

Contrôle continu de logique L1 n°2 – Semestre 2 – Correction

Mercredi 1er Avril 2015

Tous les documents sont autorisés.

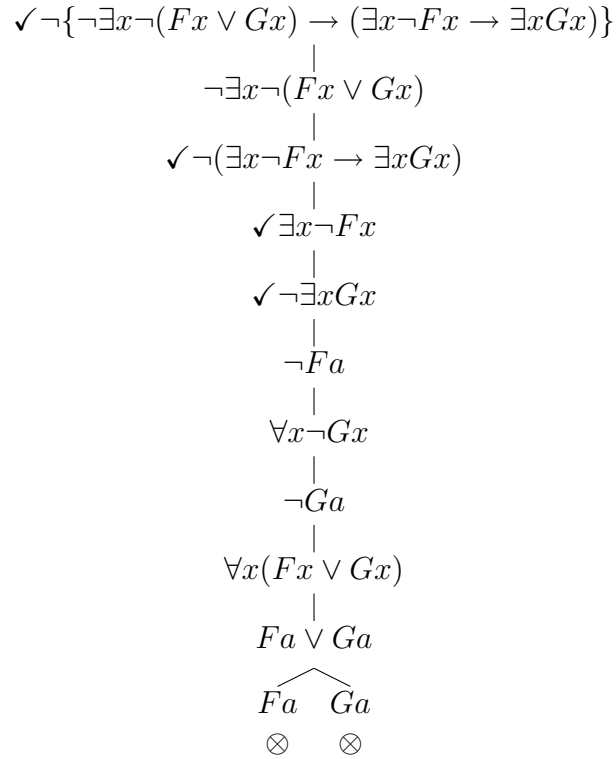
Toutes les réponses doivent être rédigées, détaillées, et justifiées.

1 Vérités logiques (8 pts)

Vous déterminerez – à l'aide de la méthode des arbres de vérité – si les formules suivantes sont des vérités logiques.

1. $\neg\exists x\neg(Fx \vee Gx) \rightarrow (\exists x\neg Fx \rightarrow \exists xGx)$

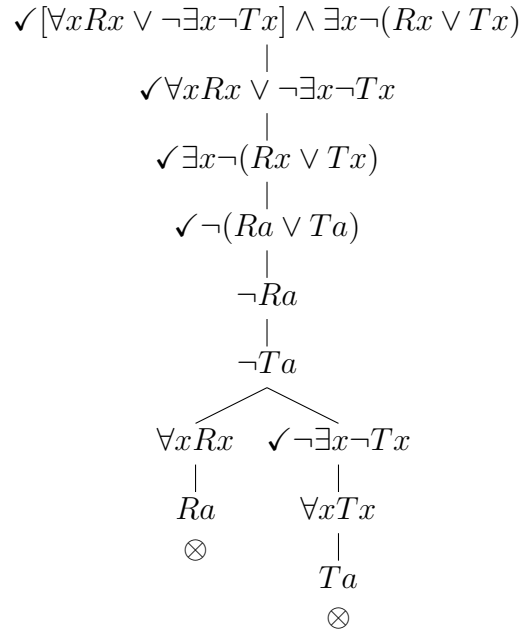
L'arbre pour cette première formule aura l'allure suivante :



Toutes les branches de l'arbre ferment, c'est donc que la formule en haut de l'arbre est contradictoire, et que la formule de départ (la formule à évaluer) est une vérité logique.

2. $\neg \{ [\forall x Rx \vee \neg \exists x \neg Tx] \wedge \exists x \neg (Rx \vee Tx) \}$

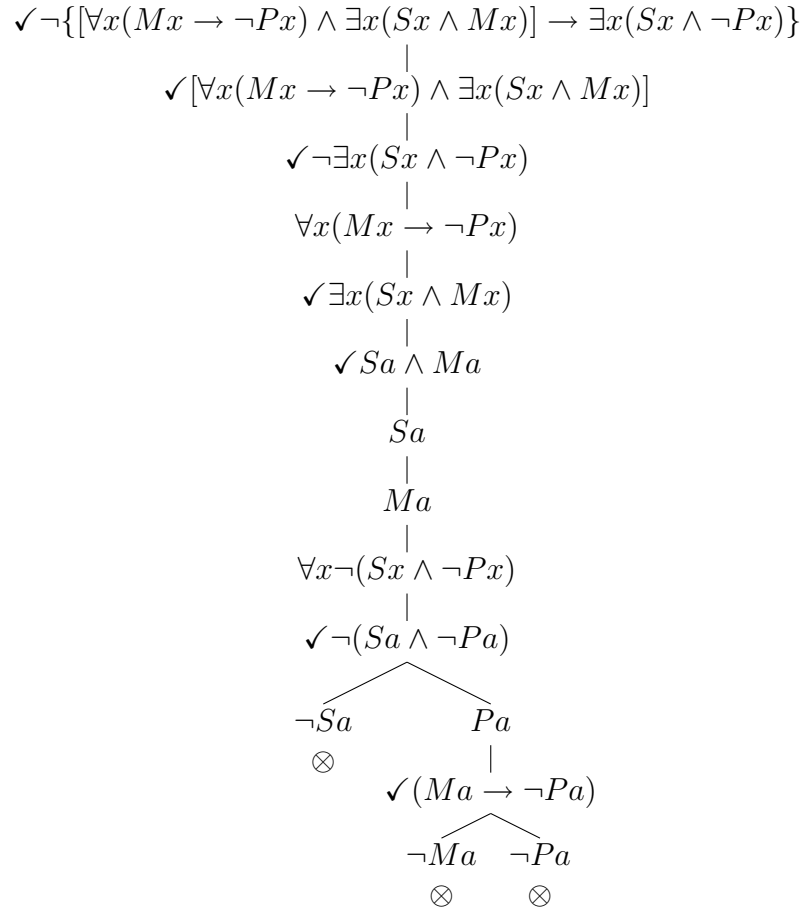
L'arbre pour cette formule prendra l'allure suivante :



Toutes les branches de l'arbre ferment, c'est donc que la formule en haut de l'arbre est contradictoire, et que la formule de départ (la formule à évaluer) est une vérité logique.

3. $[\forall x (Mx \rightarrow \neg Px) \wedge \exists x (Sx \wedge Mx)] \rightarrow \exists x (Sx \wedge \neg Px)$

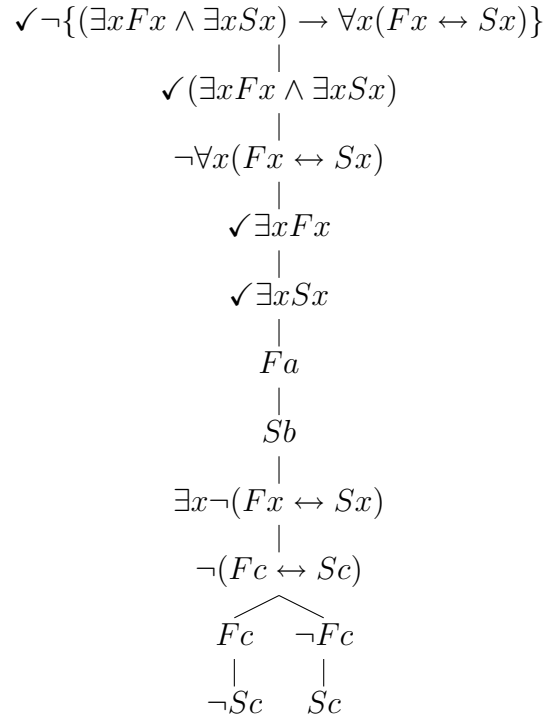
L'arbre pour cette formule prendra l'allure suivante :



Toutes les branches de l'arbre ferment, c'est donc que la formule en haut de l'arbre est contradictoire, et que la formule de départ (la formule à évaluer) est une vérité logique.

4. $(\exists xFx \wedge \exists xSx) \rightarrow \forall x(Fx \leftrightarrow Sx)$

L'arbre pour cette formule aura l'allure suivante :



Ici, aucune branche de l'arbre ne ferme : cela veut dire que la formule à évaluer n'est pas une vérité logique (il est possible de rendre vraie sa négation, donc il est possible qu'elle soit fausse).

Elle sera notamment fausse dans un domaine à trois éléments, avec l'interprétation des lettres de prédicats suivante :

$$D : \{a, b, c\}$$

$$F : \{a, c\}$$

$$S : \{b\}$$

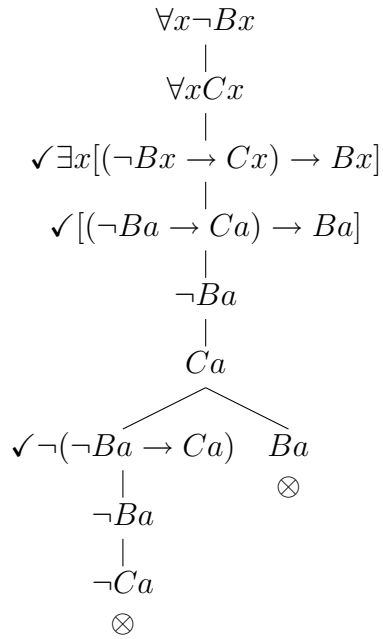
On le prouvera en passant par la formule équivalente, dans le langage *Prop* :

$$[(Fa \vee Fb \vee Fc) \wedge (Sa \vee Sb \vee Sc)] \rightarrow [(Fa \leftrightarrow Sa) \wedge (Fb \leftrightarrow Sb) \wedge (Fc \leftrightarrow Sc)]$$

Sous cette interprétation, l'antécédent est vrai, le conséquent faux.

2 Équivalence logique (4 pts)

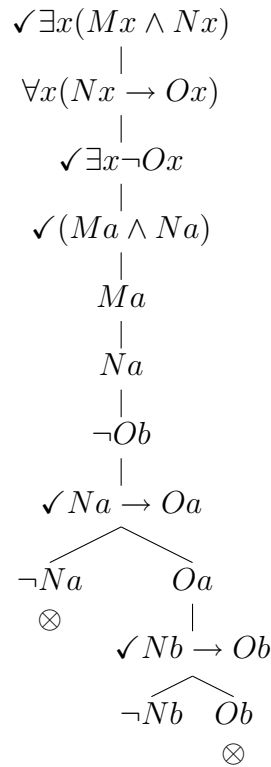
Vous démontrerez – à l'aide de la méthode des arbres de vérité – que la formule $(\exists xPx \vee \exists xRx)$ est logiquement équivalente à la formule $\exists x(Px \vee Rx)$.



Toutes les branches de l'arbre ferment. Il est impossible de rendre vraies ces formules simultanément, ce qui signifie que l'ensemble de formules considéré est inconsistant.

2. $\exists x(Mx \wedge Nx), \forall x(Nx \rightarrow Ox), \exists x \neg Ox$.

Pour vérifier que l'ensemble de formules est consistant, nous allons essayer de rendre vraies ses formules en dressant l'arbre de vérité correspondant :



Une branche de l'arbre est ouverte et il n'y a plus de formules à traiter. Il y a donc une interprétation qui rend vraies toutes les formules de l'ensemble.

L'interprétation est la suivante :

$D : \{a, b\}$

$M : \{a\}$

$N : \{a\}$

$O : \{a\}$

Nous pouvons le prouver en passant par le langage *Prop*. La formule équivalente est la suivante :

$$[(Ma \wedge Na) \vee (Mb \wedge Nb)] \wedge (Na \rightarrow Oa) \wedge (Nb \rightarrow Ob) \wedge (\neg Oa \vee \neg Ob)$$

Chacun des conjoints est vrai, la conjonction est donc vraie.