 56, éd. During), le Fragment B2 le texte sur les trois médiétés et la proportion musicale (Porphyre, *ibid.* 92) ; Ptolémée, *Harm.* I, 13, 30 (During) = *Vors.* I, *47*, A16, 428, nous a conservé la constitution arithmétique des échelles de sons d'Archytas dans les trois genres, qui fait appel à une méthode de décomposition d'un rapport épimore en deux autres généralisant ce qui sera la Prop. 6 de la *Division du Canon* d'Euclide ; Boèce, *De musica*, III, 11 = *Vors.* I, *47*, A19, 429-430, nous a conservé une Proposition d'Archytas sur l'impossibilité de scinder un épimore par un moyen proportionnel, qui correspond à la Prop. 3 de la *Division du Canon*, laquelle sert à montrer (Prop. 16) que « le ton n'est pas divisible en deux parties égales ni en plusieurs. »

254. Sur ce point, v. Van der Waerden, *Science Awakening*, Groningue, 1954, 110 sq ; *EEE*, 217-224 ; *Th.* III, 1224-1232.

255. Cf. Arstt., *Phys.*, 203 a 10-15 ; *Met.* A, 986 a 24 ; sur ce point v. *Th.* II, 845 sq (notamment 881-886) et 920-931. On entend par arithmo-géométrie la représentation spatiale des entiers par des configurations, à deux ou trois dimensions, de points discrets.

256. Par ex. *Resp.*, 546 c (« épitrite »). Sur la Logistique, v. *Th.* II, 758-797 et 797-845.

257. *Legg.*, 738 a-b, 771 c 1-6 ; cf. Itard J., *op. cit. supra* n. 21 : p. 68 et 213-214.

rithme d'Euclide » et la divisibilité en général n'est certainement pas pythagoricienne : c'est plus vraisemblablement l'œuvre des mathématiciens qui se succèdent, dans le « résumé », de Platon à Euclide, et dont nous savons seulement qu'ils perfectionnèrent sous tous les rapports les *Eléments*.

Dans le Dialogue de Platon dont il est le héros, Théétète d'Athènes déclare avoir défini comme « puissances », c'est-à-dire non exactement mesurables en longueur, les côtés de tous les carrés dont l'aire s'exprime par un entier non carré parfait : c'est reconnaître une première infinité de lignes irrationnelles (quadratiques), ce qui ne peut guère être affirmé sans que soit produite une démonstration générale[258]. De fait le *Commentaire* de Pappus au L. X, conservé en arabe[259], indique que, selon Eudème, Théétète distingua, d'après les trois médiétés, trois espèces de lignes irrationnelles, médiales, binomiales et apotomès : c'était jeter les bases de ce qui deviendra le L. X des *Eléments* ; un scholie à la Prop. X, 9, attribue d'ailleurs expressément à Théétète ce théorème qui correspond à l'énoncé du texte de Platon, tandis qu'un scholie au L. XIII lui attribue la construction de l'octaèdre et de l'icosaèdre[260] dont les arêtes sont des lignes irrationnelles. D'après le « résumé » de Proclus, Hermotime de Colophon poursuivit l'œuvre de Théétète et Euclide lui-même lui donna sa forme définitive[261].

Des deux mathématiciens dont les noms suivent, Néoclide et Léon, nous ne savons que ce que Proclus nous en dit là, c'est-à-dire qu'ils sont les continuateurs des grands noms qui précèdent. L'idée même de « diorisme » est connue de Platon, car elle est nettement exprimée dans le passage du *Ménon* déjà cité (cf. n. 249) et elle est liée à la méthode analytique : il faut donc penser que Léon en a plutôt

258. *Theaet.*, 147 d 8-148 b 3.

259. V. *Papp. X* et *supra* n. 69.

260. Schol. n° 62 au L. X, in *EHM* V, 450 ; in *EHS* V t.2, 113, 23 sq ; schol. n° 1 au L. XIII, in *EHM* V, 654 ; in *EHS* V t.2, 291, 5.

261. Il y a lieu de noter que la Prop. X, 9 dépend notamment de VIII, 11, laquelle à son tour dans Euclide dépend de Propositions du L. VII ; d'autre part la preuve générale d'irrationalité de la racine n^e d'un entier ou d'un rapport p/q *in minimis* se trouve dans les Prop. VIII, 6, 9 et 10 des *Eléments*. Sur ces questions v. *Th.* III, 1482-1519 et 1574-1585. Il est probable qu'au temps de Théétète, la Prop. X, 9 était rattachée à certaines séquences d'Archytas, mais que sa démonstration n'était pas exempte d'imperfections, dont les traces d'ailleurs subsistent dans Euclide.

systématisé l'usage, précisant les conditions d'existence de solutions de problèmes, là où l'on ne s'en préoccupait guère auparavant. C'est là indéniablement un travail de rédacteur d'*Eléments*. Depuis ceux d'Hippocrate de Chio, on peut approximativement mesurer le chemin parcouru. La grande nouveauté a résidé dans les divers modes d'approche et de traitement des lignes irrationnelles (ou encore des rapports inexprimables, ou des racines carrées inexprimables). Les techniques du L. II des *Eléments* demeurent l'outil principal de Théétète, mais Archytas a développé l'étude des médiétés et des proportions continues. Les nouveaux *Eléments* doivent nécessairement ou comporter une partie arithmétique ou se référer à des Eléments d'Arithmétique, traitant du pair et de l'impair, des rapports d'entiers, des médiétés. D'autre part, le contenu de ce qui formera les IV premiers Livres est perfectionné. Les L. X, XI, XIII sont déjà ébauchés à des degrés divers. En revanche, on ne voit pas qu'ait été constituée une théorie des figures semblables, objet du L. VI, autrement que de façon naïve ou bien à partir d'une définition géométrique des proportions autre que celle de l'actuel L. V. Quant à la forme, outre une meilleure sélection de ce qui doit figurer dans des *Eléments*, il est vraisemblable que ceux de Léon portaient attention à la structure logique des démonstrations, au caractère « hypothétique » de certains résultats, dépendant de conditions de possibilité, à la pertinence des Définitions, mais on ne peut supposer davantage.

5. *D'Eudoxe de Cnide à Euclide*

La période correspondant à cette partie du « résumé », quoique la plus récente, n'est pas la moins embarrassante. Proclus n'énumère pas moins de sept noms entre Eudoxe et Euclide, mais sur quatre d'entre eux nous ne savons quasiment rien, bien que l'un deux, selon la source qu'il utilise ici, ait rédigé des *Eléments*. C'est la raison pour laquelle, nous ne subdivisons pas la période par rapport à cet ouvrage, sur lequel nous sommes réduits aux hypothèses. D'autre part l'œuvre d'Aristote, dont l'épistémologie s'appuie sur de nombreuses références mathématiques[262], est susceptible d'avoir influé sur la conception des *Eléments*, selon des modalités que nous ignorons[263]. C'est précisément à

262. Ces textes ont été rassemblés par Heath, *Mathematics in Aristotle*, Oxford University Press, 1949, rééd. 1970.

263. Cela explique l'abondante littérature qui s'efforce de reconstituer cette ultime phase de la genèse des *Eléments* à partir d'indications éparses chez Aristote.

propos de l'œuvre du premier cité, Eudoxe de Cnide, que la question des relations entre l'aristotélisme et les mathématiques se présente.

D'après la critique récente, il conviendrait d'abaisser jusqu'en 391 la date de la naissance d'Eudoxe, qui serait donc venu s'installer à Athènes vers 360 et dont la maturité se situerait vers 350[264]. Le « résumé » le crédite de trois contributions, d'abord d'avoir été le premier à augmenter le nombre des théorèmes dits « généraux », formulation qui laisse entendre que, dans une situation où certains théorèmes étaient démontrables en toute généralité, d'autres en revanche ne l'étaient pas, et que par conséquent, s'il fut le premier à sortir de cette situation, c'est qu'il produisit une méthode nouvelle le permettant. Or plusieurs textes d'Aristote indiquent que la propriété d'une proportion de se conserver par permutation des termes moyens était établie « naguère » séparément pour les nombres, les lignes, les solides, les temps, tandis que « maintenant » la propriété est prouvée universellement[265]. Une telle allusion, supposant, semble-t-il, l'existence d'une méthode générale pour traiter des proportions, suggère un rapprochement qui a donné lieu à plusieurs hypothèses[266].

Proclus assure ensuite qu'aux trois « proportions », il en adjoignit trois autres. Ici le mot « proportion » a son sens le plus général et désigne en fait les médiétés. Les listes que donnent Nicomaque et Pappus font figurer comme 4ᵉ, 5ᵉ, et 6ᵉ, la subcontraire de la moyenne harmonique et les deux subcontraires de la moyenne géométrique.

264. V. à ce sujet Waschkies H.J., *Von Eudoxos zu Aristoteles*, Amsterdam, Grüner, 1977 (recension Caveing M., *Revue d'Histoire des Sciences*, XXXII/4, 1979, 357-360) et Lasserre F., *Die Fragmente der Eudoxos von Knidos*, Berlin, 1966. Eudoxe ne serait donc que de sept ans l'aîné d'Aristote. On sait qu'Aristote, tout comme Callippe, essaya d'améliorer la théorie des sphères homocentriques d'Eudoxe en astronomie planétaire (*Met.* Λ, 8, 1073 b 17-1074 a sq) et que par ailleurs il critique ses positions philosophiques (*Met.*, 991 a 17 et 1079 b 21). Si l'on place *ca.* 290 les *Eléments* d'Euclide, la période écoulée depuis la maturité d'Eudoxe serait de soixante ans, durée suffisante pour qu'y prenne place une nouvelle rédaction des *Eléments*, intermédiaire entre celle de Léon et celle d'Euclide.

265. Dans les *Eléments*, cette Proposition figure, pour les grandeurs, en V, 16, pour les nombres, en VII, 13. Les textes d'Aristote sont : *An. post.*, 74 a 17-25 ; 85 a 37- b 1 ; 99 a 8-11 : ce dernier texte introduit une nuance qui distingue, dans une certaine mesure, nombres et grandeurs. D'autre part Proclus (*Pr.*, 60, 20-26) indique, comme théorèmes communs à l'Arithmétique et à la Géométrie, la transformation des rapports par alternation, conversion, composition et séparation.

266. La question sera abordée plus amplement *infra*, au comm. du L. V.

Mais Jamblique attribue leur découverte tantôt à Eudoxe et tantôt à Archytas et Hippase[267]. Tannery d'autre part a fait remarquer que ces trois médiétés donnent lieu à des équations du second degré, et Knorr pense qu'en fait Eudoxe a étudié les conditions de commensurabilité des médiétés avec leurs termes, mettant en œuvre les méthodes de Théétète et développant ses résultats[268].

Troisièmement Eudoxe « accrut les résultats touchant la section », question mise en avant par Platon, qu'il traita au moyen de l'analyse. De quelle « section » s'agissait-il ? Des solutions divergentes ont été proposées[269]. On a remarqué notamment que les Prop. XIII, 1 à 5 constituent une étude de la « section d'or », mais elle est conduite selon la méthode du L. II et ces théorèmes paraissent triviaux pour l'époque d'Eudoxe. Plus récemment, P.H. Michel a suggéré qu'Eudoxe ait procédé à une étude systématique de la section d'une ligne droite en deux segments tels qu'avec la droite entière, ils forment une médiété, engendrant ainsi des « médiétés de partition », dont certaines irrationnelles, et Knorr remarque d'une part que toutes les lignes irrationnelles, à l'exception de la médiale, sont construites comme des sections de ligne, et croit pouvoir montrer d'autre part qu'Eudoxe a complété la classification de Théétète, en introduisant dans les *Eléments* les irrationnelles appelées « majeure » et « mineure », cette dernière apparaissant en XIII, 11 et 16[270].

267. Jamblique, *in Nicom.*, 101, 1-5 (pour Eudoxe) ; 116, 1-4 et 113, 16-18 (pour Archytas et Hippase).

268. *MSc.* I, 92-93 (cf. *HGM* I, 86-89) et *EEE*, 274-276.

269. La tradition, à laquelle s'est rallié Tannery (*GG*, 76), voulait y voir la section des solides, recherche qui eût précédé la découverte des sections coniques. Il ne peut guère s'agir de la *Division des figures*, dont le traité euclidien est mentionné par Proclus (*Pr.*, 69, 4) au moyen d'un terme différent (« division » et non « section »). Ver Eecke (*op. cit. supra.* n. 83 : p. 59, n. 4) pensait qu'Eudoxe avait anticipé sur le contenu des trois ouvrages d'Apollonius que décrit Pappus (*Papp.* II, 640-648 et 660-672) (cf. *HGM* II, 175-181) : il est vrai que ces questions font partie du « Trésor de l'analyse », mais par le fait même, elles ne font pas partie des *Eléments*. Bretschneider (*Die Geometrie und die Geometer vor Eukleides*, Leipzig, 1870, 167-169) souligna que la seule section dont une étude plus approfondie ait pu être proposée par Platon et qui ait eu à l'époque une réelle signification en Géométrie était la « section d'or » ou division d'une ligne en moyenne et extrême raison (*El.*, II, 11 et VI, 30). Dans *Hippias major*, 303 b 8- c 1, il est question de sommes, rationnelles ou non, de droites irrationnelles, et Proclus (*Pr.*, 60, 16-19) indique que le contenu du L. II est relatif aux « sections », avec la précision que seule la Prop. II, 11 n'a pas d'équivalent arithmétique.

270. Michel P.H., *op. cit. supra* n. 217 : 556-562, 576-590 ; *EEE*, 277-285.

Mais au témoignage de Proclus sur Eudoxe, nous devons ajouter celui d'Archimède. Celui-ci en effet lui attribue la démonstration du volume de la pyramide et du cône, ce qui correspond à *El.*, XII, 5 à 7, et 10, en précisant que Démocrite avait donné les énoncés exacts, quoique sans démonstration[271]. De plus Archimède indique que ces démonstrations eudoxéennes étaient acquises grâce à un lemme semblable à celui qu'il utilise, lui, pour la quadrature de la parabole et qui est connu aujourd'hui comme « l'axiome d'Archimède ». De fait, dans Euclide, les démonstrations de XII, 5 et 10 utilisent un lemme analogue qui est représenté par X, 1, nerf de la méthode d'exhaustion ; celle-ci, à son tour, présuppose la Df. V, 4, qui exprime ledit lemme sous une autre forme. Le témoignage d'Archimède autorise donc, semble-t-il, à attribuer à Eudoxe la méthode d'exhaustion et les Définitions dont elle dépend. Mais la Df. V, 4 ouvre aussi la voie à la Df. V, 5, d'où découle la « théorie des proportions » du L. V. Or le scholie n° 1 au L. V déclare que ses théories s'appliquent universellement aux diverses parties de la science mathématique, et que ce but général, ainsi que le Livre lui-même, sont, d'après certains commentateurs, la découverte d'Eudoxe. Nous voici donc revenus aux « théorèmes généraux » invoqués par Proclus. Sans croire que le L. V soit tout entier, dans sa forme actuelle, œuvre d'Eudoxe, on ne peut se refuser, devant ce faisceau de vraisemblances, à penser qu'on lui doit plus d'un théorème « général » sur les proportions appuyé sur les Définitions fondamentales du L. V[272].

271. Archimède, Lettre-Préface à Eratosthène à *De la Méthode* ; la Lettre-Préface à Dosithée à *De la Sphère et du Cylindre*, sans doute antérieure, confirme le rôle d'Eudoxe, mais sans la précision concernant Démocrite, probablement ignorée d'Archimède à la date de cette Lettre ; la Lettre-Préface à Dosithée à *La quadrature de la Parabole* fait également état de ces démonstrations et de celles qui leur sont comparables.

272. Sur Eudoxe, v. notamment Becker (Oskar), Eudoxos Studien, *Quellen und Studien zur Geschichte d. Mathematik, Astronomie und Physik*, Abt.B, 1933, 311-333 ; 1934, 369-387 ; 1936, 236-244, 370-388, 389-410. La discussion sur la théorie des proportions porte notamment sur la présentation de la théorie antérieurement au L. V. Aristote (*Top.*, 158 b 29-35) fait état d'une définition de la proportionnalité par le fait que, pour les deux couples de termes proportionnels, l'algorithme d'Euclide (soustractions alternées, cf. *El.*, VII, 1 et X, 2) franchit les mêmes étapes. On a voulu voir là une première forme de la théorie. Il faut remarquer que cet algorithme constitue une procédure effective de décision pour la détermination du PGCD de deux entiers et, par voie de conséquence, pour celle de la commune mesure de deux grandeurs commensurables. Pour les autres, le processus ne se termine pas ; il ne peut

Après Eudoxe, les *Eléments* de Léon devaient paraître dépassés, mais les diverses théories n'avaient certainement pas encore l'aspect euclidien. D'Amyclas d'Héraclée, nous ne savons rien d'important, mais ce n'est pas le cas pour Ménechme et Dinostrate. Le premier, second successeur d'Eudoxe à la tête de l'Ecole de Cyzique, est très probablement l'inventeur des trois coniques, qu'il utilisa vraisemblablement pour doubler le cube ; en outre il discuta des questions touchant la structure formelle des *Eléments*[273]. Quant à Dinostrate, il aurait utilisé une courbe, inventée par Hippias en vue de la trisection de l'angle, et l'aurait appliquée à la quadrature du cercle, ce qui lui valut le nom de « quadratrice ». En tant que disciples d'Eudoxe, on peut penser qu'ils travaillèrent dans sa ligne et que c'est à ce titre, indépendamment des résultats personnels qui les firent passer à la postérité, qu'ils « rendirent plus achevée la Géométrie entière ».

Que pouvons-nous dire ensuite des *Eléments* rédigés par Theudios de Magnésie, dont nous ne savons rien par ailleurs, même pas la date ? Qu'il est à peu près certain que c'est entre Eudoxe et Euclide que le L. VI fut conçu dans une forme proche de celle que lui donna Euclide, c'est-à-dire reprenant et généralisant à partir de la notion de similitude légitimée par la théorie des proportions du L. V un certain nombre de résultats importants établis déjà au L. II au moyen des aires. Cette reprise à elle seule témoigne d'une refonte du traité consécutive à l'œuvre d'Eudoxe. De plus, comme la prop. VI, 2 donne un critère géométrique simple de la proportionnalité de quatre segments de droite (connu sous le nom de « théorème de Thalès »), à savoir le

donc alors constituer une procédure effective de décision que si sa périodicité n'est pas infinie, *i.e.* s'il se reproduit identique à lui-même au terme d'un nombre fini d'étapes. Ce cas se rencontre seulement pour les segments de droite dont les carrés sont commensurables : il est alors possible, par les techniques du L. II, de montrer, par des comparaisons d'aires, que le « rapport » entre lesdits segments se reproduira indéfiniment et périodiquement pour des segments plus petits. Mais, même dans ce cas, il manque à la démonstration un critère de convergence, qui est fourni dans Euclide par X, 1, et dépend, comme il a été dit, du « lemme d'Eudoxe » (Df. V, 4). Une autre manière de procéder semble avoir été de démontrer d'abord la proportionnalité pour les cas commensurables, et de l'étendre ensuite aux cas incommensurables par réduction à l'absurde : c'est ainsi que procède Archimède dans *De l'Equilibre des figures planes*, I, Prop. 6 et 7 ; sur le problème posé par cette démonstration préeudoxéenne chez le Syracusain, alors qu'une preuve basée sur les Df. du L. V eût été possible, cf. Knorr W.R., Archimedes and the pre-Euclidean Proportion Theory, *Archives internationales d'Histoire des Sciences*, 28, n° 103, 1978, 184-189.

273. Sur ce point, cf. *Pr.*, 72, 78, 254, et *infra*, ch. IV, § XIV.

parallélisme, on peut penser que l'introduction du postulat des parallèles a dû être liée à la construction rigoureuse du concept de similitude. Tout cela était-il déjà acquis dans les *Eléments* de Theudios, dont Proclus nous dit qu'ils marquaient encore un progrès dans l'ordre des matières et la généralité des résultats? Nous l'ignorons, mais dans cette période l'œuvre d'Aristote recèle des échos d'une discussion sur le postulat. Quant à Athénée de Cyzique, lui aussi par ailleurs inconnu, on ne peut que noter son éventuelle appartenance à l'Ecole d'Eudoxe en considération de sa ville d'origine.

Nous ne sommes pas mieux renseignés sur Hermotime de Colophon, mais ce que nous en dit Proclus nous permet de situer sa contribution : il développa l'acquis d'Eudoxe et de Théétète, ces deux noms devant être rapprochés comme nos analyses antérieures le suggèrent. Nous avons vu qu'après Eudoxe, la voie s'ouvrait à de nombreux compléments, non seulement dans le cadre des futurs L. V et VI, mais surtout destinés à prendre place au L. X, et corrélativement aux L. XII et XIII, avant lesquels il fallait exposer le L. XI; la centaine de Propositions du L. X en particulier n'a probablement pas été obtenue en un jour. La mention d'un travail sur les *Lieux* peut faire regarder Hermotime comme source des *Lieux solides* d'Aristée ou des *Lieux plans* d'Apollonius décrits par Pappus.

Reste Philippe de Medma, dernier nommé avant Euclide par le « résumé ». L'identification avec Philippe d'Oponte est généralement admise. Il s'agirait donc de l'éditeur des *Lois* de Platon et de l'auteur présumé de l'*Epinomis*, essentiellement connu pour ses travaux d'astronomie, et notamment la théorie de la Lune. La notice de la *Souda* qui mentionne de lui, en mathématiques, trois traités : *Arithmétique*, *Médiétés*, *Sur les nombres polygonaux*, sur le contenu desquels nous ne savons rien, ne permet pas mieux que le texte de Proclus de saisir sa contribution aux *Eléments*, à moins qu'elle n'ait porté précisément, dans la ligne d'Archytas, sur les Livres arithmétiques.

Quelle est, au terme de cette genèse, la contribution propre d'Euclide? La réponse de Proclus est double. Sur le contenu d'abord, il s'agit de l'achèvement du travail d'Hermotime sur les incommensurables et les proportions; cela signifie que l'ensemble des L. V et X, et ce qui en procède, n'était pas encore en un ordre ni dans un état satisfaisants quand Euclide se mit au travail, et cela exclut les conclusions hâtives de certains historiens qui attribuent le L. V tel quel à Eudoxe et le L. X à Théétète. Sur la forme ensuite, il nous est dit

que la rigueur euclidienne est, pour une bonne part, due à Euclide, et que par conséquent on lui doit, semble-t-il, l'homogénéité, relative, du style démonstratif, ainsi que la systématicité, relative elle aussi, des propositions liminaires — axiomes, postulats, définitions — qui caractérisera son œuvre aux yeux de la postérité, et dont il nous reste à traiter maintenant.

CHAPITRE IV

La forme euclidienne

La forme euclidienne, c'est la forme démonstrative[274] qui expose les raisons pour lesquelles les résultats de la science sont nécessairement vrais : elle se distingue d'autres formes d'exposition, dont nous avons aussi des spécimens[275], dans lesquelles ces raisons ne sont pas données, mais les résultats commentés de divers points de vue. On sait qu'une théorie de la démonstration se trouve dans les *Seconds Analytiques* d'Aristote et nous aurons à voir ci-après si et dans quelle mesure elle a inspiré Euclide. Mais une question historique se présente la première : y a-t-il eu avant Euclide des traités scientifiques revêtant cette forme? Or c'est le cas effectivement des deux traités d'Autolycos de Pitane, *La sphère en mouvement* et *Levers et couchers héliaques*, alors

274. Les logiciens modernes entendent par « démonstration » dans un système logique formel une suite de formules telle que la dernière soit une thèse (universellement valide) obtenue par application des règles de déductibilité (par ex. le *modus ponens*) aux thèses figurant dans la suite et éventuellement aux thèses initiales du système (axiomes); une démonstration est donc une déduction vide d'hypothèses; si l'on part d'hypothèses, les thèses du système permettent de construire une déduction qui mène aux conséquences de l'hypothèse. Par extension et analogie, on peut appliquer cette terminologie à des systèmes autres que purement logiques, par exemple à des théories mathématiques, en adjoignant aux axiomes logiques des axiomes proprement mathématiques. *Dans la mesure où* la construction euclidienne part de propositions liminaires pour en déduire des propositions universelles jouant le rôle de « thèses » du système et grâce auxquelles on peut ultérieurement obtenir les conséquences d'une hypothèse déterminée introduite à volonté, le terme « démonstration » lui convient : c'est un chaînage ouvert de propositions validées dans le champ clos par les propositions liminaires.

275. Par exemple l'*Introduction Arithmétique* de Nicomaque de Gérase.

que la critique le considère comme l'aîné d'Euclide d'une vingtaine d'années[276]. Ce fait incline à penser que la forme trouvée dans le Corpus euclidien était canonique pour les sciences mathématiques (qui incluent l'astronomie, l'optique, la mécanique, l'harmonie) à la fin du IVe siècle.

D'autre part le texte d'Eudème, transcrit par Simplicius et consignant la quadrature des lunules d'Hippocrate de Chio, expose pas à pas les raisons d'Hippocrate : c'est une paraphrase très détaillée d'une déduction conduite à partir d'une hypothèse; tout se passe comme si on construisait une chaîne déductive en prenant pour point de départ une propriété dont l'interlocuteur tombe d'accord, ou qu'on a justifiée par ailleurs. On peut donc penser que les *Eléments* d'Hippocrate contenaient de telles chaînes. La question est de savoir quels étaient les points de départ. On constate aussi qu'Hippocrate étudie trois cas de figure possibles et tombe dans le paralogisme de croire qu'il a quarré toutes les espèces de lunules. On peut admettre que, dans les débuts de la science, on utilisait une argumentation d'accompagnement, guidée par l'intuition de la figure, et que ce « discours » s'est progressivement structuré en fonction d'exigences logiques de plus en plus précises provenant de la matière elle-même. Non seulement les figures peuvent être trompeuses, mais il y a des propriétés qui n'y sont jamais « visibles », par exemple l'incommensurabilité de deux segments de droite.

En ce qui concerne les « principes » de la science, c'est-à-dire les propositions liminaires, nous avons déjà dit qu'on ne peut rien attribuer de certain aux Pythagoriciens[277]. En admettant qu'ils se soient essayés aux définitions, on sait assez qu'une réflexion consistante en ce domaine dut attendre Socrate, même si elle ne s'est pas directement appliquée aux mathématiques. Certains historiens ont cru pouvoir placer dans l'Ecole d'Elée les origines de l'axiomatisation de ces sciences. Sans nier le rôle de cette Ecole dans la préhistoire de la Logique, sans oublier qu'Aristote fait de Zénon le père de la dialectique, au sens de l'art de découvrir les contradictions dans les conséquences de l'hypothèse admise par l'interlocuteur, ce qui est éminemment utile pour tester la consistance des propositions liminaires de la

276. Cf. *op. cit. supra* n. 216 : p. 8-10 et 14-15.
277. Cf. *supra* n. 244.

science[278] — nous rappellerons que les Eléates, en rejetant dans l'apparence les multiplicités et la divisibilité des grandeurs, privaient les mathématiques de tout caractère scientifique, et qu'on ne dispose d'aucun témoignage assignant à ces philosophes des énoncés explicites de principes mathématiques, et les tentatives pour leur en attribuer sont pures conjectures.

La jonction entre les préoccupations logiques issues de l'éléatisme et de la réflexion socratique avec les difficultés des mathématiciens (paralogismes du style d'Hippocrate, quadratures sophistiques, incommensurables) s'est faite dans l'Académie, dont nous avons déjà évoqué la contribution[279]. On y a réfléchi sur les objets premiers des mathématiques : l'unité arithmétique, le point, les espèces de la grandeur — ligne, surface, solide —, le droit et le courbe, l'angle, les figures, tant du point de vue de leurs définitions et de leurs relations, que de celui de leur existence. Platon semble dire aussi que les géomètres eux-mêmes, dans le droit fil de leur méthode qui consistait à poser des hypothèses, étaient en passe de remonter aux hypothèses les plus générales touchant l'existence, la nature et le choix des objets premiers dont toute la science pourrait découler de façon consistante[280].

Les importants remaniements du IVe siècle dans le domaine de la théorie des proportions, liés au développement de la théorie des lignes irrationnelles et à l'application de la méthode d'exhaustion, semblent cependant avoir été les plus puissants motifs pour qu'on s'acheminât vers l'aspect définitif du système des propositions liminaires des *Eléments*, d'une part parce qu'il fallait un critère géométrique simple de similitude, le parallélisme, d'autre part parce que l'affinement de la théorie de la mesure des grandeurs rendait sensible l'importance des axiomes de l'égalité. Des discussions théoriques qui durent avoir lieu, nous avons d'assez nombreux échos dans Aristote. Celui-ci de son côté constituait sa doctrine des « principes » de la science démonstrative, en distinguant leurs espèces, leur statut et leur rôle. Des exigences diverses s'étaient ainsi historiquement précisées dans un dialogue entre les mathématiciens créateurs et d'autre part les logiciens et épistémologues qu'étaient, à cette époque, les philosophes. C'est ainsi que dans

278. Cf. Caveing M., *Zénon d'Elée — Prolégomènes aux doctrines du continu*, Paris, Vrin, 1982, 139 sq.
279. Cf. *supra* ch. III, § XI, 4.
280. Cf. *Resp.* VI, 510 c -e.

la seconde moitié du IVe siècle, on pouvait vraisemblablement disposer d'un canon de la science démonstrative qu'Euclide allait pérenniser.

XII. Les principes

Les « principes » (ἀρχαί) sont les propositions liminaires qui constituent les points de départ des chaînes déductives. Les treize Livres des *Eléments* ne sont pas identiques à cet égard. Le L. I s'ouvre par des Définitions (ὅροι), au nombre de 23 ; d'autres Livres sont dans le même cas : le L. II avec 2 Df. ; le L. III avec 11 ; le L. IV avec 7 ; le L. V avec 18 ; le L. VI avec 4, dont une probablement interpolée ; le L. VII avec 22 ; le L. X en contient 16, qui ne sont pas toutes au début ; le L. XI avec 28. Seuls les L. VIII et IX, formant avec le L. VII les Livres arithmétiques, et les L. XII et XIII, formant avec le L. XI les Livres stéréométriques, n'en comportent pas. Au total Euclide utilise donc 130 Définitions. Ensuite, dans le L. I seulement, viennent 5 « Demandes » (αἰτήματα, en latin « postulata », dont nous avons fait « postulats ») suivies d'une 6e dans certains Mss. Viennent enfin 9 « Notions communes » (κοιναὶ ἔννοιαι, parfois appelées « axiomes »), dont certaines sont controversées.

La première question que posent ces trois ensembles d'énoncés est celle de leur statut et de leur fonction. On ne peut s'en remettre immédiatement au *Commentaire* de Proclus sans consulter au préalable les doctrines régnantes à l'époque, c'est-à-dire en fait celle d'Aristote.

C'est dans les *Seconds Analytiques* que sa conception est exposée, et il est d'autant plus instructif d'en prendre connaissance qu'il choisit ses exemples dans les mathématiques. Les principes d'une science démonstrative relèvent d'abord de deux points de vue qu'Aristote distingue : celui de la signification (point de vue sémantique), qui concerne les termes, celui de l'existence (point de vue ontologique), qui concerne les objets[281]. A ce premier clivage s'en ajoute un deuxième, qui le recoupe transversalement, et qui distingue les termes et les objets premiers d'une part, les termes et les objets (ou les propriétés) dérivés de l'autre[282]. Il faut ici noter que cette seconde distinction est

281. Le mot « objet » n'est évidemment pas d'Aristote, qui emploie volontiers dans ce passage le neutre pluriel.
282. *An. post.*, I, 10, 76 a 31-36.

tout aussi fondamentale que la première : il n'y a pas, chez Aristote, possibilité de transposer les rôles des termes premiers et des termes dérivés, donc pas d'équivalent de la conception « formelle » moderne d'un système déductif. La signification des termes correspond à des objets existants, selon un ordre logico-ontologique fondé dans la nature des choses : les objets premiers sont donc tels par essence. Un tel ordre assure une clôture sémantico-syntaxique du système des « objets ».

On obtient donc un tableau à quatre cases :

— la signification des termes premiers doit être *posée* ; ainsi en est-il de « unité », « droit » (par opposition à « courbe ») ;

— il en est de même des termes dérivés, comme « triangle » ;

— l'existence des objets premiers doit être *posée* : c'est le cas pour l'unité, la grandeur ;

— l'existence des autres objets (et des propriétés) doit être *démontrée*.

Tous les énoncés qui *posent* des significations ou des existences sont des *Thèses* : Aristote distingue celles qui posent des significations, et sont des *Définitions*, et celles qui posent des existences, qu'il appelle *Hypothèses*[283].

Cette classification n'épuise pourtant pas les diverses sortes d'énoncés liminaires. Il faut en effet examiner les principes de la science du point de vue de leur champ d'application. A cet égard, les choses dont l'existence est posée, ce sont les objets d'une science particulière : l'unité, de l'Arithmétique, le point et les lignes, de la Géométrie ; il en va de même, bien entendu, de la signification des termes : « pair », « impair », « carré », « cube », en Arithmétique, « ligne irrationnelle », « ligne brisée », « ligne de direction donnée », en Géométrie. Il existe pourtant des principes communs (κοινά) à l'ensemble des sciences démonstratives (« apodictiques »), par exemple que « si de choses égales, on retranche des choses égales, les restes sont égaux »[284]. Mais les énoncés de ce type fonctionnent dans chacune de ces sciences « par analogie », étant donné que les genres premiers de ces sciences sont différents : les « choses égales » ne sont donc pas les mêmes en

283. *An. post.*, I, 2, 72 a 15-24.
284. *Ibid.*, I, 10, 76 a 37-76 b 11 : c'est la N.C. 3 d'Euclide.

Arithmétique et en Géométrie par exemple, mais en chaque genre le principe produit les mêmes effets[285].

Résumant son analyse, Aristote déclare que, pour constituer une science apodictique, trois sortes de choses interviennent :

a) celles dont on pose l'existence, c'est-à-dire le genre dont ladite science est la théorie ;

b) les principes communs, encore appelés « axiomes », vérités premières qui président à l'enchaînement démonstratif ;

c) les propriétés, dont on ne pose de chacune que la signification[286].

On note ici l'identification des « principes communs » avec les « axiomes » (ou « jugements de raison »)[287]. On remarque qu'il peut y avoir un très grand nombre de Définitions, puisqu'elles ne disent rien de l'existence[288], tandis que les affections du genre (les propriétés) peuvent être multiples : démontrer l'existence des objets seconds ou des propriétés sera donc la fonction des problèmes ou des théorèmes. Aristote signale enfin que, parfois, l'un ou l'autre de ces trois éléments n'est pas explicité parce qu'il est clair pour tout le monde[289].

Reste une question cependant : quel est le statut logique de ces diverses sortes d'énoncés ? Les Axiomes sont à part : en effet, ils sont nécessaires par soi, étant indubitables au jugement de l'intellect ; nerf de la démonstration, ce sont des médiateurs entre les étapes du raisonnement, à qui ils communiquent leur caractère de nécessité[290]. Tel

285. Sur cette question v. en particulier *op. cit.* I, 7, le chapitre sur « l'incommunicabilité des genres », et spécialement l'impossibilité d'appliquer la démonstration arithmétique aux propriétés des grandeurs : 75 b 4-5.
286. *Ibid.*, I, 10, 76 b 11-16.
287. Les références au caractère « commun » de ces principes sont nombreuses ; notons : *An. post.*, I, 7, 75 b 2-3 ; I, 11, 77 a 30 ; *Met.*, 996 b 28, où ils sont désignés par κοιναὶ δόξαι (« jugements communs ») ; 997 a 19-21, avec la même expression ; 1061 b 19-25. Proclus (*Pr.*, 194, 8-9) note qu'axiome et notion commune sont une seule et même chose chez Aristote et les géomètres.
Parmi les notions « communes » se trouvent le principe de non-contradiction et celui du tiers-exclu (*An. post.*, I, 11), mais, comme ceux-ci sont communs à *toutes* les sciences ainsi qu'à la *Dialectique*, il n'y a nul besoin de les énoncer en tête d'un traité d'une science donnée. Quant aux modes d'inférence autorisés, ils ne sont pas explicités : la formalisation des mathématiques est, comme on sait, chose récente.
288. *Ibid.*, 76 b 35.
289. *Ibid.*, 76 b 16-22.
290. *Ibid.*, I, 2, 72 a 16-18, où figure le mot « axiome » ; I, 10, 23-27 ; le caractère indémontrable des axiomes est amplement discuté dans *Met.*, 996 b 26-997 a 14 et 1005 a 19 sq.

n'est pas le cas des autres énoncés liminaires, qui sont de simples Thèses : on a déjà dit que celles-ci étaient soit des Définitions, qui n'ont besoin que d'être comprises et ne sont pas des propositions quantifiées[291], soit des Hypothèses, portant sur des existences. Sur celles-ci Aristote ajoute quelques précisions : les hypothèses initiales d'une science, hypothèses au sens absolu, ne sont pas susceptibles de démonstration[292] ; mais il y a aussi des hypothèses que, dans un contexte didactique, le maître pose sans démonstration : c'est une hypothèse relativement à l'élève et celui-ci peut lui donner son assentiment ; dans le cas contraire, cette même supposition est un Postulat (αἴτημα)[293] : un postulat est donc une hypothèse contestée en attente de démonstration[294].

Aristote enfin souligne que le géomètre ne se sert pas d'hypothèses fausses quand il considère telle ligne tracée comme une droite et lui donne un pied de long (ce qui revient à poser un segment unité), car en réalité il ne tire aucune conclusion du tracé particulier dont il parle, mais seulement des notions que la figure illustre[295]. Dans la mesure où des hypothèses telles que : mener une droite, la prolonger, décrire un cercle, ont pu être contestées au sens où ici Aristote l'indique, on peut comprendre que les géomètres en aient fait des Postulats. Mais il reste que le Postulat a un statut hybride : si une procédure de décision existait quant à sa démontrabilité, il basculerait aussitôt soit du côté des théorèmes, soit du côté des axiomes indémontrables, sauf qu'il n'est pas, comme eux, indubitable en soi.

291. La définition pose l'équivalence du *definiens* et du *definiendum*, et de ce fait est toujours convertible ; cf. *op. cit.* 76 a 35-37 et 77 a 3-4.

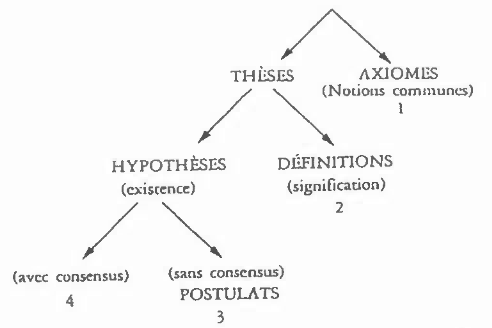
292. Cf. *op. cit.* 72 a 15 ; les positions d'existence des genres premiers sont en effet les résultats du débat dialectique qui a éliminé les hypothèses inconsistantes en examinant leurs conséquences ; l'hypothèse admise n'est pas démontrée, mais validée par le caractère non-contradictoire de ses conséquences ; être démontrée signifierait dépendre à son tour d'une hypothèse antérieure plus primitive, et ainsi de suite à l'infini.

293. *Op. cit.*, I, 10, 27-34.

294. Il suit de là, sur le plan de la logique pure, que, si le postulat s'avère, contre toute attente, indémontrable, même par l'absurde, c'est que sa contradictoire aura été trouvée consistante, donc pourra constituer l'hypothèse d'une science indépendante ; on voit là le principe logique de l'histoire du 5e. Postulat d'Euclide et de la genèse des Géométries non-euclidiennes.

295. *Op. cit.*, I, 10, 76 b 39-77 a 3.

On peut représenter les relations entre les diverses sortes d'énoncés distingués par Aristote au moyen de l'arbre suivant :



Cet arbre se termine en quatre points, dont les trois premiers correspondent — sous bénéfice d'inventaire quant à leurs caractéristiques — aux trois sortes d'énoncés liminaires d'Euclide. Quant au quatrième, il correspond à des hypothèses d'existence non explicitées par Euclide. C'est un fait que, concernant par exemple l'existence de l'unité arithmétique ou de la grandeur géométrique, elles seraient de celles qui n'ont jamais été contestées dans la tradition mathématique grecque, puisqu'elles sont au fondement même de ces sciences. Nous avons vu que dans un tel cas Aristote autorise l'admission tacite, et Euclide commence directement ses Définitions en utilisant les espèces de la grandeur, comme longueur, largeur et profondeur, traitant l'existence de la grandeur comme admise et le sens de ces termes comme connu.

Un dernier point demande éclaircissement : que faut-il entendre par « existence » ? Nous savons qu'il ne s'agit pas pour Aristote d'une ontologie formelle. Les objets premiers de la science, sont, dans sa conception, antérieurs à la science. En particulier les objets mathématiques existent en puissance dans les choses sensibles, dont ils ne sont pas séparables ontologiquement, bien qu'ils puissent en être isolés par l'abstraction et conçus à part par l'intellect : ils renvoient donc à une « nature ». Si l'existence peut reposer, pour les objets seconds et com-

posés, sur des constructions finitistes, elle se fonde, pour les objets simples et premiers, sur l'existence naturelle d'êtres dont les êtres mathématiques sont abstraits. C'est ainsi que la connaissance de la grandeur, comme quantité continue, ressortit éminemment à la Physique. Par là s'expliquent le caractère ***absolument*** premier des principes ***en tant qu'éléments de la chaîne déductive*** — car ils ont leur origine à l'extérieur — et la non-limitation du nombre des Définitions et des Hypothèses, autrement dit : que chaque chaîne doive avoir un point de départ, mais que le nombre des points de départ ne soit pas limité (bien que le domaine soit clos). En bref, Aristote ne postule rien de comparable à ce que nous entendons par « axiomatisabilité » d'une théorie. La triplicité des sortes d'énoncés liminaires trouve ainsi son fondement : il faut des Hypothèses pour les existences, des Définitions pour les essences, des Axiomes comme nerf du raisonnement.

Proclus, donne un exposé de cette trichotomie[296] en montrant que la distribution des énoncés liminaires euclidiens est conforme à l'enseignement d'Aristote, mais il en décrit les espèces sous les noms d'« hypothèses, postulats et axiomes » : ce dernier terme, étant équivalent de « notions communes », s'entend bien, mais le premier, en lieu et place de « définitions », a de quoi surprendre. Heath suggère que Proclus avait à l'esprit le passage de *La République*[297], où il est dit que les mathématiciens supposent la connaissance du pair, de l'impair, des figures, etc. et en font le point de départ de leurs raisonnements sans en rendre autrement compte : là serait la source de sa confusion. Nous pensons qu'il n'y a pas confusion : la thèse de Platon n'est pas celle d'Aristote, les êtres mathématiques pour lui n'existent pas en puissance dans le sensible et ne sont pas des abstraits ; bien plutôt, en tant qu'idéalités, leur essence coïncide avec leur existence, et pour le platonicien Proclus les Définitions pourraient bien être en même temps des Hypothèses qui posent l'existence idéale des choses définies[298]. Reste à savoir si cette interprétation des Définitions euclidiennes comme des hypothèses d'existence est compatible avec la pra-

296. *Pr.*, 75, 5 - 77, 6 ; V. aussi 178, 1-2.

297 Cité *supra* n. 280 ; *TBE* I, 122.

298. La preuve en est que Proclus (*Pr.*, 178, 7-8) réunit ensemble les hypothèses et « ce qu'on appelle définitions », après avoir rappelé les termes de sa trichotomie.

tique euclidienne de construire, dans des « problèmes », les objets préalablement définis[299].

En un autre texte, Proclus revient sur la distinction entre axiomes et postulats, en faisant état de conceptions qui prouvent que la doctrine d'Aristote sur ce point n'était pas acceptée sans discussion[300]. Il distingue trois doctrines à ce sujet. La première est celle de Geminus qui voit entre axiome et postulat la même différence qu'entre théorème et problème : le premier énonce une connaissance simple et immédiate (alors que le théorème est médiat), tandis que le second demande qu'on puisse effectuer une construction simple (alors que le problème traite d'une construction complexe). Selon ce critère, remarque Proclus, les 4e et 5e Postulats d'Euclide ne seraient pas des postulats[301]. Le fait que Proclus les traite néanmoins comme tels montre qu'il ne partage pas les vues de Geminus.

La seconde conception distingue les Postulats comme particuliers à la Géométrie des Axiomes comme communs à toutes les sciences de la quantité. Selon ce critère, note Proclus, l'énoncé que « deux droites ne peuvent enclore un espace », que certains « même maintenant » ajoutent comme Axiome ne saurait en être un[302]. Sur ce point cependant Proclus soutient une doctrine particulière, selon laquelle il y aurait des Axiomes propres à l'Arithmétique, d'autres à la Géométrie, et d'autres communs, et qu'il en va de même pour les Postulats. Il y a lieu de remarquer que les Livres arithmétiques d'Euclide ne sont précédés d'aucun postulat et que les « Demandes » du L. I concernent

299. Proclus, à la fin du texte cité (*Pr.*, 77, 2-6), donne l'intéressante information que souvent tous les énoncés liminaires sont appelés « hypothèses », tout comme les Stoïciens appellent « axiome » tout jugement simple (*i.e.* non-dérivé d'un autre) : dès cette époque une tendance se faisait donc déjà jour qui allait dans le sens moderne d'unification de l'axiomatique, ou d'une conception hypothético-déductive.

300. *Pr.*, 178, 1 - 184, 29 : de ce long texte, nous nous contenterons de résumer l'essentiel. Précisons d'autre part que, si nous avons exposé la doctrine aristotélicienne, c'est moins pour y rattacher Euclide à tout prix que pour permettre la comparaison avec le commentaire, que le lecteur trouvera *ad loc.*, de son « axiomatique » et faire ressortir les difficultés rencontrées dans la mise en forme effective d'une théorie mathématique.

301. C'est le parti adopté par l'édition *princeps* de Bâle et celle de Gregory qui placent les 4e et 5e Postulats parmi les Axiomes, avec les nos 10 et 11.

302. Cet énoncé est le 9e Axiome dans le texte de Heiberg qui, malgré la remarque de Proclus, le reprend des Mss. *V, b, p,* et *B* ; en revanche les Mss. *P, F, V* m. 2, ont cet énoncé comme 6e Postulat, mais Proclus le rejette de toute façon comme pouvant être établi par démonstration : *Pr.*, 183, 7 ; 184, 8 et 196, 23.

exclusivement la Géométrie. Cette particularité nourrit, dès l'Antiquité, la pensée que l'Arithmétique est notionnellement antérieure à la Géométrie. L'ordre des *Eléments* semble démentir cette antériorité ; le problème se concentre autour de l'interprétation du rapport entre le L. V et les Livres arithmétiques.

Le troisième critère est lui aussi aristotélicien : il s'agit du caractère « démontrable » des Postulats et indémontrable des Axiomes. Là, dit Proclus, fut l'erreur d'Apollonius de chercher des démonstrations pour les Axiomes d'Euclide[303], encore qu'on ne doive point faire figurer parmi eux des énoncés qui sont de simples corollaires des Notions communes[304]. Cependant Proclus souligne que le caractère essentiel des Axiomes, selon Aristote et les géomètres, est leur auto-évidence et leur immédiateté[305]. Il n'est pas pour autant partisan de les réduire à un minimum, comme Héron qui n'accepte que les trois premiers, et il justifie les Axiomes 7 et 8[306]. Au total donc Proclus reconnaît 5 Axiomes (n^{os} 1, 2, 3, 7, 8), ainsi que 5 Postulats. Mis à part l'Axiome 9, maintenu assez inexplicablement, Heiberg entérine ce choix.

Les cinq Axiomes ainsi retenus satisfont apparemment les réquisits d'Aristote concernant les notions communes. Un doute cependant peut s'élever concernant la généralité de l'énoncé : « les choses qui coïncident sont égales ». En fait, partant d'une situation de congruence géométrique, l'énoncé demeure un axiome de l'équivalence en mesure comme les autres ; mais, à leur différence, il est sans effet en Arithmétique. « Egal » s'entend, en grec, aussi bien des figures équivalentes en mesure que de l'égalité arithmétique. Selon Aristote (*Cat.* 6a26), l'égal (et l'inégal) est le propre de la quantité : que les notions communes d'Euclide soient des axiomes de l'égalité est un point d'accord avec sa doctrine.

303. Proclus revient encore sur les tentatives d'Apollonius en *Pr.*, 194, 20 - 195, 22.

304. *Pr.*, 196, 25 - 197, 5 ; sur cette base, Proclus rejette les Axiomes n^{os} 4, 5, 6, comme démontrables au moyen des précédents ; ils semblent s'être introduits dans le texte à partir du Commentaire de Pappus, et l'Axiome n° 4 se trouve dans tous les Mss, même de source pré-théonine (*P*) ; cf. Proclus (*Pr.*, 197, 6 - 198, 15) qui déclare au contraire qu'ils sont à bon droit omis dans la plupart des copies.

305. *Pr.*, 194, 4-8.

306. *Pr.*, 196, 15-21.

Il faut ajouter toutefois qu'Euclide, non seulement admet tacitement des « principes connus de tous », ce qui est autorisé par Aristote, mais aussi un assez grand nombre d'énoncés que nous considérons comme indispensables, notamment ceux qui concernent les propriétés structurales des « opérations », notion qui n'est pas thématisée dans la mathématique grecque.

Pour les cinq Postulats, la situation d'Euclide vis-à-vis d'Aristote est moins claire, pour autant que, selon le Stagyrite, un postulat est une variété d'hypothèse, laquelle semble vouée à poser des existences. Or il est patent que les Postulats 4 et 5 sont à cet égard différents des trois premiers : si ceux-ci affirment bien, semble-t-il, l'existence possible de la droite indéfiniment prolongée et du cercle de rayon quelconque, les deux autres paraissent s'adapter difficilement à ce schéma ; le Post. 4 pose une relation d'égalité entre objets déterminés, le Post. 5 une relation d'intersection entre droites déterminées. En fait ils énoncent des propriétés, dont on ne peut certes pas dire, d'un point de vue aristotélicien, qu'elles n'existent pas, mais qui devraient, en bonne doctrine, être démontrées. Sous cet angle d'ailleurs, et aussi en tant que particuliers à la Géométrie, ce sont bien des postulats, c'est-à-dire des hypothèses contestées, en attente de démonstration. Si on cherche à les démontrer, on peut montrer qu'on doit, pour ce faire, supposer d'autres postulats préalables. On admettra donc que ce sont des énoncés portant sur l'existence de propriétés, et que, moyennant cette extension de la détermination aristotélicienne, on ne peut pas considérer qu'ils la démentent formellement.

XIII. LES DÉFINITIONS

Nous avons laissé en suspens la question des Définitions, soulevée par le terme « hypothèse » employé par Proclus à leur sujet. Elle mérite d'être vue d'un peu plus près.

La doctrine constante d'Aristote est que la définition ne dit rien de l'existence ou de la non-existence de la chose définie : elle répond à la question « qu'est-elle ? », non à la question « est-elle ? » Cependant la nécessaire distinction entre ces deux questions, indispensable pour décider de quoi il y a démonstration dans la connaissance scientifique, ne doit pas faire oublier le lien qui les unit : « car ce qui n'est pas, personne ne sait ce qu'il est : on ne sait alors que ce que signifie le

discours ou le nom, comme quand je dis « bouc-cerf », mais ce qu'est un bouc-cerf, c'est impossible de le savoir »[307]. Cet exemple célèbre rappelle qu'on n'est pas alors dans le domaine de la science, mais dans celui de la fiction. C'est dans le cours du développement de sa thèse (opposée notamment à la thèse platonicienne) « qu'il n'y a pas de démonstration de l'essence », qu'Aristote expose que la définition elle-même ne peut être considérée comme preuve de l'essence[308]. Ce n'est pas l'essence qu'il faut prouver, mais que l'essence, telle que la définition l'exprime, correspond à une réalité, en sorte que le nom n'est pas l'expression d'une fiction arbitraire comme « bouc-cerf ». Or, si la définition exprime ce qu'est la chose que le nom désigne, c'est que cette chose existe, sinon on ne peut dire ce qu'elle est. Il faut donc s'entendre quand on dit que les définitions posent des significations, et distinguer entre les significations purement verbales, comme celle de l'ensemble « bouc-cerf », et les significations fondées dans l'existence de la chose définie[309]. En dernière analyse, c'est cette existence qui rend possible une définition ; or elle est posée par hypothèse ou démontrée : « ce que signifie le [terme] "triangle", le géomètre le pose, qu'il existe, il le prouve »[310].

Selon Aristote par conséquent, les définitions que le géomètre pose au départ pour fixer le sens des termes qu'il se propose d'employer (car la situation n'est pas la même dans la Physique), sont en quelque façon en attente de la démonstration d'existence de la chose qu'elles définissent, à moins qu'elles n'enveloppent, à titre d'hypothèse tacite, la position d'existence des genres premiers de la science. Pour prendre un exemple dans Euclide, le carré est défini par la Df. I,22, il est

307. *An. post.*, II, 92 b 5-8.

308. V. *ibid.* II, les ch. 4, 5, 6, 7.

309. C'est apparemment cette distinction qu'une tradition scolastique a interprété au moyen de la distinction entre « définitions nominales » et « définitions réelles », qui embrouille la question : il n'y a pas de définition du « bouc-cerf » (on ne sait ce que c'est et c'est impossible de le savoir) ; toutes les vraies définitions, qui sont des définitions vraies, expriment la signification du nom en énonçant l'essence de la chose définie (cf. *ibid.* 92 b 26-34). Le caractère linguistiquement arbitraire du signifiant par rapport au signifié n'est pas en cause ici, non plus que la liberté de création terminologique dans les « langues » techniques, y compris en mathématiques.

310. *An. post.*, II, 92 b 15-16. Aristote ajoute que, si la définition prouvait quoi que ce soit, ce ne pourrait être que ce qu'est le triangle, et qu'alors, en sachant ce qu'il est par la définition, on ne saurait pas s'il est, ce qui est impossible ; impossibilité confirmée en 93a20.

construit en I,46, donc son existence géométrique est alors prouvée : or Euclide ne présuppose jamais l'existence du carré, c'est-à-dire ne le considère pas comme donné, avant I,46[311]. Oublier cette précaution, c'est-à-dire utiliser les définitions dans les démonstrations avant d'avoir prouvé l'existence du défini, est source de démonstrations illusoires. Le danger est que la définition ne contienne des attributs incompatibles — danger qui s'accroît à proportion de la complexité de la définition — c'est-à-dire des attributs dont la présence simultanée peut être démontrée impossible sur la base des principes admis pour la science considérée. Tel serait le cas, par exemple, de la définition du décaèdre régulier, solide limité par dix faces polygonales, régulières, semblables et égales, dont la construction s'avérerait, bien entendu, impossible[312]. Dans le cas d'une définition contradictoire, l'impossibilité de la construction révèle l'inexistence de la chose, de même que lorsque la chose définie a pu être construite, cette preuve d'existence atteste la consistance de la définition. On voit par là que les définitions ne sauraient être arbitraires et que, d'autre part, la conception d'Aristote, qu'on pourrait croire pertinente pour les seuls êtres de la nature, l'est tout autant pour les objets mathématiques. Dans ce dernier cas simplement, la preuve d'existence, satisfaisant au critère de consistance, est fournie par la construction, au lieu de l'être par l'expérience[313].

Quant aux définitions qui enveloppent l'admission tacite de l'existence des genres premiers, et qui par conséquent ne correspondent pas à des démonstrations ultérieures d'existence, les *Eléments* en comptent quelques-unes. On citera celles qui supposent l'existence de la grandeur, Df. I,2 et 5, V,1 et 2, XI,1 ; de l'unité et du nombre entier, Df. VII,1 et 2. Quant aux Df. I,4 et 15, il a été dit qu'elles doivent s'entendre accompagnées des Postulats d'existence 1,2 et 3. On pourra

311. L'exemple est donné par Saccheri, dans sa *Logica demonstrativa*, 1697 ; *TBE* I, 145.

312. Il s'agit de l'exemple bien connu de Leibniz ; *TBE* I, 145.

313. On voit combien est erronée l'idée répandue que le mathématicien serait « libre de ses définitions », car, même pour ceux qui rejettent un constructivisme finitiste, la non-contradiction, de quelque façon qu'on l'établisse, demeure nécessairement le critère d'existence mathématique.

vérifier dans le texte que les autres Définitions, à l'exception toutefois de Df. I,7, donnent lieu à la construction du défini[314].

Selon Aristote, les définitions scientifiques, outre qu'elles ne disent rien en elles-mêmes de l'existence, doivent satisfaire quelques exigence positives.

La première concerne les attributs qui entrent dans la définition quand ils ont une extension plus grande qu'elle, c'est-à-dire que, tout en appartenant universellement au « definiendum », ils appartiennent néanmoins aussi à un autre sujet. Aristote souligne qu'alors c'est la conjonction de tels attributs qui réalise la coextensivité du « definiens » et du « definiendum », c'est-à-dire qui constitue précisément la « définition » comme telle[315]. En termes modernes et d'un point de vue extensionnel, l'extension du sujet est donc l'intersection de celles des attributs (ou de leurs négations). Un bon exemple est fourni par la Df. I,22, qui donne en fait les définitions des espèces de quadrilatères : les extensions des termes définis sont disjointes, car ce qui est défini, ce sont les « espèces infimes », indivisibles, chacune dans sa spécificité. Un carré n'est en aucune façon un rectangle, ce qui serait contradictoire dans les termes, puisque ce serait dire qu'une figure équilatérale est une sorte de figure non-équilatérale. Un rhomboïde a ses angles et ses côtés opposés égaux par paires, mais n'est ni équilatéral ni doté d'un angle droit, et par suite se distingue et du losange et du rectangle et du carré. En revanche le parallélogramme qui les englobe n'est pas défini, bien que le terme soit fréquemment utilisé dans les *Eléments*, car il ne constitue pas une espèce ultime[316]. Cela se comprend si l'on n'oublie pas que le point de vue d'Aristote n'est pas extensionnel : les attributs n'appartiennent essentiellement qu'aux seules espèces simples, et aux autres par l'intermédiaire de celles-ci. Aussi la liste de la Df. I,22 commence-t-elle par le carré, qui est le

314. Faisant retour à la question de savoir si Proclus est fondé à appeler les Définitions des Hypothèses, nous répondrons que, du point de vue aristotélicien, les Définitions accompagnées de preuves ou de postulations d'existence du défini qui les suivent, sont, à leur ordre d'entrée en scène, des thèses provisoires, donc en effet des sortes d'hypothèses transformables en thèses définitives. Les Définitions se rapportant aux genres premiers sont d'emblée définitives et leur justification appartient à la métathéorie de la science considérée, par exemple à la philosophie de la nature et/ou à la théorie des catégories.

315. *An. post.*, II, 13, 96 a 24-96 b 14.

316. *Ibid.*, 96 b 15-24.

seul à être défini par une conjonction d'attributs positifs et qui sera le seul dont la construction sera explicitement effectuée (comme une spécification de celle du parallélogramme d'ailleurs), celle des autres quadrilatères étant alors triviale.

Une seconde exigence concerne les termes qui entrent dans les définitions : ils doivent désigner des choses antérieures au « definiendum » et mieux connues que lui[317]. Il est clair que « mieux connu » ne peut s'entendre « relativement à nous », car il pourrait alors y avoir autant de définitions que d'esprits, et même plusieurs pour le même en fonction du temps. C'est donc au sens absolu qu'il faut prendre ces mots. Par exemple, chez les Platoniciens, définir les êtres géométriques pouvait s'effectuer de deux manières. La voie « anagogique » (inductive) procédait en partant du corps, par réduction des dimensions, pour obtenir la séquence : solide, surface, ligne, point : on considère, à chaque étape, que l'être géométrique possède des extrémités qui sont de l'espèce de l'être suivant. Les principes suprêmes de tels êtres sont donc l'Illimité (c'est-à-dire la grandeur continue indéterminée, comme infini actuel) et la Limite (*i.e.* l'extrémité, le bord). La deuxième voie est génético-ontologique : elle montre la genèse réelle des êtres : partant de l'Un, qui est la Limite première, elle procède par extension des dimensions selon les spécifications de la Dyade indéterminée Grand /Petit, qui est l'Illimité en-soi : Long/Court, Large/Etroit, Profond /Plat. Mais cette extension est un mouvement générateur : par exemple, c'est le « flux » du point qui engendre la ligne, etc. On obtient la séquence : Un, point, ligne, surface, solide.

Dans les *Topiques*[317], on trouve une critique logique de cette conception. Selon Aristote, la première voie des Platoniciens conduit à des « hysteron-proteron » : on définit le plus simple, qui est logiquement antérieur, au moyen du plus composé, logiquement postérieur, puisqu'on le définit comme sa limite ; quant à la seconde voie, si l'ordre y est acceptable, l'introduction du mouvement dans la définition des êtres mathématiques ne saurait aucunement l'être.

Dans les *Eléments*, Euclide prend comme point de départ le point d'aboutissement de la première voie platonicienne : ce qui le montre, c'est que la Df. I,1 est purement négative, comme si elle ne concernait que le résidu d'un processus régressif. Le point est défini par la

317. Arstt., *Top.*, VI, 4, notamment 141 a 26 sq ; 142 a 22- b 10.

négation de ce qui constitue la grandeur : la présence de parties en lesquelles elle se divise et qui sont elles-mêmes des grandeurs de même espèce. Ensuite Euclide suit la seconde voie platonicienne, en évitant d'introduire le mouvement condamné par Aristote, et en se servant seulement des trois dimensions de la grandeur (Df. I,2 et 5 ; Df. XI,1). Enfin il indique les relations d'appartenance au moyen de la notion de « limites » (ou extrémités), empruntée à la première voie de Platon, en évitant les « hysteron-proteron » condamnés par Aristote (d'où les énoncés complémentaires : Df. I,3 et 6 ; Df. XI,2). Remarquons de plus que les deux voies correspondent aussi à des démarches aristotéliciennes : la première au processus d'abstraction à partir du sensible, la seconde à l'ordre de succession logique. Euclide, on le voit, tient habilement compte des exigences formulées dans la philosophie des mathématiques de son temps.

Cette exigence entraîne aux yeux d'Aristote quelques conséquences. D'abord n'est pas scientifique la définition d'un terme par son opposé, car il n'est pas antérieur ni mieux connu. Dans le cas des relatifs, dont l'un ne peut être connu sans l'autre, ils sont compris dans la même notion. N'est pas non plus scientifique la définition d'une espèce par l'espèce de même rang qui lui est co-ordonnée, comme le sont « pair » et « impair » : c'est le cas de la deuxième partie de la Df. VII,7, d'ailleurs superflue, et résidu probablement d'anciennes définitions. Enfin ne sont pas recevables, bien entendu, les définitions dans lesquelles le « definiens » contient, d'une manière ou d'une autre, quoique généralement de façon non-visible, la notion du « definiendum ». Dans ce défaut tombe la Df. I,4, selon l'une des interprétations qu'on en peut donner[318].

Ce dernier cas soulève en réalité la question des termes que l'on ne peut définir parce que la régression vers l'antérieur et le mieux connu ne peut aller à l'infini, autrement dit des termes premiers. On en peut citer quelques-uns, qui interviennent dans des énoncés sans avoir été définis auparavant :
« partie » (μέρος) (Df. I, 1 ; N. C. 8 ; défini en un sens restreint par Df. V, 1) ; « longueur » (μῆκος) (Df. I, 2) ; « limites » (πέρατα) (Df. I, 3, 6) ; « largeur » (πλάτος) (Df. I, 2, 5) ; « inclinaison » (κλίσις) (Df. I, 8 ; défini en des sens spéciaux par Df. XI, 5, 6) ; « égal » (ἴσος) (Df.

318. Cf. comm. *ad loc.*

I, 10, 15, 20, et N. C.) ; « plus/moins grand » (Df. I, 11, 12) ; « à l'infini » (εἰς ἄπειρον) (Df. I, 23 ; Post. 5) ; « continu » (συνεχές) (Post. 2) ; « intervalle » (διαστήμα) (Post. 3) ; « tout » (ὅλον) (N. C. 2, 8) ; « aire » (χωρίον) (Df. II, 2) ; « grandeur » (μέγεθος) (Df. V, 1) ; « mesurer » (καταμετρεῖν) (Df. V, 1, 2 ; Df. VII, 3, 4, 5) ; « degré de grandeur » (πηλικότης) (Df. V, 3) ; « un » (ἕν) (Df. VII, 1) ; « pluralité » (πλῆθος) (Df. VII, 2) ; « profondeur » (βάθος) (Df. XI, 1).

On peut remarquer qu'à une exception près (« inclinaison ») ces termes appartiennent au lexique de la quantité, catégorie aristotélicienne, soit discontinue (un/multiple), soit continue (la grandeur et ses espèces), et de l'opération de mesure. Il s'agit donc bien des genres premiers dont traitent les sciences considérées. La difficulté des Définitions du point, de la ligne, de la surface et du solide laissent augurer celles que rencontreraient des tentatives de définir les notions ci-dessus à l'intérieur de la science dont elles sont les principes, en essayant de les rattacher à des notions « antérieures et mieux connues »[319]. D'ailleurs, selon Aristote lui-même, de telles tentatives, qui ne peuvent aboutir à des Définitions au sens strict, relèvent de la Dialectique, antérieure à la science, non de la science elle-même. Au reste, certains d'entre ces termes, après avoir été utilisés, ne reparaissent plus dans le corps du traité[320]. On a pu se rendre compte que les Définitions des *Eléments* citées dans notre analyse comme contenant des termes non-définis, sont, en règle générale, les premières dans chaque Livre. Les suivantes sont obtenues par leur moyen, satisfaisant ainsi à l'exigence d'Aristote.

Les définitions devraient obéir à un troisième impératif, que l'on tire de la thèse suivante : la connaissance de ce qu'est une chose est identique à la connaissance de son « pourquoi », de sa cause[321]. On invoque l'exemple que donne Aristote et n'est pas dans les *Eléments* de

319. *Top.*, VI, 4 insiste sur ce point, notamment 142 b 20 ; 143 b 11 sq. ; 148 b 13.

320. Il faut noter une autre sorte de termes non-définis appartenant à un lexique technique composé de verbes, comme « mener », « couper », « diviser », « tomber sur », « être élevé sur », « toucher », « se rencontrer », « prolonger », « s'ajuster », « se briser », etc., qui décrivent soit des opérations du géomètre, soit des relations de position entre lignes ou figures. Cet arsenal descriptif est emprunté à la langue commune, avec toutefois des exceptions notables, pour lesquelles une définition est donnée, par ex. Df. III, 2, 3, 9 ; les Df. du L. IV ; et Df. XI, 5, 6, 7.

321. *An. post.*, II, 2, 90 a 15-21.

la définition de la quadrature d'un rectangle : dire que c'est la construction d'un carré équivalent, c'est exprimer seulement la conclusion, tandis que dire que c'est la découverte d'une moyenne proportionnelle, c'est donner la raison de la conclusion, par le moyen terme[322]. Cette remarque est importante quand il s'agit, comme dans l'exemple, de définir une opération qui pose un problème. Dans le cas des « objets », cela reviendrait précisément à exiger que toutes leurs définitions soient constructives, ou, comme on l'a dit, « génétiques ». En fait, le requisit paraît coïncider avec l'obligation déjà analysée de faire suivre les Définitions de démonstrations d'existence en résolvant le problème de la construction du défini[323]. En effet, décrire le processus d'une genèse dans la Définition ne dispense pas de l'effectuer de façon démonstrative[324].

Au total, on constate qu'il existe une corrélation non négligeable entre la structure et les caractéristiques de l'« axiomatique » d'Euclide et ce que recommande Aristote pour une science déductive. On doit particulièrement garder à l'esprit que, pour le Stagyrite, l'objet du mathématicien est déjà présent avant tout geste mathématique, objet à connaître certes, mais donné cependant comme inhérent à la nature des choses, comme structure déjà présente en puissance dans l'Univers physique, avant l'acte d'abstraction de l'intellect. Il semble inévitable alors, si l'auteur des *Eléments* voulait, conformément à cette conception, garantir l'accord entre la mathématique et le réel physique, que certaines Définitions soient plus descriptives qu'opératoires, et même

322. *De an.*, II, 2, 413 a 13-20.

323. L'idée de « définition génétique » a suscité certaines erreurs, par exemple l'oubli qu'Aristote condamne l'introduction du mouvement dans les Définitions. A cet égard, Euclide pose problème, les Df. des solides de révolution, sphère, cône, cylindre (Df. XI, 14, 18, 21) ne suivant aucunement la méthode de celle du cercle (Df. I, 15).

324. Ainsi la Df. I, 10 ne dispense pas de la Prop. I, 11, ni la Df. III, 2 de la Prop. III, 17, de même que la Df. V, 17 ne dispense pas de la Prop. V, 22, ni la Df. V, 18 de la Prop. V, 23. On doit ajouter qu'il y a aussi dans les *Eléments* des énoncés d'un type encore différent, en ce qu'ils ne définissent aucun terme : on a déjà cité les Df. I,3; I, 6 et XI, 2; on peut y ajouter la Df. V, 8; les trois premières indiquent des relations d'appartenance entre des objets définis auparavant et ont un caractère complémentaire; la quatrième a un rôle préparatoire pour les deux suivantes, car elle décrit une situation minimale qui y sera réalisée : comment une relation à quatre places peut exister entre seulement trois termes distincts. On voit donc que l'usage inévitable des relations contraint le mathématicien à ajouter des énoncés non-prévus par la conception aristotélicienne de la définition.

parfois inertes mathématiquement (Df. I, 4 et V, 3), manifestant simplement le souci d'enfermer dans une formule une essence conçue comme préalablement donnée, et que les Postulats soient chargés d'affirmer l'existence des objets par lesquels est assuré l'ancrage physique de la Géométrie. C'est en ce sens qu'on peut dire que nous trouvons dans les *Eléments* une axiomatisation « matérielle », bien différente de ce à quoi est de nos jours habitué le mathématicien, en ce qu'elle est accompagnée d'une interprétation, c'est-à-dire d'un modèle, imposée par avance.

XIV. Théorèmes et problèmes

Nous avons dit précédemment que les textes mathématiques qui nous sont parvenus d'Egypte et de Mésopotamie contiennent, outre les tables de calculs, des listes de problèmes[325] : le théorème est, par rapport à eux, un trait caractéristique de la mathématique grecque. Mais, bien entendu, en Grèce aussi, l'activité mathématique première consiste à tenter de résoudre des problèmes, et l'on sait que, dès le v^e siècle, trois d'entre eux, non-triviaux, sont déjà posés et demeureront classiques : la duplication du cube, la trisection de l'angle et la quadrature du cercle[326]. La spécificité grecque, là encore, consiste à traiter le problème « théoriquement », à démontrer le bien-fondé et la pertinence de la solution proposée. Dans Euclide, les démonstrations des théorèmes se terminent par la clause bien connue : « ce que précisément il fallait démontrer », celles des problèmes par la formule : « ce que précisément il fallait faire ».

Quel sens a cette distinction dans un traité théorique? Selon Proclus les problèmes ont pour but de procurer, de rendre manifeste, de construire ce qui en un certain sens n'existe pas, tandis que les théorèmes se proposent de constater, de connaître et de démontrer qu'une propriété appartient ou non à un objet[327]. Il est permis de se demander

325. Cf. *supra* ch. III, § XI, 1.

326. Sur l'ensemble de la question des « problèmes », *ATGP* rassemble une documentation indispensable.

327. *Pr.*, 201, 5-9; expression un peu différente en 77, 8-12 : les problèmes englobent la génération des figures, leurs sections, ce qu'on en retranche ou y ajoute, et en général les modifications qui les affectent, tandis que les théorèmes exhibent les propriétés qui leur appartiennent essentiellement.

si une telle distinction donne effectivement un critère de décision. En de nombreux cas, il est facile de formuler un problème comme un théorème, et inversement[328]. La relation de finalité entre les deux formes n'est pas plus décisive : Proclus est d'avis que le théorème I, 4 devait être nécessairement précédé par les Prop. I, 1, 2, 3, qui sont des problèmes, parce qu'elles le préparent; il souligne qu'il y a, au L. I, une certaine distribution des problèmes parmi les théorèmes, car ceux-là sont résolus en vue de ceux-ci. On peut toutefois remarquer qu'au L. II, les dix premières Propositions sont présentées comme des théorèmes et la onzième comme un problème, alors qu'il est possible de la traiter comme les autres : ici, d'autre part, c'est ce problème qui utilise des théorèmes antérieurs, Proclus d'ailleurs note que le L. IV est composé uniquement de problèmes, qui emploient des théorèmes des Livres précédents, tandis que le L. V n'en contient aucun. Quant au L. XIII et dernier, il s'achève par les problèmes de construction des cinq polyèdres réguliers, dont Proclus lui-même fait le but ultime des *Eléments*. Au surplus, il y a aussi des problèmes qui sont traités en vue d'en résoudre d'autres[329]. Il y a donc un entrelacement des deux formes qui ne semble pas permettre de discerner un ordre de priorité de principe.

On comprend dès lors l'existence chez les Anciens de deux positions « réductionnistes » extrêmes et opposées. Proclus nous avertit en effet que certains soutenaient que toutes les propositions étaient des théorèmes, en tant que propositions d'une science théorétique portant sur des objets éternels, lesquels n'admettent, en tant que tels, ni changement, ni devenir, ni production : ce qu'on appelle « construction » n'est tel, de ce point de vue, qu'au regard de la connaissance que nous prenons de choses éternelles[330]. Comme partisan de cette thèse, Speusippe est cité : cette référence, les raisons exposées, l'allusion transparente à Platon[331], indiquent assez que c'était la position des plato-

328. En effet, le problème demande de construire un objet A remplissant des conditions B, au moyen d'une construction C à inventer; le théorème énonce que l'objet A, résultat de la construction C, possède la propriété B (la démonstration de ce théorème corrélé est d'ailleurs celle qu'on trouve dans le texte, comme preuve que la solution donnée au problème est fondée et pertinente).

329. Par ex. IV, 10 en vue de IV, 11; cf. *Pr.*, 81, 18-22.

330. *Pr.*, 77, 15 - 78, 8.

331. *Resp.*, 527 a-c : Platon déclare que la Géométrie a un objet entièrement opposé à ce qu'en disent ceux qui s'y adonnent : car ils ne s'expriment qu'en pra-

niciens. En revanche, la réduction contraire était préconisée par les mathématiciens de l'Ecole de Ménechme, qui soutenaient que tout est problème, mais de deux manières : tantôt on se propose de procurer la chose cherchée, tantôt de voir, à propos d'un objet déterminé, ce qu'il est, ou quelle est sa qualité, ou quelles sont ses propriétés, ou les relations qu'il entretient avec un autre. Proclus réconcilie les doctrines en développant la thèse que les constructions n'ont lieu que dans la représentation imaginative des figures[332].

Il reste qu'une troisième position consistait à maintenir la distinction, et cela d'autant plus que les problèmes semblent avoir été l'objet d'une réflexion spécifique. C'est ainsi qu'il en existait des classifications[333] : d'abord selon le nombre des solutions, on distinguait les problèmes « ordonnés », « non-ordonnés », ou « intermédiaires », selon qu'ils admettaient une seule, une infinité, ou un nombre défini de solutions[334]; ensuite, selon les conditions imposées : les problèmes « en excès », soit parce que ces conditions sont inconsistantes ou hors de portée, auquel cas le problème est impossible, soit parce qu'elles sont simplement redondantes, et les problèmes « déficients », par insuffisance de conditions, ce qui les rend indéterminés[335]. Il est clair que ces distinctions méthodologiques étaient importantes pour la recherche. On remarquera que, lorsqu'un problème a une infinité de solutions, il peut être exprimé soit comme un théorème de « lieu », soit comme un problème de « lieu », et qu'on se trouve alors assez près du cas de ces « porismes », dont il était dit qu'ils participaient de la nature des deux.

Proclus indique plusieurs thèses relatives à la manière de distinguer problème et théorème. Un trait spécifique du problème, faisait-on valoir, c'est que d'une part, avec ses conditions imposées, il ouvre

ticiens et toujours en vue de la pratique quand ils parlent d'« effectuer des quadratures », d'« appliquer à une ligne », d'« ajouter », et ainsi de suite, alors que la Géométrie est connaissance d'une forme d'être éternel.

332. *Pr.*, 78, 8-13. On doit remarquer que c'est au sens de Ménechme qu'un candidat parle du « problème donné au concours », car dans la série des questions posées, il arrive fréquemment que soient mêlées des demandes de construire et des demandes de démonstration portant sur la nature, les propriétés ou les relations de tel ou tel objet. Ensuite, *Pr.*, 78, 13 - 79, 2.

333. Le mot « problème » en lui-même a un sens très large, puisqu'il peut désigner n'importe quelle chose qui est « proposée »; cf. *Pr.*, 221, 7-11.

334. *Pr.*, 220, 7-12; Proclus donne ensuite des exemples.

335. *Pr.*, 221, 13 - 222, 14.

sur une certaine possibilité, mais d'autre part il est nécessaire qu'en même temps il en existe d'autres, car ce n'est pas un problème d'inscrire un angle droit dans un demi-cercle (il est impossible d'y inscrire un angle autre que droit). Certains pensaient que la recherche portant sur des prédicats est caractéristique du théorème, tandis que celle qui porte sur des conditions d'existence est propre au problème (Zénodote), ou encore définissaient le premier comme une proposition déclarative indiquant la nature ou les propriétés d'une chose, l'autre comme une proposition demandant, sous la forme d'une possibilité de construction, si une chose existe ou non (Posidonius). D'autres enfin mettaient en avant le caractère prioritaire des problèmes dans l'ordre de la recherche de ce qui n'est pas encore connu, et le caractère second des théorèmes, énoncés précis et logiquement exacts d'une vérité complexe (Carpus)[336].

L'interprétation «existentielle» des problèmes dans Euclide a été le fait aussi bien des commentateurs modernes que des anciens. La preuve d'existence est effectivement importante dans une perspective aristotélicienne : on sait en effet que, pour le Stagyrite, une proposition dont le sujet (singulier) n'existerait pas serait fausse[337]. Cependant il est possible, dans des théorèmes, de supposer l'existence des objets dont on traite. La question de savoir si Euclide sur ce point est de stricte obédience aristotélicienne doit être laissée au commentaire détaillé des Propositions[338]. Toutefois on peut retirer de l'examen des *Eléments* l'impression que l'interprétation existentielle n'épuise pas les préoccupations de l'auteur, et que les problèmes ont aussi pour fin d'exhiber, à partir des constructions élémentaires autorisées dans les trois premiers Postulats, les moyens effectifs d'obtenir une situation

336. *Pr.*, 79, 11 - 81, 4 et 241, 19 - 243, 11. Sur Zénodote, cf. *supra* n. 230; sur Carpus d'Antioche, «le mécanicien», cf. *supra* ch. I, § IV, 6; ce dernier soulignait aussi qu'il existe une méthode générale de résolution des problèmes, la méthode d'analyse, alors qu'il n'existe rien de tel pour les théorèmes; sur ce point cf. *infra* § XVI.

337. Ce serait le cas aussi bien de «Socrate est malade» que de «Socrate est bien portant» si Socrate est supposé ne pas exister; les deux négations sont alors vraies ensemble. De même : «X ne voit pas» et «X n'est pas aveugle» sont toutes deux vraies si X est un nouveau-né, qui ne possède pas encore la vue, et les affirmatives toutes deux fausses.

338. Par exemple, au L. I, l'existence des triangles est supposée à maintes reprises *avant* I, 22, qui procède à la construction d'un triangle quelconque; on peut penser qu'une construction effective était bien jugée nécessaire pour que l'existence ne soit pas douteuse, même si on ne pouvait l'exécuter d'emblée.

souhaitée, par exemple : couper une droite selon un certain rapport, inscrire une figure dans une autre, etc.

Derrière la discussion sur ces deux formes de Propositions, se cache aussi en réalité un débat plus profond, auquel Carpus semble avoir été sensible, toujours présent dans l'histoire des mathématiques et qui reparaît sous une forme moderne : pour les uns l'activité mathématique consiste essentiellement d'abord à résoudre des problèmes, et les notions sont des créations de cette activité de l'esprit humain, tandis que pour les autres la mise en forme théorique des résultats, bien que réservée à certaines époques, est le but scientifique principal[339].

XV. DIVISIONS FORMELLES ET TERMES TECHNIQUES DANS LES PROPOSITIONS

Le développement qu'on peut lire après chaque énoncé des Propositions des *Eléments* est composé de parties déterminées qui se succèdent dans un ordre strict. Voici comment Proclus présente ces divisions.

«Tout problème et tout théorème, s'il est parfaitement complet quant à ses parties, exige d'être composé de tout ce que voici : la proposition ("protase"), l'exposition ("ecthèse"), la détermination ("diorisme"), la construction ("kataskeuè"), la démonstration ("apodeixis"), et la conclusion ("symperasma"). Parmi elles, la proposition dit quelle est, si une certaine chose est donnée, celle qui est cherchée. La proposition parfaite consiste en effet en ces deux choses. L'exposition, reprenant à part et en elle-même la chose donnée, la prépare d'avance, en vue de la recherche. La détermination explique clairement à part ce qu'est précisément la chose cherchée. La construction ajoute ce qui manque à la chose donnée pour la découverte de la chose cherchée. La démonstration tire scientifiquement des choses admises l'inférence proposée. La conclusion retourne de nouveau à la proposition, en confirmant ce qui a été démontré»[340].

Proclus souligne aussitôt qu'il y a cependant trois parties essentielles, car elles ne peuvent pas ne pas figurer : ce sont la proposition,

339. L'opposition du «constructivisme» et du «platonisme» est beaucoup plus forte, liée aux problèmes techniques de l'infini, et non exactement superposable à celle que nous évoquons.

340. *Pr.*, 203, 1 15; cf. aussi la suite du texte jusqu'à 205, 12.

la démonstration et la conclusion. Dans les théorèmes la construction peut être absente, lorsque l'exposition sans addition de quoi que ce soit suffit à la preuve[341]. L'exposition est en fait une instanciation des données, d'abord énoncées sous forme générale, au moyen des lettres ou groupes de lettres constituant les noms des points, des lignes, etc. portés sur la figure; la détermination est, de façon symétrique, une instanciation de l'objet de la recherche par les mêmes moyens : dans les théorèmes, elle est introduite par la formule : «je dis que...» et dans les problèmes par la formule : «il faut alors...», reprise parfois, après la construction, par : «je dis que...»

Il peut arriver qu'il n'y ait pas d'exposition : cela se produit s'il n'y a pas, dans la proposition, de données à instancier : c'est le cas dans le problème IV,10 par exemple; mais dans un tel cas la détermination est aussi absente corrélativement, car elle ne pourrait que répéter la proposition dans les mêmes termes.

On aura remarqué que le terme traduit ici par «détermination» (διορισμός) est le même que celui qui a été rendu directement par «diorisme» précédemment[342], mais dans une autre acception. Le diorisme était alors l'indication des conditions de possibilité d'un problème : dans ce cas il est spécifié dans la proposition elle-même et introduit par la formule : «il faut...» C'est le cas, par exemple, en I,22, ou encore en VI,28, mais dans cette occurrence le diorisme luimême est établi dans le théorème précédent VI,27. Cette dualité de sens, attestée dans Proclus, l'est aussi dans Eutocius, bien que Pappus n'utilise le terme que dans le sens diacritique que l'on vient d'évoquer[343]. On peut s'expliquer l'usage d'un seul terme en notant qu'il s'agit, dans les deux sens, de «spécifier» quelque chose et que le mot «spécification» pourrait traduire le mot grec avec la même équivocité.

341. Le terme utilisé ici pour «construction» est κατασκευή; il existe dans les *Eléments* un autre terme : σύστασις, ou plutôt le verbe correspondant : συστήσασθαι; celui-ci est utilisé dans les «propositions» des problèmes, lorsqu'on demande de «construire» un objet donné, c'est-à-dire d'en réunir les éléments et de les assembler, et non pas d'ajouter aux données des hypothèses complémentaires, comme le fait la κατασκευή. Dans certains cas, la σύστασις est une construction préparatoire à une Proposition ultérieure, par ex. I, 42 en vue de I, 44, ou VI, 25 en vue de VI, 28 et 29. Du point de vue de la représentation la κατασκευή ajoute des éléments à la figure (par ex. I, 24), du point de vue logique elle introduit des moyens termes, ou des hypothèses auxiliaires, destinées à disparaître de la conclusion.

342. Cf. *supra* ch. III; § XI,4; cf. *Pr.*, 202, 2-5.

343. Eutocius, in *Apoll.* II, 178.

En ce qui concerne la conclusion, il faut relever une importante remarque de Proclus. La conclusion est en effet obtenue à partir d'une démonstration portant sur une instanciation des données, réalisée dans la figure, alors qu'elle revêt une forme logiquement universelle. Proclus souligne qu'il n'est pas fait usage cependant, dans la démonstration, des particularités accidentelles des objets singuliers considérés, en sorte que ce qui est conclu dans la situation considérée est vrai de toute autre situation de même sorte. Les choses singulières qui ont fait l'objet de l'exposition ne sont pas utilisées dans la démonstration en tant que telles, mais en tant que semblables à d'autres, c'est-à-dire typiques[344]. Proclus explique donc en fait ce que la Logique moderne appelle règle d'universalisation dans la méthode de «déduction naturelle», que l'on peut gloser comme suit : «ce qui est nécessairement vrai d'un individu sans que cela tienne à ses caractéristiques propres est nécessairement vrai de tous ceux de son espèce».

Quelques autres termes techniques sont employés à propos des Propositions :

Données : les choses données peuvent l'être de plusieurs manières, dont trois sont définies par Euclide dans *Les Données*. Elles peuvent l'être *de position*, et les points ne peuvent être donnés que de cette façon; en fait il ne s'agit que de la fixation des éléments de la figure. Elles sont données *de grandeur* quand on peut leur trouver des choses égales ou inégales. Les figures rectilignes sont données *d'espèce* lorsqu'on connaît leurs angles un à un et les rapports de leurs côtés entre eux : elles sont donc alors semblables entre elles[345].

Porisme : ce terme, dont nous avons vu un premier emploi dans le titre de l'un des ouvrages perdus d'Euclide, est utilisé autrement dans les *Eléments*. Vulgairement le mot désigne un moyen de réaliser un

344. *Pr.*, 207, 4-25.

345. Proclus indique, quant à lui, quatre types de données, il est vrai pour les angles : *de position* (par ex. par fixation du sommet), *d'espèce* (*i.e.* droit, aigu, obtus), *de rapport* (par ex. double ou triple d'un autre, ou plus grand/plus petit), ou enfin *de grandeur* (comme le tiers d'un angle droit) (*Pr.*, 277, 5-15). Il est clair d'après cela que l'angle droit est donné aussi *de grandeur*. Heath, *TBE* I, 132 (3), sur ce point est confus. La donnée d'un rapport dans des problèmes de sectionnement prendra une grande place hors des *Eléments*, par ex. chez Archimède. Dans les *Eléments*, citons IV, 10 que Heath, *ibid.*, 133 (4), semble ignorer; il est vrai que, dans ces cas-là, un rapport est donné qu'une chose doit vérifier, sans qu'une chose soit donnée *par un rapport*.

gain. Proclus explique qu'il désigne une proposition qui se révèle à la suite de la démonstration d'une autre, sans qu'on se soit proposé de la démontrer elle-même, et qui constitue une sorte de gain accidentel obtenu par surcroît, une aubaine[346]. En fait il s'agit plutôt d'une forme modifiée de la conclusion obtenue, comme le remarque Heath, que d'une proposition distincte; aussi bien le porisme est-il énoncé par Euclide avant la formule : « ce qu'il fallait démontrer » ou « faire ». On peut traduire par « corollaire ».

Converse : une proposition converse (ou réciproque) d'une proposition conditionnelle donnée est obtenue par transposition de l'hypothèse et de la conséquence (ἀντιστροφή). S'il y a plusieurs hypothèses et que la transposition ne soit effectuée que sur l'une d'entre elles, la conversion est seulement partielle. Une proposition vraie est convertible si et seulement si sa converse est vraie. Dans ce cas hypothèse et conséquence sont, l'une et l'autre, à la fois condition nécessaire et suffisante l'une de l'autre : il y a, d'un point de vue moderne, équivalence logique entre elles. Les Anciens conservent une certaine dissymétrie en considérant comme « premiers » les théorèmes qui prennent le genre pour hypothèse et une propriété pour conséquence, en sorte que n'est converse que la proposition qui pose une propriété comme hypothèse et le genre comme conséquence[347].

Cas : le cas (πτῶσις) est toujours le cas de figure. Proclus indique qu'il y a alors différentes manières d'effectuer la construction, par des changements de position qui sont dus à la transposition d'éléments de la figure[348]. L'usage d'Euclide est de ne traiter qu'un seul cas, en principe le plus difficile, les autres étant laissés au lecteur; d'ailleurs l'application stricte de la règle d'universalisation rappelée ci-dessus doit pouvoir en dispenser, s'il n'est pas fait acception du cas dans la démonstration. Les commentateurs ont multiplié les cas, qui ont

346. *Pr.*, 212, 12-17 et 301, 21-25; l'idée grecque rendue par « aubaine » est exactement « un don d'Hermès ».

347. Il y a lieu de remarquer que le géomètre qui démontre la vérité de la converse d'une proposition (par ex. I, 6, converse de la première partie de I,5) a une optique différente de celle d'Aristote qui, dans *An. pr.*, I, 2, se propose de démontrer la convertibilité d'une proposition, en prouvant que sa converse s'en déduit; la « conversion » est alors la déduction de la converse à partir de la proposition directe, opération qui n'est pas toujours possible ou est sujette à diverses restrictions. Dès ce moment donc, la théorie aristotélicienne de la logique apparaît comme un cas particulier par rapport à la logique des mathématiques.

348. *Pr.*, 212, 5-11.

souvent donné lieu à des interpolations. Il faut remarquer que dans les démonstrations par l'absurde utilisant l'ordre total sur les grandeurs, on doit montrer que *deux* hypothèses mènent à l'impossible, mais ce ne sont pas des « cas de figure » (ex. : I,19).

Lemme : nous avons vu précédemment qu'on trouve des lemmes dans tous les Mss.[349]. Il y a lieu de penser qu'il en était déjà ainsi au temps de Proclus, qui estime nécessaire de les définir. Il distingue deux emplois : dans le premier, on désigne une Proposition utilisée dans une construction ultérieure : il est clair que dans ce sens le mot « lemme » n'apparaît pas dans le texte des *Éléments*[350]. En second lieu, on a un sens spécial, celui de « proposition qui requiert confirmation ». Il est vraisemblable qu'il s'agit alors de postulations implicites découvertes dans les démonstrations d'Euclide par les commentateurs et explicitées dans des gloses, ou de propositions citées et utilisées comme évidentes. Cela expliquerait qu'une partie de l'activité des commentateurs semble avoir été de les découvrir, une autre de les démontrer, et que la critique estime en général dans les *Éléments* les lemmes interpolés[351].

Objection : l'objection (ἔνστασις) entrave le cours entier de l'argumentation, en faisant obstacle soit à la construction, soit à la démonstration. D'après le contexte, il semble que Proclus veuille faire entendre que l'objection soulève un cas et que le géomètre doit la réfuter en montrant, ou bien que le cas évoqué est impossible, ou bien que la proposition est vraie même pour ce cas[352].

XVI. LE RAISONNEMENT

Le rôle des hypothèses dans le raisonnement mathématique a été perçu très tôt. Nous avons déjà fait allusion à cette possibilité qu'offre une chaîne démonstrative, dont les éléments sont des théorèmes, d'y

349. Cf. *supra* ch. II, § V.

350. V. des exemples *supra* n. 341.

351. Proclus leur consacre un long développement, *Pr.*, 211,1 - 212,4, dans lequel, significativement, il donne trois méthodes pour découvrir des lemmes : l'analyse, la division (au sens platonicien) et la réduction à l'absurde; on sait d'autre part que Pappus, au L. VII de la *Collection*, donne la démonstration d'une série de lemmes pour les traités faisant partie du « Trésor de l'analyse ».

352. *Pr.*, 212, 18-23; v. un ex. au comm. de I, 7; l'objection est définie par Aristote, *An. pr.*, II, 26, 69 a 37 sq.

introduire à tout moment une hypothèse à partir de laquelle les théorèmes déjà démontrés permettent d'obtenir une déduction de ses conséquences[353]. De fait, l'hypothèse se rencontre partout, depuis le corps des principes de la science, où sa forme la plus apparente est — nous le savons — le postulat, jusqu'au cas de figure ou aux données particulières d'un problème, en passant par l'énoncé même de certains théorèmes[354]. Il est de plus toujours possible dans la recherche d'examiner, dans le cadre des thèses démontrées du système, les conséquences d'une hypothèse quelconque et de construire ainsi des fragments de déduction à valeur exploratoire. Cette démarche de la pensée, bien connue depuis l'expansion moderne de la méthode expérimentale, n'est pas moins pertinente en mathématiques. Enfin, il est possible de remplacer une proposition par une autre en prouvant leur équivalence, c'est-à-dire en déduisant l'une de l'autre prise pour hypothèse et réciproquement.

Ainsi, dans le *Ménon*, lorsque Socrate se propose d'examiner « par hypothèse » si la vertu peut s'enseigner, il se réfère aussitôt au paradigme des géomètres en précisant qu'il prend l'expression en leur sens. Il donne alors l'exemple d'un problème d'inscriptibilité qui est soluble « sous hypothèse », c'est-à-dire sous certaines conditions nécessaires et suffisantes[355]. Dans les *Premiers Analytiques*, Aristote donne la théorie du raisonnement « apagogique » ou « par réduction » (ἀπαγωγή) en prenant deux exemples. Le premier est précisément celui de la vertu : il est clair que toute science peut s'enseigner, mais il est incertain que la vertu soit science; par suite, si elle l'est, elle peut s'enseigner. La question a été ainsi « réduite » : dès qu'on aura établi la mineure, la

353. Cf. *supra* n. 274.

354. Rappelons l'une des propriétés de la relation de déductibilité : si et seulement si une proposition conditionnelle est déductible d'un ensemble déterminé de prémisses, le conséquent seul est déductible de la conjonction de cet ensemble de prémisses et de l'antécédent. Ce théorème a été utilisé intuitivement bien avant les années 1930 et sa preuve par les logiciens modernes. Une proposition conditionnelle (ou hypothétique) est en réalité une connexion de deux propositions, appelées, l'une, l'antécédent, soit P, l'autre, le conséquent, soit Q, établie par le connecteur de conditionnalité « si..., alors... » : « si P, alors Q ». La propriété ci-dessus permet donc, par ex., de démontrer le théorème « si P, alors Q » dans le système considéré en déduisant du système et de l'hypothèse P qu'on lui adjoint, la conséquence Q, soit de faire l'inverse (« si P, alors Q » étant un théorème du système, il suffit d'y démontrer P pour que Q en soit aussi un), selon l'avantage qu'on y trouve.

355. Plat., *Men.*, 86 e-87 c. V. aussi *supra* la n. 249.

conclusion sera acquise. C'est donc bien là « raisonner par hypothèse ». L'autre exemple, de façon significative, est géométrique : il est clair que toute figure rectiligne peut être quarrée, qu'en est-il du cercle? si l'on a démontré qu'un cercle accompagné de lunules est égal à une figure rectiligne, il reste à montrer que toute lunule est quarrable. La réduction consiste ici à remplacer le problème par un autre, qu'on estime plus accessible[356].

L'exemple est historique : il s'agit de la tentative de quadrature du cercle d'Hippocrate de Chio. L'emploi de la méthode ne fut pas occasionnel, puisque c'est lui aussi qui « réduisit » à la découverte de deux moyennes proportionnelles un autre problème non-trivial, celui de la duplication du cube[357]. Proclus à ce sujet déclare que la « réduction » est le changement d'un problème ou d'un théorème en un autre, tel que, s'il est connu, ou dès qu'on l'aura obtenu, celui qu'on se propose sera du même coup rendu tout-à-fait clair; et il cite Hippocrate et ses deux « réductions »[358]. Du point de vue logique, il est clair qu'en géométrie la condition à laquelle la question est réduite doit être nécessaire et suffisante, afin que le « retour » puisse se produire et qu'il y ait vraiment remplacement d'un problème par l'autre.

La « réduction » comporte une variante importante : la réduction à l'absurde[359]. Lorsqu'Aristote distingue, parmi les démonstrations, celles qui procèdent directement et celles qui procèdent par hypothèse, il précise immédiatement que la preuve par impossible entre dans le second groupe[360]. Il prend comme exemple la preuve de l'incommensurabilité de la diagonale du carré avec le côté, par réduction à l'absurdité qu'un même nombre serait à la fois pair et impair, si elle était commensurable[361]. C'est la contradictoire de la proposition à démon-

356. Arstt., *An. pr.*, II, 25, 69 a 29-34.

357. V. *supra* n. 233.

358. *Pr.*, 212, 24 - 213, 11.

359. Aristote emploie l'expression « réduction à l'impossible » : *An. pr.*, I, 7, 29b 5-6; I, 44, 50 a 30-31; et les variantes : « preuve par impossible » : *ibid.* I, 21, 39 b 32-33; I, 29, 45 a 35; « preuve conduisant à l'impossible » : *An. post.*, I, 24, 85 a 16; l'expression « réduction à l'absurde » correspond au remplacement de ἀδύνατον par ἄτοπον, qui d'ailleurs se rencontre dans Euclide et a prévalu chez les mathématiciens.

360. *An. pr.*, I, 23, 40 b 25-26; à noter qu'on trouve ici dans Aristote la distinction entre la démonstration proprement dite qui procède des principes de la science et la déduction à partir d'une hypothèse particulière.

361. *El.* Prop. *vulgo* X, 117, in *EHS* III, App. n° 27, p. 231 sq.

trer qui est prise pour hypothèse : cela conduit à une absurdité, en sorte que ladite hypothèse doit être rejetée comme fausse, d'où suit la vérité de la proposition dont elle est la contradictoire. La dérivation de la contradiction à partir de la contradictoire de la proposition à prouver se fait bien selon les règles ordinaires du raisonnement direct, et néanmoins la conclusion souhaitée initialement n'est prouvée que « par hypothèse »[362].

Proclus expose le principe de la réduction à l'absurde dans un contexte mathématique plus élaboré[363]. Il remarque d'abord que l'impossibilité à laquelle on est conduit par la fausse hypothèse peut se situer soit au niveau d'une inconsistance avec les principes — axiomes, postulats, définitions — soit dans une contradiction avec ce qui a été auparavant démontré[364]. Il explique ensuite le ressort du raisonnement. Suivant alors Porphyre, il indique qu'il faut savoir que tous les arguments mathématiques ou bien procèdent des principes, ou bien font retour aux principes. Ceux qui procèdent des principes sont eux-mêmes de deux sortes : soit ils partent des axiomes et de la seule clarté de l'évidence, soit de ce qui a été auparavant démontré. Quant à ceux qui font retour aux principes, ou bien ils les confirment positivement ou bien ils les nient. Ceux qui les confirment s'appellent *analyses* dont les opposés sont les *synthèses* — car il est possible alors de procéder dans le bon ordre à partir des principes jusqu'à l'objet de la recherche, et c'est cela la synthèse —, quant à ceux qui les nient, on les appelle *réductions à l'absurde,* car c'est le résultat de cette méthode de renverser des choses qui font partie des évidences reconnues[365].

Ce texte innove en ce qu'il place le raisonnement par l'absurde dans le cadre d'une conception plus générale et systématique des rai-

362. *An. pr.*, I, 23, 41 a 23-37 (Aristote veut montrer que les syllogismes procédant par l'absurde s'effectuent selon les mêmes figures que les autres, parce que la déduction de l'absurdité se fait comme un raisonnement direct, et que la seconde phase, la preuve de la vérité de la conclusion par la fausseté de sa contradictoire, n'est pas un syllogisme, cf. la même idée, *ibid.* II, 14, 62 b 29-38).
363. *Pr.*, 254, 22 - 256, 10.
364. Ex. : dans I, 6, la conséquence impossible contrevient au 8e Axiome ; dans I, 8, elle contrevient à la conclusion de I, 7.
365. Le texte se termine par la remarque suivante : la réduction à l'absurde contient un certain « syllogisme », quoique différent de ce qui se passe dans l'analyse, car le nœud du raisonnement est ici celui du second des tropes stoïciens, le « modus tollendo tollens », qui utilise la loi de contraposition. Cf. *supra* n° 362, et l'extension de sens du mot « syllogisme » d'Aristote à Proclus.

sonnements mathématiques. Ayant déjà rencontré le terme « analyses » à propos de l'histoire des *Eléments*, nous devons maintenant en préciser la nature. Il est bien connu qu'une description assez étendue de l'analyse et de la synthèse a été donnée par Pappus, lorsqu'au Livre VII de la *Collection* il présente le Corpus d'ouvrages formant le « Trésor de l'analyse »[366] : elle constitue le texte de référence, avec lequel d'ailleurs s'accorde le texte précédent de Proclus.

Une première question se pose : quelle différence y a-t-il entre la « réduction » d'Aristote et l'« analyse » de Pappus ? Elle réside en ce que la réduction se borne à effectuer un ou plusieurs pas pour remplacer une question par une autre, équivalente, et estimée plus accessible, tandis que l'analyse va plus loin : elle pousse la recherche des conditions d'étape en étape jusqu'à rejoindre une proposition dûment établie : théorème, construction déjà validée, ou même principe initial de la science. Elle apparaît ainsi comme une extension de la méthode de réduction jusqu'à ce qui est déjà connu ou donné. Elle raisonne « par hypothèse » car, supposant établie la propriété sous étude ou résolu le problème posé, elle en dérive des conséquences bien enchaînées jusqu'à ce qu'elle arrive au connu. Dans cette chaîne, le connu figure comme condition nécessaire de la situation hypothétique dont on est parti, condition qui, si elle n'était pas réalisée, falsifierait l'hypothèse, en vertu de la loi logique de contraposition. Cela étant, deux éventualités peuvent se réaliser, au cas où l'analyse aboutit à quelque chose d'intéressant :

— ou bien elle mène à une condition nécessaire dont on sait qu'elle est effectivement vraie : il reste alors à montrer qu'elle est aussi une condition suffisante de ce qu'on veut prouver[367]. Il faut pour cela suivre la marche inverse du raisonnement, soit en établissant que chaque étape de l'analyse est inconditionnellement convertible, soit en découvrant et en spécifiant les conditions supplémentaires grâce auxquelles elle le devient. C'est là effectuer la synthèse du théorème ou du

366. *Papp.* II, 634-636. Ce texte est traduit dans *HGM* II, 400-401 et *TBE* I, 138-139. Il existe au L. XIII des *Eléments*, à propos des Prop. 1 à 5, des définitions très condensées de l'analyse et de la synthèse, manifestement interpolées et inégalement claires selon les variantes des Mss ; v. *EHS* IV, App. I, n° 8, p. 198 sq.
367. Cela pour une raison logique bien connue, Aristote ayant déjà montré que d'une hypothèse fausse il est possible de tirer une conséquence vraie.

problème, et à proprement parler achever la preuve de ce qui d'abord avait été posé par hypothèse[368] ;

— ou bien, deuxième éventualité, l'analyse mène à une contradiction, comme il a été dit : dans ce cas l'hypothèse est immédiatement rejetée et le mérite de l'analyse est alors d'assurer qu'aucune synthèse n'est possible, et de fermer une voie de la recherche.

Dans ce deuxième cas, il n'y a pas véritablement selon Proclus analyse, mais il procure la méthode de preuve indirecte que nous connaissons, qui n'est autre chose qu'une méthode de fausse position : toutefois cette preuve indirecte n'est acquise que moyennant l'usage du principe du tiers-exclu ; c'est pourquoi la question de savoir si, dans ce cas, la preuve directe est indispensable est objet de débat entre les mathématiciens[369].

Lorsque, dans le premier cas, l'analyse est couronnée de succès, elle aboutit en un point de la chaîne démonstrative déjà établie et jette en quelque sorte un pont entre l'hypothèse à démontrer et la science constituée. En cherchant les conditions nécessaires d'une situation qu'on suppose réalisée, l'analyse permet de découvrir les étapes obligées du

368. Certains commentateurs se sont étonnés que les textes déclarent que l'analyse tire les *conséquences* de l'hypothèse envisagée, et par ailleurs la présentent comme une « remontée » vers les *antécédents*, et la synthèse comme une « descente » vers les *conséquents*. C'est oublier que la chaîne démonstrative, dans l'épistémologie d'Aristote notamment, va des principes initiaux de la science, en particulier des genres premiers, aux théorèmes qui expriment les propriétés des notions dérivées, et que c'est là un ordre imposé et synthétique, puisque les genres premiers sont plus simples : le remonter est donc analytique (cf. Arstt., *Eth. Nic.*, 1112 b 11-24). Cela dit, il est bien certain que tout raisonnement ici a la structure canonique d'une déduction, qui atteint logiquement une conclusion au moyen des règles de déductibilité à partir de prémisses, lesquelles peuvent être éventuellement des hypothèses introduites, et non des principes initiaux de la théorie (cf. *supra* n. 354). Ainsi les deux aspects qu'évoquent les textes sont parfaitement compatibles. En dernier ressort, cela tient à la possibilité de réciprocation des implications (cf. *supra* § XV, au terme « converse »).
369. Assez fréquemment employée seule dans les *Eléments,* la réduction à l'absurde est l'un des éléments constitutifs de la « méthode d'exhaustion » qui prouve l'égalité de deux grandeurs A et B par l'absurdité résultant de l'hypothèse de leur inégalité, laquelle se dédouble nécessairement en deux : A plus grand que B, B plus grand que A. V. comm. au L. XII. Il peut arriver — notons-le d'autre part — que pour nier la conclusion à prouver, on doive logiquement examiner une infinité d'hypothèses dont chacune la nie (en termes modernes, cela reviendrait à prouver qu'aucune des valeurs susceptibles d'être prises par une variable x, *sauf une,* ne satisfait des conditions imposées) : le raisonnement géométrique menant à l'absurde, conduit sur un cas particulier, doit être généralisé à une infinité ; un premier exemple est fourni par la Prop. I, 14, cf. *ad loc.* la n. 3.

raisonnement, soit qu'on ne les connaisse pas encore, soit qu'on veuille le perfectionner et être assuré de n'en avoir point omis.

Il y a lieu de penser que l'emploi systématique de l'analyse, à partir de Platon vraisemblablement, a contribué à la rigueur des démonstrations. La synthèse cependant reste indispensable en raison des précautions à prendre pour la conversion : « S'il était impossible de démontrer le vrai à partir du faux, procéder par l'analyse serait facile — dit Aristote — : il y aurait en effet nécessairement réciprocation... La réciprocation se présente surtout dans les mathématiques, parce qu'elles ne prennent comme prémisses rien d'accidentel, mais des définitions »[370]. A la raison de l'équivalence du *definiens* et du *definiendum* dans la définition que donne ici Aristote, il faut ajouter bien entendu les propriétés du prédicat d'égalité.

Ainsi, d'une façon générale, il est correct de souscrire à ce qu'enseigne la tradition scolaire, à savoir que la synthèse est par excellence la méthode de la preuve, tandis que la vertu de l'analyse est heuristique. C'est ce qui fait sa particulière importance dans les problèmes, et Pappus, qui souligne qu'analyse et synthèse s'entendent aussi bien des théorèmes que des problèmes, note que, dans leur cas, l'analyse, si elle ne conduit pas à l'impossible, aboutit à ce qui est « donné » : c'est pourquoi peut être mise au point une méthode générale de construction d'une figure qui doit satisfaire un ensemble de conditions — méthode incluant l'usage de certains recueils intitulés « Données ». Il faut en effet transformer les conditions imposées, jusqu'à ce que soit exhibée une relation ou une chose donnée, qui permet de découvrir, en chaîne, d'autres données, dont chacune correspond exactement à la possibilité de franchir une étape dans la construction de la figure requise (que l'on a supposée construite).

C'est pourquoi, l'analyse peut être divisée ici en deux parties : la *réduction*, qui transforme les conditions imposées jusqu'à la découverte d'une relation ou chose qui se trouve donnée ; la *résolution*[371], qui parcourt la chaîne des données qui s'ensuivent jusqu'aux dernières choses nécessaires pour achever la construction. La synthèse se déroule alors de la même façon que ce qu'on peut observer dans un problème des *Eléments* : d'abord la *construction*, qui suit évidemment le même ordre

370. *An. post.*, I, 12, 78 a 6-13.
371. Nous empruntons ce terme à Hankel, *Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter*, 1874, p. 141.

que la résolution, enfin la *démonstration* qui déduit que la chose construite satisfait les conditions imposées, et repose sur la convertibilité des étapes de la « réduction[372]. Lorsque la solution du problème est subordonnée à un diorisme, l'analyse permet de discerner les conditions de possibilité du problème, ainsi que le nombre de ses solutions.

De cette manière, les exigences constructives propres à un problème de géométrie sont parfaitement satisfaites par les procédures de l'analyse et de la synthèse telles que les décrivent les textes, et notamment Pappus et Proclus. La distinction de l'analyse et de la synthèse n'est pas fondée dans le caractère « constructif » de la seule Géométrie, mais dans le mode de fonctionnement des déductions à partir d'hypothèses, dans le champ d'un système démonstratif où la dissymétrie est fermement maintenue entre énoncés liminaires (ou principes) et énoncés dérivés. L'importance particulière de l'analyse à la base d'une méthode générale de traitement des problèmes rend compte de son développement en dehors et après les *Eléments*, chez Archimède et Apollonius notamment, et de la constitution du « Trésor de l'analyse »[373].

372. Certains commentateurs ont cru voir une opposition entre ce qu'ils appellent « l'interprétation directionnelle » de l'analyse, qui serait dominée par la question du sens des enchaînements déductifs, et « l'interprétation géométrique » qui rendrait toute son importance à l'étude de la situation géométrique et à la découverte des étapes de la construction, par quoi il n'y aurait d'analyse que géométrique. Voici les remarques qu'appelle cette conception :
a) tout raisonnement géométrique, dans les mathématiques anciennes, est associé à une figure : ce qui en lui demeure implicite, intuitif, ne s'oppose pas à sa structure logique ;
b) l'usage dit « directionnel » de l'analyse n'a jamais dispensé d'un effort de découverte, et de même la synthèse n'est correcte qu'en ajoutant parfois des conditions qui autorisent la convertibilité (et cela non seulement en Géométrie, mais aussi en Arithmétique, par ex. pour éviter d'opérer, sans y prendre garde, avec une expression qui en réalité est nulle) ; cela est valable pour les théorèmes comme pour les problèmes ;
c) le compte rendu qui vient d'être fait de la méthode montre le parallélisme étroit entre les étapes logiques parcourues dans un sens, puis dans l'autre, et les opérations de construction géométrique successives (il faut ajouter que la « résolution » et la « construction » sont étroitement connectées du fait que seul est « donné » — par ex. dans un recueil comme *Les Données* — ce qui peut être construit par les moyens que procurent les *Eléments*) ;
d) quant à l'idée que l'analyse aurait une origine et un caractère géométriques, rappelons seulement que la simple résolution d'un problème logistique comportant une inconnue, d'un type babylonien courant (ex. « la somme de mon carré et de son côté est 30 ; quel est le côté ? »), est évidemment une analyse.

373. Notamment dans la recherche des lieux géométriques.

EUCLIDE D'ALEXANDRIE

LES ÉLÉMENTS

LIVRES I-IV

Géométrie plane

TRADUCTION ET COMMENTAIRES
PAR BERNARD VITRAC