Eléments de « théorie des modèles » pour la logique des propositions. Définitions et principaux théorèmes

1 Définition du langage formel pour la logique des propositions (noté L)

1.1 Les symboles de L

a) un ensemble non-vide P de symboles de proposition élémentaire, notés : $p_1, ..., p_n, ...$;

b) les connecteurs : $\sim$ (non), $\wedge$ (et) ;

c) les parenthèses, crochets, etc. :), (,], [, }, {...

1.2 Phrases de L

a) un élément de P est une phrase ;

b) si φ est une phrase, alors $\sim\varphi$ est une phrase ;

c) si φ et ψ sont des phrases, alors $\varphi \wedge \psi$ est une phrase ;

d) seules sont des phrases, les suites de symboles de L obtenues au terme d'un nombre fini d'application de a)-c).

A noter :

– 'φ', 'ψ', etc. sont des métavariables pour des phrases de L qui n'appartiennent pas au langage L. On utilisera dans le métalangage les symboles pour les connecteurs de manière autonyme.
– on utilisera librement les connecteurs $\Rightarrow$ et $\vee$, supposés avoir été introduits par définition à partir de $\wedge$ et de $\sim$.

– en vertu de la définition précédente, les phrases de L sont des suites *finies* de symboles de L.
– le cardinal de l'ensemble des phrases de L dépend du cardinal de P : si P est fini, ou infini dénombrable, le cardinal de l'ensemble des phrases est infini dénombrable.

2 “Modèle pour L”, vérité, validité.

2.1 On appelle modèle pour L, un sous-ensemble A de P.

Remarque : intuitivement, on peut considérer que les éléments de A sont toutes les propositions élémentaires vraies dans un “monde possible”.

A noter : le cardinal de l'ensemble des modèles pour L est $2^{card(P)}$. Si donc P est infini dénombrable, $2^{card(P)}$ est non-dénombrable.

2.2 On notera le fait qu'une phrase φ est vraie (fausse) dans un modèle A par :

$$A \vDash \varphi \quad (A \nvDash \varphi)$$

On définit $A \vDash \varphi$ par :
– si φ est un symbole de proposition élémentaire p_i, alors $A \vDash \varphi$ ssi $p_i \in A$;
– si φ est de la forme $\sim\psi$, alors $A \vDash \varphi$ ssi $A \nvDash \psi$;
– si φ est de la forme $(\psi \wedge \vartheta)$ alors $A \vDash \varphi$ ssi $A \vDash \psi$ et $A \vDash \vartheta$.

2.3 Df. : une phrase φ est <u>valide</u> ssi elle est vraie dans tous les modèles pour L (noté : $\vDash \varphi$).

Remarque : Si P est infini dénombrable, il y a une infinité non-dénombrable de modèles différents pour L et il n'est donc pas possible de s'assurer directement de la validité d'une phrase de L.

3 Définition de "être une tautologie".

3.1 Df. : une assignation est une suite $a_1, ..., a_n$, dans laquelle les a_i sont soit V soit F (V et F sont dits *opposés*).

3.2 Soit φ une phrase de L qui ne comporte que des symboles de proposition faisant partie de la suite $p_1, ..., p_n$, on définit comme suit la valeur de φ pour l'assignation $a_1, ..., a_n$:

- si φ est un symbole de proposition p_i, avec $i \leq n$, la valeur de φ est a_i ;
- si φ est de la forme $\sim\psi$, la valeur de φ est l'opposé de la valeur de ψ ;
- si φ est de la forme $(\psi \wedge \vartheta)$, alors la valeur de φ est V si les valeurs de ψ et ϑ sont V, sinon la valeur de φ est F.

3.3 Df. : une phrase φ dont tous les symboles de propositions font partie de $p_1, ..., p_n$ est une *tautologie* ssi la valeur de φ est V pour toute assignation $a_1, ..., a_n$, ce que l'on note : $\vdash \varphi$.

Remarque : une ligne d'une table de vérité classique pour une phrase φ de L, est une assignation dont on ne considère que les éléments correspondant aux symboles de proposition apparaissant dans φ.

3.1 Complétude restreinte

Théorème de complétude restreinte :

$$\vDash \varphi \text{ ssi } \vdash \varphi.$$

Autrement dit : une phrase est valide ssi elle est tautologique.

Démonstration.

Dans ce qui suit, on admet que φ est une formule quelconque dont toutes les lettres de proposition figurent dans la suite $p_1 \dots p_n$, n donné mais quelconque

1. Dans le sens $\rightarrow$: on montre, par contraposition, que si $\nvDash \varphi$, alors $\nvdash \varphi$.

   On montre tout d'abord quelque chose de plus général, à savoir :
   étant donné une assignation quelconque $b_1, \dots, b_n$, il existe un modèle B tel que :

   $$\varphi \text{ prend la valeur V pour } b_1, \dots, b_n \text{ ssi } B \vDash \varphi.$$

   Soit, donc, une assignation $b_1, \dots, b_n$; on définit un modèle B par les clauses suivantes :

– pour tout i tel que $1 \leq i \leq n$, $p_i \in B$ ssi $b_i = \text{V}$.
– pour tout i tel que $i > n$, $p_i \in B$ (la clause pourrait être différente, par ex. : $p_i \in B$ ssi i est pair).

On montre par récurrence sur le degré de φ que la valeur de φ pour $b_1, \ldots, b_n$ est V ssi $B \vDash \varphi$.

- Soit φ de degré 0. φ est donc de la forme p_i $(1 \leq i \leq n)$.
  La valeur de p_i pour $b_1, \ldots, b_n$ est V ssi (par df. de “prendre la valeur V pour une assignation”) b_i est V ssi (par df. de B) $p_i \in B$ ssi (par df. de “être vrai dans un modèle”) $B \vDash p_i$ ssi $B \vDash \varphi$

- Hypothèse de récurrence. Pour tout φ de degré strictement inférieur à m, la valeur de φ pour $b_1, \ldots, b_n$ est V ssi $B \vDash \varphi$

- Soit φ de degré m.

  – Soit φ de la forme $\sim \psi$. La valeur de $\sim \psi$ pour $b_1, \ldots, b_n$ est V ssi (par df. de “prendre la valeur V pour une assignation”) la valeur de ψ pour $b_i, \ldots, b_n$ est F, ssi (par hyp. de rec.) $B \nvDash \psi$, ssi (par df. de “être vrai dans un modèle”) $B \vDash \sim \psi$ ssi $B \vDash \varphi$.

  – Soit φ de la forme $\psi \wedge \vartheta$. La valeur de $\psi \wedge \vartheta$ pour $b_1, \ldots, b_n$ est V ssi (par df. de “prendre la valeur V pour une assignation”) la valeur de ψ et celle de ϑ pour $b_1, \ldots, b_n$ est V ssi (par hyp. de rec.) $B \vDash \psi$ et $B \vDash \vartheta$, ssi (par df. de “être vrai dans un modèle”) $B \vDash \psi \wedge \vartheta$ ssi $B \nvDash \varphi$.

Il en résulte que, quel que soit n (puisque n était quelconque), pour tout φ, φ prend la valeur V pour $b_1, \ldots, b_n$ ssi $B \vDash \varphi$, ou, ce qui revient au même, φ prend la valeur F pour $b_1, \ldots, b_n$ ssi $B \nvDash \varphi$.

Soit, maintenant, une formule φ telle que $\nvdash \varphi$. Il existe donc une assignation $a_1, \ldots, a_n$ telle que φ prend la valeur F pour $a_1, \ldots, a_n$. En vertu de ce qui précède, il existe alors un modèle A tel que $A \nvDash \varphi$, et donc : $\nvDash \varphi$. D'où :

$$\text{si} \nvdash \varphi \text{ alors} \nvDash \varphi.$$

et par contraposition :

$$\text{si} \vDash \varphi \text{ alors} \vdash \varphi.$$

2. Dans le sens $\leftarrow$: on montre, par contraposition, que si $\vdash \varphi$ alors $\vDash \varphi$.

On montre tout d'abord quelque chose de plus général, à savoir :
étant donné un modèle B quelconque, il existe une assignation $b_1, \ldots, b_n$, telle que :

$$B \vDash \varphi \text{ ssi } \varphi \text{ prend la valeur V pour } b_1, \ldots, b_n.$$

Soit, donc, un modèle B ; on définit une assignation $b_1, \ldots, b_n$ par la clause suivante :

– pour tout i tel que $1 \leq i \leq n$, $b_i = \text{V}$ ssi $p_i \in B$.

On montre par récurrence sur le degré de φ que $B \vDash \varphi$ ssi la valeur de φ pour $b_1, \ldots, b_n$ est V.

- Soit φ de degré 0. φ est donc de la forme p_i $(1 \leq i \leq\ )$.
  $B \vDash p_i$ ssi $p_i \in B$ ssi $b_i = \text{V}$ ssi la valeur de p_i pour $b_1, \ldots, b_n$ est V, ssi la valeur de φ pour $b_1, \ldots, b_n$ est V.

- Hypothèse de récurrence. Pour tout φ de degré strictement inférieur à m, $B \vDash \varphi$ ssi la valeur de φ pour $b_1, \ldots, b_n$ est V.

- Soit φ de degré m.

  – Soit φ de la forme $\sim\psi$. $B \vDash\sim\psi$ ssi $B \nvDash \psi$ ssi la valeur de ψ pour $b_1, \ldots, b_n$ est F ssi la valeur de $\sim\psi$ pour $b_1, \ldots, b_n$ est V ssi la valeur de φ pour $b_1, \ldots, b_n$ est V

  – Soit φ de la forme $\psi \wedge \vartheta$. $B \vDash \psi \wedge \vartheta$ ssi $B \vDash \psi$ et $B \vDash \vartheta$ ssi la valeur de ψ et celle de ϑ pour $b_1, \ldots, b_n$ est V ssi la valeur de $\psi \wedge \vartheta$ pour $b_1, \ldots, b_n$ est V ssi la valeur de φ pour $b_1, \ldots, b_n$ est V.

Il en résulte que, quel que soit n (puisque n était quelconque), pour tout φ, $B \vDash \varphi$ ssi φ prend la valeur V pour $b_1, \ldots, b_n$, ou, ce qui revient au même,

$B \nvDash \varphi$ ssi φ prend la valeur F pour $b_1, \ldots, b_n$.

Soit, maintenant, une formule φ telle que $\nvDash \varphi$. Il existe donc un modèle A tel que $A \nvDash \varphi$. En vertu de ce qui précède, il existe alors une assignation $a_1, \ldots, a_n$ telle que φ prend la valeur F pour $a_1, \ldots, a_n$ et donc : $\nvdash \varphi$. D'où :

$$\text{si} \nvDash \varphi \text{ alors} \nvdash \varphi.$$

et par contraposition :

$$\text{si} \vdash \varphi \text{ alors} \vDash \varphi.$$

En joignant les deux résultats précédents, on a donc :

$$\vDash \varphi \text{ ssi} \vdash \varphi.$$

Remarque : on voit que ces deux démonstrations procèdent exactement de la même manière. Si l'on est contraint de les effectuer toutes deux, c'est qu'il n'y a pas une corrélation un-un entre l'ensemble des modèles et l'ensemble des assignations, ce qui se traduit par le fait que l'on ne définit pas exactement de la même façon l'assignation correspondant à un modèle et le modèle correspondant à une assignation.

4 Déduction, consistance.

4.1 Df : en vertu du *Modus Ponens*, on dit que ψ est *inféré* de φ et de ϑ ssi ϑ est de la forme $\varphi \Rightarrow \psi$.

4.2 Df : soit Σ, un ensemble de phrases de L ; on dit que φ est *déductible* de Σ (noté : $\Sigma \vdash \varphi$) ssi il y a une suite *finie* de phrases $\psi_1, \ldots, \psi_n$, telle que :
- $\varphi = \psi_n$
- chaque phrase ψ_i $(1 \leq i \leq n)$ est soit une tautologie, soit une phrase de Σ, soit inférée de deux phrases précédentes dans la suite.

Remarque : on admettra que toutes les phrases qui auraient pu être obtenues par substitution uniforme à partir de tautologies, sont des tautologies. Ainsi par ex. une phrase comme : $[(p \vee q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)] \Leftrightarrow (\sim(p \Rightarrow r) \Rightarrow \sim(p \vee q)]$ qui peut être obtenue à partir de $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$ en substituant $p \vee q$ à p et $p \Rightarrow r$ à q est une tautologie. On fait ainsi l'économie de la règle de substitution.

La suite $\psi_1, \ldots, \psi_n$ est dite *déduction de* φ *à partir de* Σ.

Remarque : attention à ne pas confondre l'ensemble Σ avec la suite $\psi_1, \ldots, \psi_n$.

En vertu de cette définition, on a :
- si $\Sigma \vdash \varphi$, alors, quelle que soit ψ, $\Sigma \cup \{\psi\} \vdash \varphi$. Plus généralement : si $\Sigma \subseteq \Sigma'$ et $\Sigma \vdash \varphi$ alors $\Sigma' \vdash \varphi$ (affaiblissement à gauche).
- si $\varphi \in \Sigma$, alors $\Sigma \vdash \varphi$.
- si φ est une tautologie, alors, pour tout ensemble Σ, $\Sigma \vdash \varphi$, et donc en particulier : $\emptyset \vdash \varphi$, d'où la notation ci-dessus pour une tautologie : $\vdash \varphi$[1].

4.2.1 Th. de la déduction :

$$\Sigma \cup \{\psi\} \vdash \varphi \ \text{ ssi } \ \Sigma \vdash \psi \Rightarrow \varphi$$

Démonstration :
Seul le sens $\rightarrow$ est intéressant (dans le sens $\leftarrow$ il suffit de se souvenir du *M.P.*, du fait que $\Sigma \cup \{\psi\} \vdash \psi$ et de l'affaiblissement à gauche).

Soit $\psi_1, \ldots, \psi_n$ une déduction de $\varphi = \psi_n$ à partir de $\Sigma \cup \{\vartheta\}$. On démontre, par induction sur i (i.e. par induction sur la longueur de la déduction), que, pour tout i $(1 \leq i \leq n)$, on a $\Sigma \vdash \vartheta \Rightarrow \psi_i$.

- i=1.
  Deux cas :
  - α) ψ_i est une tautologie ou un élément de Σ.
    On a alors la déduction suivante de $\vartheta \Rightarrow \psi_i$, à partir de Σ :

1.	ψ_i	tautologie ou élément de Σ
2.	$\psi_i \Rightarrow (\vartheta \Rightarrow \psi_i)$	loi de simplification
3.	$\vartheta \Rightarrow \psi_i$	*M.P.* sur 1. et 2.

    Donc : $\Sigma \vdash \vartheta \Rightarrow \psi_i$

1. Si l'on s'était donné un système,$Ax.$, d'axiomes pour la logique des propositions, on aurait défini $\Sigma \vdash \varphi$ par : $\Sigma \vdash \varphi$ ssi il y a une suite finie de phrases $\psi_1, \ldots, \psi_n$, telle que :
- $\varphi = \psi_n$
- chaque phrase ψ_i $(1 \leq i \leq n)$ est soit un <u>axiome</u>, soit une phrase de Σ, soit inférée de deux phrases précédentes dans la suite.

On aurait alors défini une "thèse" de $Ax.$ ($\vdash \varphi$) par : $\vdash \varphi$ ssi $\emptyset \vdash \varphi$.

– β) $\psi_i = \vartheta$
Par la loi d'identité, on a trivialement $\Sigma \vdash \vartheta\ (= \psi_i) \Rightarrow \psi_i$.

- Hypothèse de récurrence. Pour tout $j < i$, $(i \leq n)$, si $\Sigma \cup \{\vartheta\} \vdash \psi_j$, alors $\Sigma \vdash \vartheta \Rightarrow \psi_j$.

- On suppose que ψ_i est obtenu par *M.P.* sur $\psi_h\ (= \psi_k \Rightarrow \psi_i)$ et ψ_k $(k, h < i)$. Par hypothèse de récurrence, on sait que : $\Sigma \vdash \vartheta \Rightarrow (\psi_k \Rightarrow \psi_i)$ et $\Sigma \vdash \vartheta \Rightarrow \psi_k$.

  On a alors la déduction suivante de $\vartheta \Rightarrow \psi_i$, à partir de Σ :

1.	$\vartheta \Rightarrow (\psi_k \Rightarrow \psi_i)$	déjà déduit de Σ.
2.	$\vartheta \Rightarrow \psi_k$	déjà déduit de Σ
3.	$[\vartheta \Rightarrow (\psi_k \Rightarrow \psi_i)] \Rightarrow [(\vartheta \Rightarrow \psi_k) \Rightarrow (\vartheta \Rightarrow \psi_i)]$	loi de Frege
4.	$(\vartheta \Rightarrow \psi_k) \Rightarrow (\vartheta \Rightarrow \psi_i)$	*M.P.* sur 1 et 3
5.	$\vartheta \Rightarrow \psi_i$	*M.P.* sur 2 et 4.

On a donc : $\Sigma \vdash \vartheta \Rightarrow \psi_i$ pour tout i $(1 \leq i \leq n)$, et donc, pour $i = n$, $\Sigma \vdash \vartheta \Rightarrow \psi_n$, i.e. $\Sigma \vdash \vartheta \Rightarrow \varphi$; CQFD.

Exemple d'utilisation du théorème de la déduction (démonstration du principe du syllogisme) :
Supposons que l'on puisse montrer que l'on a : $\{\varphi \Rightarrow \psi, \psi \Rightarrow \vartheta, \varphi\} \vdash \vartheta$; le théorème de la déduction nous autorise alors à en tirer :

– $\{\varphi \Rightarrow \psi, \psi \Rightarrow \vartheta\} \vdash \varphi \Rightarrow \vartheta$, puis
– $\varphi \Rightarrow \psi \vdash (\psi \Rightarrow \vartheta) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \vartheta)$, et enfin :
– $\vdash (\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow [(\psi \Rightarrow \vartheta) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \vartheta)]$
ce qui est bien le principe du syllogisme.

Or il est très facile de démontrer que l'on a : $\{\varphi \Rightarrow \psi, \psi \Rightarrow \vartheta, \varphi\} \vdash \vartheta$. On a en effet la déduction suivante de ϑ à partir de l'ensemble $\Sigma = \{\varphi \Rightarrow \psi, \psi \Rightarrow \vartheta, \varphi\}$:

(1)	φ	élément de Σ
(2)	$\varphi \Rightarrow \psi$	élément de Σ
(3)	ψ	*M.P.* sur (1), (2)
(4)	$\psi \Rightarrow \vartheta$	élément de Σ
(5)	ϑ	*M.P.* sur (3), (4).

En général, le théorème de la déduction légitime une pratique courante : lorsque l'on veut démontrer une implication, il suffit de montrer qu'il existe une déduction du conséquent à partir de l'antécédent.

4.3 Df : un ensemble Σ est *inconsistant* ssi pour toute phrase φ, $\Sigma \vdash \varphi$. Si tel n'est pas le cas, Σ est *consistant*, i. e. :

Σ est *consistant* ssi il existe au moins une phrase φ telle que $\Sigma \nvdash \varphi$.

4.3.1 Th. : Si Σ est consistant et si Γ est l'ensemble des phrases déductibles de Σ, alors Γ est consistant.
Démonstration :

Puisque, par hypothèse, Σ est consistant, il existe φ tel que $\Sigma \nvdash \varphi$. On démontre que φ n'est pas non plus déductible de Γ.

Par contraposition : supposons $\Gamma \vdash \varphi$; alors il existe une suite $\psi_1, \ldots, \psi_n$ de phrases appartenant à Γ telle que, $\varphi = \psi_n$ et telle que, pour $m, i < n$, il existe dans cette suite ψ_i et ψ_m de la forme $\psi_i \Rightarrow \psi_n$.
Or ψ_i et ψ_m appartiennent à Γ et sont donc déductibles de Σ. Cela signifie qu'il existe deux déductions $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n'}$ et $\vartheta'_1, \ldots, \vartheta'_{n''}$ avec $\psi_i = \vartheta_{n'}$ et $\psi_m = \vartheta'_{n''}$ et telles que les ϑ_i et les ϑ'_i soient des tautologies, des phrases de Σ ou des phrases obtenues par M.P. sur deux phrases d'indice $< i$. Il existe donc une déduction, $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n'}, \vartheta'_1, \ldots, \vartheta'_{n''}, \varphi$, par exemple, de φ à partir de Σ.
Ainsi, si $\Gamma \vdash \varphi$ alors $\Sigma \vdash \varphi$, or, par hypothèse, $\Sigma \nvdash \varphi$; d'où : $\Gamma \nvdash \varphi$; Γ est donc consistant. CQFD.

Remarque : en vertu de la remarque sous 4.2, Σ est inclus dans Γ.

4.3.2 Th. : Σ est inconsistant ssi $\Sigma \vdash p_i \wedge \sim p_i$, quel que soit p_i.

4.3.3 Th. : $\Sigma \vdash \varphi$ ssi $\Sigma \cup \{\sim\varphi\}$ est inconsistant.

Démonstration :

1. dans le sens $\rightarrow$: i.e. : si $\Sigma \vdash \varphi$ alors $\Sigma \cup \{\sim\varphi\}$ est inconsistant

   Si $\Sigma \vdash \varphi$, alors (affaiblissement à gauche) :
   (1) $\Sigma \cup \{\sim\varphi\} \vdash \varphi$.
   De plus, par df. d'une déduction :
   (2) $\Sigma \cup \{\sim\varphi\} \vdash \sim\varphi$
   En vertu de la taut. $\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow (\varphi \wedge \psi)$, on a :
   (3) $\Sigma \cup \{\sim\varphi\} \vdash \varphi \Rightarrow [\sim\varphi \Rightarrow (\varphi \wedge \sim\varphi)]$
   par *M.P.* sur (1) et (3) :
   (4) $\Sigma \cup \{\sim\varphi\} \vdash \sim\varphi \Rightarrow (\varphi \wedge \sim\varphi)$
   et par *M.P.* sur (2) et (4) :
   (5) $\Sigma \cup \{\sim\varphi\} \vdash \varphi \wedge \sim\varphi$.

   Donc $\Sigma \cup \{\sim\varphi\}$ est inconsistant. CQFD.

2. dans le sens $\leftarrow$: si $\Sigma \cup \{\sim\varphi\}$ est inconsistant alors $\Sigma \vdash \varphi$:

   Si $\Sigma \cup \{\sim\varphi\}$ est inconsistant alors, par df. tout est déductible de $\Sigma \cup \{\sim\varphi\}$ et donc en particulier φ. Donc :
   (1) $\Sigma \cup \{\sim\varphi\} \vdash \varphi$
   Par le théorème de la déduction sur (1) on a :
   (2) $\Sigma \vdash \sim\varphi \Rightarrow \varphi$
   Or on a (taut.) :
   (3) $\Sigma \vdash (\sim\varphi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi$
   et par *M.P.* sur (2) et (3) :
   (4) $\Sigma \vdash \varphi$; CQFD.

4.3.3.1 Corollaires immédiats :

– $\Sigma \nvdash \varphi$ ssi $\Sigma \cup \{\sim\varphi\}$ est consistant.

– $\nvdash \varphi$ ssi $\{\sim\varphi\}$ est consistant.

4.3.3.2 Lemme : soit Σ consistant et une phrase φ telle que : $\varphi \notin \Sigma$ et $\sim\varphi \notin \Sigma$; alors $\Sigma \cup \{\varphi\}$ est consistant ou $\Sigma \cup \{\sim\varphi\}$ est consistant. En effet, supposons que $\Sigma \cup \{\varphi\}$ et $\Sigma \cup \{\sim\varphi\}$ soient l'un et l'autre inconsistants. Par le théorème ci-dessus, cela implique : $\Sigma \vdash \sim\varphi$ et $\Sigma \vdash \varphi$ respectivement, d'où Σ est inconsistant, contrairement à l'hypothèse.

4.4 Df : un ensemble Γ est *maximal consistant* ssi il est consistant et s'il n'y a pas d'ensemble consistant $\Sigma \neq \Gamma$ tel que $\Gamma \subseteq \Sigma$. Autrement dit, Γ est maximal consistant ssi pour toute phrase φ telle que $\varphi \notin \Gamma$, $\Gamma \cup \{\varphi\}$ est inconsistant.

4.4.1 Lemme : si Γ est maximal consistant, alors :

α. pour toute phrase φ, $\Gamma \vdash \varphi$ ssi $\varphi \in \Gamma$.
β. pour toute phrase φ, soit $\varphi \in \Gamma$, soit $\sim\varphi \in \Gamma$, mais pas les deux ;
γ. pour toutes phrases φ, ψ, $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$ ssi $\varphi \in \Gamma$ et $\psi \in \Gamma$.

Démonstrations :

α. : dans le sens $\leftarrow$, cela découle de la définition de "$\Sigma \vdash \varphi$" (cf. plus haut, sous 4.2.).
Dans le sens $\rightarrow$, par contraposition : supposons $\varphi \notin \Gamma$; alors puisque, par hypothèse, Γ est maximal consistant, $\Gamma \cup \{\varphi\}$ est inconsistant et donc par 4.3.3., $\Gamma \vdash \sim\varphi$, d'où, puisque Γ est consistant, $\Gamma \nvdash \varphi$.

β : "mais pas les deux" est évident puisque Γ est consistant. Pour le reste, par contraposition : supposons qu'il existe une phrase φ telle que $\varphi \notin \Gamma$, et $\sim\varphi \notin \Gamma$. Alors, $\Gamma \cup \{\varphi\}$ est consistant ou $\Gamma \cup \{\sim\varphi\}$ est consistant (par 4.3.3.2) ; donc Γ n'est pas maximal.

γ :
– dans le sens $\rightarrow$: si $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$, alors $\Gamma \vdash \varphi$ et $\Gamma \vdash \psi$ (en vertu des taut. : $\vdash (\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \varphi$ et $\vdash (\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \psi$), donc, par α : $\varphi \in \Gamma$ et $\psi \in \Gamma$.
– dans le sens $\leftarrow$: si $\varphi \in \Gamma$ et $\psi \in \Gamma$ alors $\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi$ (en vertu de la taut. : $\vdash \{\varphi \Rightarrow [\psi \Rightarrow (\varphi \wedge \psi)]\}$) et donc, par α, $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$.

4.4.2 Th. de Lindenbaum : Tout ensemble consistant peut être étendu à un ensemble maximal consistant.

Démonstration :

Soit Σ un ensemble de phrases consistant ; on construit, à partir de Σ un ensemble $\widehat{\Sigma}$ dont on démontrera qu'il est consistant et maximal.

Construction :

On suppose que l'on a fait la liste indicée (sans répétition), $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots$ de toutes les phrases de L (ce qui est possible puisque l'ensemble des phrases de L est infini dénombrable) :

On construit une suite d'ensembles de phrases, $\Sigma_0, \ldots, \Sigma_n \ldots$ de la manière suivante :

- $\Sigma_0 = \Sigma$;
- $\Sigma_1 = \Sigma_0 \cup \{\varphi_0\}$ si $\Sigma_0 \cup \{\varphi_0\}$ est consistant, sinon $\Sigma_1 = \Sigma_0$;
- $\Sigma_2 = \Sigma_1 \cup \{\varphi_1\}$ si $\Sigma_1 \cup \{\varphi_1\}$ est consistant, sinon $\Sigma_2 = \Sigma_1$; etc.

En général donc on fait :

- $\Sigma_{i+1} = \Sigma_i \cup \{\varphi_i\}$ si $\Sigma_i \cup \{\varphi_i\}$ est consistant, sinon $\Sigma_{i+1} = \Sigma_i$.

On fait l'union, $\bigcup \Sigma_i$, des ensembles Σ_i de la suite précédente et on pose $\widehat{\Sigma} = \bigcup \Sigma_i$. Il reste à démontrer que $\widehat{\Sigma}$ est consistant et maximal.

1. $\widehat{\Sigma}$ est consistant.

   On remarque tout d'abord que, par construction, chacun des ensembles Σ_i de la suite précédente est consistant.

   Supposons maintenant que $\widehat{\Sigma}$ ne soit pas consistant. Il y a alors une déduction $\psi_0, \ldots \psi_n$, à partir de $\widehat{\Sigma}$, d'une formule de la forme $p_h \wedge \sim p_h$ (avec $\psi_n = p_h \wedge \sim p_h$). Soit $\vartheta_{i_0}, \ldots \vartheta_{i_m}$ les phrases de $\widehat{\Sigma}$ utilisées dans cette déduction. Soit Σ_i un des ensembles de la suite précédente avec un indice i suffisamment grand pour que toutes le phrases de la suite $\vartheta_{i_0}, \ldots \vartheta_{i_m}$ lui appartiennent.

   On a alors : $\Sigma_i \vdash p_h \wedge \sim p_h$ et donc Σ_i est inconsistant, contrairement à l'hypothèse. $\widehat{\Sigma}$ est donc consistant.

2. $\widehat{\Sigma}$ est maximal.

   Supposons qu'il existe $\widehat{\Sigma}'$ consistant et tel que $\widehat{\Sigma} \subset \widehat{\Sigma}'$. Alors il existe un phrase φ_i, appartenant à la suite des $\varphi_0, \ldots, \varphi_n, \ldots$ telle que $\varphi_i \in \widehat{\Sigma}'$ et $\varphi_i \notin \widehat{\Sigma}$.

Cela signifie que $\Sigma_i \cup \{\varphi_i\}$ est inconsistant et donc, comme $\Sigma_i \cup \{\varphi_i\} \subseteq \widehat{\Sigma}'$, $\widehat{\Sigma}'$ est lui-même inconsistant (sens trivial de la compacité, cf. plus loin), contrairement à l'hypothèse ; CQFD.

Remarque : le théorème de Lindenbaum établit que l'on peut toujours étendre une ensemble consistant à un ensemble maximal consistant, autrement dit qu'un ensemble consistant est inclus dans au moins un ensemble maximal consistant. Mais il n'en résulte nullement qu'un ensemble consistant ne peut être étendu qu'à un seul ensemble maximal consistant : il est facile de se convaincre, que l'ensemble $\widehat{\Sigma}$ auquel on parvient au terme de la procédure décrite ci-dessus dépend essentiellement de la liste indicée des formules de L que l'on utilise dans sa construction, liste qui n'est que l'une des listes du même genre possibles (il y en a une infinité dénombrable). Pour illustrer ce point, considérons un exemple très simple : supposons que les formules φ_i et $\varphi_j = \sim\varphi_i$ figurent dans cette liste avec les indices i et j et que $i < j$. Admettons que ni φ_i, ni φ_j n'appartiennent encore à l'ensemble Σ_i de la suite des ensembles $\Sigma_0, \ldots, \Sigma_n \ldots$ ci-dessus. Admettons également que les deux ensembles $\Sigma_i \cup \{\varphi_i\}$ et $\Sigma_i \cup \{\varphi_j\}$ soient consistants. Par construction, on aura alors ; $\Sigma_{i+1} = \Sigma_i \cup \{\varphi_i\}$, ce qui exclut (puisque $\varphi_j = \sim\varphi_i$) que par la suite on ait : $\Sigma_{j+1} = \Sigma_j \cup \{\varphi_j\}$. Il en résulte que l'on aura $\varphi_i \in \widehat{\Sigma}$ et $\varphi_j \notin \widehat{\Sigma}$. On voit tout de suite que si, contrairement à ce que l'on a supposé, on avait eu $j < i$, la situation aurait été inversée et on aurait eu : $\varphi_i \notin \widehat{\Sigma}$ et $\varphi_j \in \widehat{\Sigma}$. Les deux extensions maximales consistantes de Σ_0 auraient donc été différentes.

4.4.3 Th. : pour toute phrase φ, $\vdash \varphi$ ssi, pour tout ensemble maximal consistant Γ, $\varphi \in \Gamma$. En effet :

- Dans le sens $\rightarrow$: si $\vdash \varphi$ alors, pour tout ensemble maximal consistant Γ, $\Gamma \vdash \varphi$ et donc, par 4.4.1. α, $\varphi \in \Gamma$.
- Dans le sens $\leftarrow$, par contraposition : si $\nvdash \varphi$ alors $\{\sim\varphi\}$ est consistant (par 4.3.3.1), et peut donc être étendu à un ensemble maximal consistant Γ tel que $\sim\varphi \in \Gamma$ et donc, puisque Γ est consistant, $\varphi \notin \Gamma$. Donc il existe au moins un ensemble maximal consistant auquel n'appartient pas φ.

4.4.4 Th. (généralisation du précédent) : pour toute phrase φ et tout ensemble Σ, $\Sigma \vdash \varphi$ ssi, pour tout ensemble maximal consistant Γ, si $\Sigma \subseteq \Gamma$ alors $\varphi \in \Gamma$. En effet :

- Dans le sens $\rightarrow$: supposons $\Sigma \vdash \varphi$, et Γ ensemble maximal consistant tel que $\Sigma \subseteq \Gamma$. Alors, par 4.2., $\Gamma \vdash \varphi$ et donc par 4.4.1. α, $\varphi \in \Gamma$.

– Dans le sens $\leftarrow$, par contraposition : supposons $\Sigma \nvdash \varphi$; alors, par 4.3.3., $\Sigma \cup \{\sim\varphi\}$ est consistant et peut donc être étendu à un maximal consistant Γ_1 tel que $\Sigma \subseteq \Gamma_1$ et $\sim\varphi \in \Gamma_1$; et donc, puisque Γ_1 est consistant, $\varphi \notin \Gamma_1$. Donc il existe au moins un ensemble maximal consistant dans lequel Σ est inclus et auquel n'appartient pas φ.

Remarque : le théorème 4.4.3, découle directement de celui-ci en faisant $\Sigma = \emptyset$.

5 Consistance et satisfiabilité

5.1 Df : un ensemble Σ de phrases de L est *satisfiable* ssi il existe un modèle A tel que pour toute phrase $\varphi \in \Sigma$, $A \vDash \varphi$. On dit que A est un modèle pour Σ, ce que l'on note : $A \vDash \Sigma$.
A noter : en vertu de cette définition, si $A \vDash \Sigma$ et $\Sigma' \subseteq \Sigma$, $A \vDash \Sigma'$.

5.2 Th. Pour tout ensemble maximal consistant Γ : (1) Γ admet un modèle A ; (2) Γ n'admet que ce modèle A et (3) Γ est le seul ensemble maximal consistant dont A soit le modèle

Démonstration :
(1) On définit un modèle A par :

$$p_i \in A \text{ ssi } p_i \in \Gamma.$$

Cette définition est possible puisque l'on est assuré qu'il n'existe pas de formule élémentaire p_i telle que $p_i \in \Gamma$ et $\sim p_i \in \Gamma$.

On montre par récurrence sur le degré des formules appartenant à Γ que A est un modèle pour Γ, autrement dit, on montre que pour tout φ, $\varphi \in \Gamma$ ssi $A \vDash \varphi$.

- φ de degré 0 :
  – $\varphi \in \Gamma$ et est de la forme p_i : $p_i \in \Gamma$ ssi $p_i \in A$ (par df. de A) ssi $A \vDash p_i$ (par df. de "$A \vDash \varphi$").

- Hypothèse de récurrence : pour tout φ de degré $< n$, $\varphi \in \Gamma$ ssi $A \vDash \varphi$.

- φ de degré n :
  – $\varphi \in \Gamma$ et est de la forme $\sim\psi$: $\sim\psi \in \Gamma$ ssi $\psi \notin \Gamma$ (par 4.4.1.) ssi $A \nvDash \psi$

(par hyp. de rec.) ssi $A \vDash \sim\psi$ (par df. de "$A \vDash \varphi$").

– $\varphi \in \Gamma$ et est de la forme $\psi \wedge \vartheta$: $\psi \wedge \vartheta \in \Gamma$ ssi $\psi \in \Gamma$ et $\vartheta \in \Gamma$ (par 4.4.1.) ssi $A \vDash \psi$ et $A \vDash \vartheta$ (par hyp. de rec.) ssi $A \vDash \psi \wedge \vartheta$ (par df. de "$A \vDash \varphi$").

(2) A tel que défini ci-dessus est le seul modèle de Γ. En effet :
Soit un modèle $B \neq A$; il existe donc une lettre de proposition p_i telle que, par ex., $p_i \in A$ et $p_i \notin B$. Puisque $p_i \in A$, $A \vDash p_i$ et donc par df. de A, $p_i \in \Gamma$. Or puisque $p_i \notin B$, $B \nvDash p_i$, donc $B \nvDash \Gamma$.

(3) Γ est le seul ensemble maximal consistant admettant A comme modèle. En effet :
soit un ensemble maximal consistant $\Gamma_1 \neq \Gamma$. Il existe donc une phrase φ tel que, par ex., $\varphi \in \Gamma$, $\varphi \notin \Gamma_1$ et donc (par 4.4.1.) : $\sim\varphi \in \Gamma_1$. Par (1) ci-dessus, puisque $\varphi \in \Gamma$, $A \vDash \varphi$ et donc $A \nvDash \sim\varphi$, d'où : $A \nvDash \Gamma_1$.

De ces résultats, il suit qu'à chaque modèle A ne correspond qu'un et seul ensemble maximal consistant Γ tels que : $A \vDash \Gamma$; et réciproquement, qu'à chaque ensemble maximal consistant Γ, ne correspond qu'un et un seul modèle A tels que : $A \vDash \Gamma$. L'ensemble de maximaux consistants est donc en corrélation un-un avec l'ensemble des modèles.

On montre facilement que l'ensemble des phrases vraies dans un modèle A est un ensemble maximal consistant, autrement dit : $\{\varphi : A \vDash \varphi\}$ est maximal consistant (note "historique" : l'ensemble $\{\varphi : A \vDash \varphi\}$ est un "ensemble de vérité" défini sémantiquement) .

5.3 Th. de complétude (au sens large) :

un ensemble de phrases Σ est satisfiable ssi il est consistant.

Démonstration :

1. Dans le sens $\rightarrow$: si Σ est satisfiable alors Σ est consistant.

On démontre d'abord que si Σ admet un modèle A (i.e. est satisfiable), alors pour tout φ, si $\Sigma \vdash \varphi$ alors $A \vDash \varphi$.

Si φ est déductible de Σ, il existe une suite $\psi_1, \ldots, \psi_n$ telle que $\varphi = \psi_n$ et telle que pour tout i, $1 \leq i \leq n$, ψ_i est soit une tautologie, soit une phrase de Σ, soit obtenue par $M.P.$ sur deux phrases d'indice h, k, avec $h, k < i$.

On démontre, par récurrence sur i (i.e sur la longueur de la déduction), que, quelque soit i $(1 \leq i \leq n)$, on a $A \vDash \psi_i$ et donc quand $i = n$, $A \vDash \psi_n$, i.e $A \vDash \varphi$.

- Si $i = 1$, ψ_i ne peut être qu'une tautologie ou une phrase de Σ, et donc, par définition, $A \vDash \psi_i$ [trivial !].
- Hypothèse de récurrence : pour tout $j < i$ $(i \leq n)$, $A \vDash \psi_j$.
- Soit ψ_i, que l'on admet être obtenue par $M.P.$ (les autres cas sont triviaux).

  Il existe donc deux phrases ψ_k et $\psi_l (= \psi_k \Rightarrow \psi_i)$, $(k, l < i)$ vraies dans A (hyp. de rec.). Par définition d' "être vrai dans un modèle", $A \vDash \psi_k \Rightarrow \psi_i$ ssi $A \vDash \sim\psi_k$ (i.e. $A \nvDash \psi_k$) ou $A \vDash \psi_i$; or, puisqu'on a également $A \vDash \psi_k$, on ne peut avoir $A \vDash \sim\psi_k$; on a donc $A \vDash \psi_i$.

Quand $i = n$, on a donc $A \vDash \psi_n$, i.e. $A \vDash \varphi$.

Si donc une phrase de la forme $p_i \wedge \sim p_i$ était déductible de Σ, et que A était un modèle pour Σ, $p_i \wedge \sim p_i$ serait vraie dans A, ce qui n'est pas possible ; donc aucune phrase de la forme $p_i \wedge \sim p_i$ n'est déductible de Σ. Σ est donc consistant. CQFD.

2. Dans le sens $\leftarrow$: si Σ est consistant alors Σ est satisfiable.

   En vertu du théorème de Lindenbaum, on peut étendre Σ à un ensemble $\widehat{\Sigma}$ maximal consistant. Par 5.2, $\widehat{\Sigma}$ admet un modèle qui est également modèle de Σ, puisque $\Sigma \subseteq \widehat{\Sigma}$. Σ est donc satisfiable.

5.3.1 Th. de compacité : Σ est satisfiable ssi tout sous-ensemble fini de Σ est satisfiable.

Démonstration :

Dans le sens $\rightarrow$ c'est trivial.

Dans le sens $\leftarrow$:

Par contraposition : supposons Σ non satisfiable ; alors Σ est inconsistant (complétude) et donc on a $\Sigma \vdash p_i \wedge \sim p_i$. Une déduction étant une suite finie de phrases, il n'entre dans la déduction de $p_i \wedge \sim p_i$ qu'une nombre fini de phrases de Σ.
Soit Σ_0 cet ensemble fini de phrases ; on a donc $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ et $\Sigma_0 \vdash p_i \wedge \sim p_i$. Il existe donc un sous-ensemble fini de Σ inconsistant et donc non satisfiable (complétude).

Ainsi : si Σ n'est pas satisfiable, il existe un sous-ensemble fini de Σ non satisfiable ; d'où, par contraposition : si tout sous-ensemble fini de Σ est satisfiable, alors Σ est satisfiable.

5.4 Df : φ est dit *conséquence sémantique* de Σ ssi tous les modèles pour Σ sont modèles pour φ.
Réciproquement, φ n'est pas conséquence sémantique de Σ ssi il existe un modèle A tel que $A \vDash \Sigma$ et $A \nvDash \varphi$.

Remarque : trivialement, si $\varphi \in \Sigma$ alors tous les modèles de Σ sont modèles de φ et donc $\Sigma \vDash \varphi$. Si l'on note Γ l'ensemble des conséquences sémantiques de Σ, on a donc : $\Sigma \subseteq \Gamma$.

5.4.1 Th. : $\Sigma \vdash \varphi$ ssi $\Sigma \vDash \varphi$

Démonstration [2] :

1. Dans le sens $\rightarrow$: si $\Sigma \vdash \varphi$ alors $\Sigma \vDash \varphi$

   A démontrer : si une phrase φ est déductible d'un ensemble de phrases Σ, alors φ est vraie dans tous les modèles de Σ.

2. On admet que Σ est consistant et admet donc au moins un modèle ; si tel n'était pas le cas, ce résultat serait trivial

On a déjà démontré que si φ est déductible de Σ qui admet un modèle quelconque A, alors φ est vraie dans A (cf. première partie de la démonstration du théorème de complétude, 5.3).

A étant un modèle quelconque, cela vaut pour tout modèle de Σ. Donc, si $\Sigma \vdash \varphi$, alors φ est vraie dans tout modèle de Σ, et donc $\Sigma \vDash \varphi$. CQFD

2. Dans le sens $\leftarrow$: si $\Sigma \vDash \varphi$ alors $\Sigma \vdash \varphi$.

   On démontre la contraposée : si $\Sigma \nvdash \varphi$ alors $\Sigma \nvDash \varphi$.

   Si $\Sigma \nvdash \varphi$ alors $\Sigma \cup \{\sim\varphi\}$ est consistant (par 4.3.3) et admet un modèle A (par le th. de complétude) tel que $A \vDash \Sigma$ et $A \vDash \sim\varphi$, et donc tel que $A \vDash \Sigma$ et $A \nvDash \varphi$. Il existe ainsi au moins un modèle, à savoir A, qui est modèle pour Σ et n'est pas modèle pour φ ; donc $\Sigma \nvDash \varphi$. CQFD.

5.4.2 Th. : Si $\Sigma \vDash \varphi$, alors il y a un sous-ensemble fini Σ_1 de Σ tel que $\Sigma_1 \vDash \varphi$.

6 Introduction à la notion de “théorie”.

6.1 Dfs. :

- un ensemble de phrases Σ est appelé une *théorie*.

- une théorie Σ est *close* ssi toutes les conséquences de Σ appartiennent à Σ.

- une théorie Σ est *complète* ssi pour toute phrase φ, soit $\Sigma \vDash \varphi$, soit $\Sigma \vDash \sim\varphi$, mais pas les deux (en vertu de 5.4.1 cela revient à : une théorie Σ est complète ssi pour toute phrase φ, soit $\Sigma \vdash \varphi$, soit $\Sigma \vdash \sim\varphi$, mais pas les deux).

6.2 Th : Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

- Σ est une théorie complète,
- Σ a exactement un modèle,
- Γ, ensemble des conséquences de Σ, est maximal consistant.

Démonstration :

a. Σ est une théorie complète ssi Σ a exactement un modèle.
   Par contraposition. On suppose que Σ admet deux modèles distincts A et B.

$A \neq B$ ssi il existe p_i tel que $p_i \in A$ et $p_i \notin B$ (ou l'inverse, la démonstration est la même) ssi $\Sigma \nvDash p_i$ (par déf. puisque l'on a $B \vDash \Sigma$ et $B \nvDash p_i$) et $\Sigma \nvDash \sim p_i$ (idem) ssi Σ n'est pas complète (par déf.).

b. Σ est une théorie complète ssi Γ, ensemble des conséquences de Σ, est maximal consistant.
Σ est une théorie complète ssi pour tout φ, soit $\Sigma \vdash \varphi$ soit $\Sigma \vdash \sim\varphi$ mais pas les deux, ssi soit $\varphi \in \Gamma$ soit $\sim\varphi \in \Gamma$ mais pas les deux (par déf de Γ) ssi Γ est maximal consistant (par 4.4.3).

c. Σ a exactement un modèle ssi Γ, ensemble des conséquences de Σ, est maximal consistant.
Découle de a. et b. !

Cependant (par contraposition) :
Γ consistant mais non maximal ssi il existe φ tel que $\varphi \notin \Gamma$ et $\sim\varphi \notin \Gamma$ (par 4.4.3) ssi il existe φ tel que $\Sigma \nvDash \varphi$ et $\Sigma \nvDash \sim\varphi$ (par déf de Γ) ssi il existe un modèle A tq. $A \vDash \Sigma$ et $A \nvDash \varphi$ (i.e. $A \vDash \sim\varphi$) et un modèle B tq. $B \vDash \Sigma$ et $B \nvDash \sim\varphi$ ssi $A \vDash \Sigma$ et $B \vDash \Sigma$ et $A \neq B$ (puisque $A \vDash \sim\varphi$ et $B \nvDash \sim\varphi$). CQFD.

6.3 Dfs. :

- un ensemble de phrases Θ est un *ensemble d'axiomes* pour une théorie Σ ssi toutes les conséquences de Θ sont conséquences de Σ et réciproquement.

- une théorie est *finiment axiomatisable* ssi elle a un ensemble fini d'axiomes.

- un ensemble d'axiomes Θ est *indépendant* ssi pour tout φ appartenant à Θ, $\Theta - \{\varphi\} \nvDash \varphi$.

- un ensemble de phrases Σ est dit *croissant* ssi si $A \vDash \Sigma$ et $A \subseteq B$, alors $B \vDash \Sigma$.

- une phrase φ est dite *positive* ssi elle ne comporte que les deux connecteurs "$\wedge$" et "$\vee$".

6.3.1 Th. : Θ est un ensemble d'axiomes pour Σ ssi tout modèle de Θ est modèle de Σ et réciproquement.

Démonstration dans le sens $\rightarrow$:

Supposons qu'il existe un modèle A tel que $A \models \Theta$ et $A \not\models \Sigma$. Il existe donc au moins une phrase $\varphi \in \Sigma$ telle que $A \not\models \varphi$, donc, puisque $A \models \Theta$, $\Theta \not\models \varphi$. Or, puisque $\varphi \in \Sigma$, $\Sigma \models \varphi$; donc il y a au moins une phrase qui est conséquence de Σ mais pas de Θ. Θ n'est donc pas un ensemble d'axiomes pour Σ (même chose si $A \not\models \Theta$ et $A \models \Sigma$).

Dans le sens $\leftarrow$:

Trivial : si les ensembles Θ et Σ ont exactement les mêmes modèles, ils ont exactement les même conséquences.

6.3.2 Th. : Si Σ_1 et Σ_2 sont deux théories telles que l'ensemble des modèles de l'une est complémentaire de l'ensemble des modèles de l'autre, alors Σ_1 et Σ_2 sont finiment axiomatisables.

Démonstration :

Puisque Σ_1 et Σ_2 n'ont aucun modèle en commun, $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ n'est pas satisfiable et donc, en particulier, n'est pas finiment satisfiable, i.e. au moins un de ses sous-ensembles finis n'est pas satisfiable (par le théorème de compacité).

Il existe donc un sous-ensemble fini de $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ qui n'est pas satisfiable, disons Θ. Puisque Σ_1 et Σ_2 sont satisfiables, Θ ne peut être un sous-ensemble de Σ_1 ou de Σ_2 seulement. Θ est donc l'union de deux sous ensembles finis, Θ_1 et Θ_2 de Σ_1 et Σ_2 respectivement. Θ_1 et Θ_2 sont donc l'un et l'autre satisfiables mais pas $\Theta_1 \cup \Theta_2$.

Maintenant, pour tout modèle A, si $A \models \Theta_1$, alors $A \not\models \Theta_2$ et donc $A \not\models \Sigma_2$; d'où, puisque, par hypothèse, l'ensemble des modèles de Σ_2 est le complémentaire de l'ensemble des modèles de Σ_1, $A \models \Sigma_1$, ; autrement, dit tous les modèles de Θ_1 sont modèles de Σ_1.

Même raisonnement pour Σ_2 et donc : tous les modèles de Θ_2 sont modèles de Σ_2.

Comme, trivialement, tous les modèles de Σ_1 sont modèles de Θ_1, et tous les modèles de Σ_2 sont modèles de Θ_2, il en résulte que Θ_1 et Σ_1 ont exactement les mêmes modèles, tout comme Θ_2 et Σ_2 ; donc, par 6.3.1, Θ_1 est un ensemble d'axiomes fini pour Σ_1, et Θ_2 pour Σ_2. CQFD.

6.3.4 Th : $A \subseteq B$ ssi toute phrase positive vraie dans A est vraie dans B.

6.3.4 Th : Une théorie consistante Σ est croissante ssi elle a un ensemble d'axiomes positifs.

Table des matières