

1 Exercices de déduction naturelle

1.1

Vous démontrerez que l'on peut dériver C à partir des prémisses $A \vee B$, $A \rightarrow C$ et $B \rightarrow C$. Autrement dit, vous construirez une dérivation qui suivra ce patron :

1		$A \vee B$	P
2		$A \rightarrow C$	P
3		$B \rightarrow C$	P
⋮		⋮	
?		C	?

1.2

Vous démontrerez que l'on peut dériver $B \rightarrow (D \rightarrow \neg J)$ à partir des prémisses $B \rightarrow (D \rightarrow E)$, $(E \wedge F) \rightarrow G$ et $J \rightarrow \neg(F \rightarrow G)$. Autrement dit, vous construirez une dérivation qui suivra ce patron :

1		$B \rightarrow (D \rightarrow E)$	P
2		$(E \wedge F) \rightarrow G$	P
3		$J \rightarrow \neg(F \rightarrow G)$	P
⋮		⋮	
?		$B \rightarrow (D \rightarrow \neg J)$?

1.3

Vous démontrerez que l'on peut dériver D à partir des prémisses $\neg(C \rightarrow B)$ et $\neg B \rightarrow D$. Autrement dit, vous construirez une dérivation qui suivra ce patron :

1		$\neg(C \rightarrow B)$	P
2		$\neg B \rightarrow D$	P
⋮		⋮	
?		D	?

1.4

Vous démontrerez que l'on peut dériver $B \leftrightarrow \neg C$ à partir de la prémisse $C \leftrightarrow \neg B$. Autrement dit, vous construirez une dérivation qui suivra ce patron :

1		$C \leftrightarrow \neg B$	P
⋮		⋮	
?		$B \leftrightarrow \neg C$?

1.5

Vous démontrerez que l'on peut dériver $A \wedge (B \vee C)$ à partir de la prémisse $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$. Autrement dit, vous construirez une dérivation qui suivra ce patron :

$$\begin{array}{l|l} 1 & (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \quad \text{P} \\ \vdots & \vdots \\ ? & A \wedge (B \vee C) \quad ? \end{array}$$

1.6

Vous démontrerez que l'on peut dériver la formule $(A \rightarrow B) \rightarrow [A \rightarrow (A \vee C)]$ sans prémisses. Autrement dit, vous construirez une dérivation qui suivra ce patron :

$$\begin{array}{l|l} 1 & ? \quad ? \\ \vdots & \vdots \\ ? & (A \rightarrow B) \rightarrow [A \rightarrow (A \vee C)] \quad ? \end{array}$$

1.7

Vous démontrerez que l'on peut dériver la formule $\{[(A \wedge B) \rightarrow C] \wedge \neg C\} \rightarrow \neg(A \wedge B)$ sans prémisses. Autrement dit, vous construirez une dérivation qui suivra ce patron :

$$\begin{array}{l|l} 1 & ? \quad ? \\ \vdots & \vdots \\ ? & \{[(A \wedge B) \rightarrow C] \wedge \neg C\} \rightarrow \neg(A \wedge B) \quad ? \end{array}$$

1.8

Vous démontrerez que l'on peut dériver la formule $[(B \vee \neg C) \wedge (C \rightarrow D) \wedge C] \rightarrow (B \wedge D)$ sans prémisses. Autrement dit, vous construirez une dérivation qui suivra ce patron :

$$\begin{array}{l|l} 1 & ? \quad ? \\ \vdots & \vdots \\ ? & [(B \vee \neg C) \wedge (C \rightarrow D) \wedge C] \rightarrow (B \wedge D) \quad ? \end{array}$$

1.9

Vous démontrerez que l'on peut dériver la formule $\{[A \rightarrow (D \wedge F)] \wedge [A \rightarrow (C \vee \neg D)]\} \rightarrow [A \rightarrow (C \wedge F)]$ sans prémisses. Autrement dit, vous construirez une dérivation qui suivra ce patron :

$$\begin{array}{l|l} 1 & ? \\ \vdots & \vdots \\ ? & \{[A \rightarrow (D \wedge F)] \wedge [A \rightarrow (C \vee \neg D)]\} \rightarrow [A \rightarrow (C \wedge F)] \end{array} \quad ?$$

1.10

Vous démontrerez que l'on peut dériver $[A \rightarrow (B \rightarrow C)] \leftrightarrow [(A \wedge B) \rightarrow C]$ sans prémisses. Autrement dit, vous construirez une dérivation qui suivra ce patron :

$$\begin{array}{l|l} 1 & ? \\ \vdots & \vdots \\ ? & [A \rightarrow (B \rightarrow C)] \leftrightarrow [(A \wedge B) \rightarrow C] \end{array} \quad ?$$