

1 Exercices de déduction naturelle – Corrections

1.1

Vous démontrerez que l'on peut dériver C à partir des prémisses $A \vee B$, $A \rightarrow C$ et $B \rightarrow C$.

1		$A \vee B$	P
2		$A \rightarrow C$	P
3		$B \rightarrow C$	P
4		— $\neg C$	A
5			
6			
7			
8			
9			
10		$A \vee B$	R1
11		B	\vee E, 9, 10
12		$B \rightarrow C$	R3
13		C	\rightarrow E, 11, 12
14		$\neg\neg C$	\neg I, 4-13
15		C	\neg E, 14

1.2

Vous démontrerez que l'on peut dériver $B \rightarrow (D \rightarrow \neg J)$ à partir des prémisses $B \rightarrow (D \rightarrow E)$, $(E \wedge F) \rightarrow G$ et $J \rightarrow \neg(F \rightarrow G)$.

1	$B \rightarrow (D \rightarrow E)$	P
2	$(E \wedge F) \rightarrow G$	P
3	$J \rightarrow \neg(F \rightarrow G)$	P
4	B	A
5	$B \rightarrow (D \rightarrow E)$	R1
6	$(D \rightarrow E)$	\rightarrow E, 4, 5
7	D	A
8	$(D \rightarrow E)$	R6
9	E	\rightarrow E, 7,8
10	J	A
11	$J \rightarrow \neg(F \rightarrow G)$	R3
12	$\neg(F \rightarrow G)$	\rightarrow E, 10,11
13	F	A
14	E	R9
15	$(E \wedge F)$	\wedge I, 13,14
16	$(E \wedge F) \rightarrow G$	R2
17	G	\rightarrow E, 15,16
18	$(F \rightarrow G)$	\rightarrow I, 13-17
19	$\neg J$	\neg I, 10-18
20	$(D \rightarrow \neg J)$	\rightarrow I, 7-19
21	$B \rightarrow (D \rightarrow \neg J)$	\rightarrow I, 4-20

1.3

Vous démontrerez que l'on peut dériver D à partir des prémisses $\neg(C \rightarrow B)$ et $\neg B \rightarrow D$.

1	$\neg(C \rightarrow B)$	P
2	$\neg B \rightarrow D$	P
3	$\neg D$	A
4	$\neg B$	A
5	$\neg B \rightarrow D$	R2
6	D	\rightarrow E, 4, 5
7	$\neg D$	R3
8	$\neg\neg B$	\neg I, 4-7
9	B	\neg E, 8
10	C	A
11	B	R9
12	$(C \rightarrow B)$	\rightarrow I, 10-11
13	$\neg(C \rightarrow B)$	R1
14	$\neg\neg D$	\neg I, 3-13
15	D	\neg E, 14

1.4

Vous démontrerez que l'on peut dériver $B \leftrightarrow \neg C$ à partir de la prémisse $C \leftrightarrow \neg B$.

1	$C \leftrightarrow \neg B$	P
2	B	A
3	$\neg B \rightarrow C$	\leftrightarrow E, 1
4	$C \rightarrow \neg B$	\leftrightarrow E, 1
5	C	A
6	$C \rightarrow \neg B$	R4
7	$\neg B$	\rightarrow E, 5,6
8	B	R2
9	$\neg C$	\neg I, 5-8
10	$B \rightarrow \neg C$	\rightarrow I, 2-9
11	$\neg C$	A
12	$\neg B \rightarrow C$	\leftrightarrow E, 1
13	$C \rightarrow \neg B$	\leftrightarrow E, 1
14	$\neg B$	A
15	$\neg B \rightarrow C$	R12
16	C	\rightarrow E, 14,15
17	$\neg C$	R11
18	$\neg\neg B$	\neg I, 14-17
19	B	\neg E, 18
20	$\neg C \rightarrow B$	\rightarrow I, 11-19
21	$B \leftrightarrow \neg C$	\leftrightarrow I, 10,20

1.5

Vous démontrerez que l'on peut dériver $A \wedge (B \vee C)$ à partir de la prémisse $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.

1	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	P
2	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">$(A \wedge B)$</div>	A
3	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">A</div>	$\wedge E, 2$
4	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">B</div>	$\wedge E, 2$
5	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">$B \vee C$</div>	$\vee I 5$
6	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">$A \wedge (B \vee C)$</div>	$\wedge I, 5, 3$
7	$(A \wedge B) \rightarrow (A \wedge (B \vee C))$	$\rightarrow I, 2-6$
8	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">$(A \wedge C)$</div>	A
9	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">A</div>	$\wedge E, 8$
10	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">C</div>	$\wedge E, 8$
11	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">$B \vee C$</div>	$\vee I, 10$
12	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">$A \wedge (B \vee C)$</div>	$\wedge I, 9, 11$
13	$(A \wedge C) \rightarrow (A \wedge (B \vee C))$	$\rightarrow I, 8-12$
14	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">$\neg(A \wedge (B \vee C))$</div>	A
15	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> <div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">$(A \wedge B)$</div> </div>	A
16	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> <div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">$(A \wedge B) \rightarrow (A \wedge (B \vee C))$</div> </div>	R7
17	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> <div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">$(A \wedge (B \vee C))$</div> </div>	$\rightarrow E, 15, 16$
18	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> <div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">$\neg(A \wedge (B \vee C))$</div> </div>	R14
19	$\neg(A \wedge B)$	$\neg I, 15-18$
20	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	R1
21	$(A \wedge C)$	$\vee E, 19, 20$
22	$(A \wedge C) \rightarrow (A \wedge (B \vee C))$	R13
23	$A \wedge (B \vee C)$	$\rightarrow E, 21, 22$
24	$\neg\neg(A \wedge (B \vee C))$	$\neg I, 14-23$
25	$A \wedge (B \vee C)$	$\neg E 25$

1.6

Vous démontrerez que l'on peut dériver la formule $(A \rightarrow B) \rightarrow [A \rightarrow (A \vee C)]$ sans prémisses.

1			$(A \rightarrow B)$	A
2				A
3				$\vee I, 2$
4			$A \rightarrow (A \vee C)$	$\rightarrow I, 2-3$
5			$(A \rightarrow B) \rightarrow [A \rightarrow (A \vee C)]$	$\rightarrow I, 1-4$

1.7

Vous démontrerez que l'on peut dériver la formule $\{[(A \wedge B) \rightarrow C] \wedge \neg C\} \rightarrow \neg(A \wedge B)$ sans prémisses.

1			$[(A \wedge B) \rightarrow C] \wedge \neg C$	A
2				$\wedge E, 1$
3				$\wedge E, 1$
4				A
5				R3
6				$\rightarrow E, 4,5$
7				R2
8			$\neg(A \wedge B)$	$\neg I, 4-7$
9			$\{[(A \wedge B) \rightarrow C] \wedge \neg C\} \rightarrow \neg(A \wedge B)$	$\rightarrow I, 1-8$

1.8

Vous démontrerez que l'on peut dériver la formule $[(B \vee \neg C) \wedge (C \rightarrow D) \wedge C] \rightarrow (B \wedge D)$ sans prémisse.

1	$[(B \vee \neg C) \wedge (C \rightarrow D) \wedge C]$	A
2	C	\wedge E, 1
3	$(C \rightarrow D)$	\wedge E, 1
4	D	\rightarrow E 2,3
5	$(B \vee \neg C)$	\wedge E, 1
6	B	\vee E, 2, 5
7	$(B \wedge D)$	\wedge I, 4, 6
8	$[(B \vee \neg C) \wedge (C \rightarrow D) \wedge C] \rightarrow (B \wedge D)$	\rightarrow I, 1-7

1.9

Vous démontrerez que l'on peut dériver la formule $\{[A \rightarrow (D \wedge F)] \wedge [A \rightarrow (C \vee \neg D)]\} \rightarrow [A \rightarrow (C \wedge F)]$ sans prémisse.

1	$\{[A \rightarrow (D \wedge F)] \wedge [A \rightarrow (C \vee \neg D)]\}$	A
2	A	A
3	$[A \rightarrow (D \wedge F)]$	\wedge E, 1
4	$(D \wedge F)$	\rightarrow E, 2, 3
5	$[A \rightarrow (C \vee \neg D)]$	\wedge E, 1
6	$(C \vee \neg D)$	\rightarrow E, 2, 5
7	D	\wedge E, 4
8	C	\vee E 6,7
9	F	\wedge E, 4
10	$(C \wedge F)$	\wedge I, 8, 9
11	$[A \rightarrow (C \wedge F)]$	\rightarrow I, 2-10
12	$\{[A \rightarrow (D \wedge F)] \wedge [A \rightarrow (C \vee \neg D)]\} \rightarrow [A \rightarrow (C \wedge F)]$	\rightarrow I, 1-11

1.10

Vous démontrerez que l'on peut dériver $[A \rightarrow (B \rightarrow C)] \leftrightarrow [(A \wedge B) \rightarrow C]$ sans prémisse

1	$[A \rightarrow (B \rightarrow C)]$	A
2	$A \wedge B$	A
3	A	\wedge E, 2
4	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	R1
5	$(B \rightarrow C)$	\rightarrow E, 4, 5
6	B	\wedge E, 2
7	C	\rightarrow E, 5, 6
8	$[(A \wedge B) \rightarrow C]$	\rightarrow I, 2-6
9	$[A \rightarrow (B \rightarrow C)] \rightarrow [(A \wedge B) \rightarrow C]$	\rightarrow I, 1-8
10	$[(A \wedge B) \rightarrow C]$	A
11	A	A
12	B	A
13	A	R11
14	$(A \wedge B)$	\wedge I, 11, 12
15	$[(A \wedge B) \rightarrow C]$	R10
16	C	\rightarrow E, 14, 15
17	$(B \rightarrow C)$	\rightarrow I, 12-16
18	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	\rightarrow I, 11-17
19	$[(A \wedge B) \rightarrow C] \rightarrow [A \rightarrow (B \rightarrow C)]$	\rightarrow I, 10-18
20	$[A \rightarrow (B \rightarrow C)] \leftrightarrow [(A \wedge B) \rightarrow C]$	\leftrightarrow I, 9, 19