Contrôle continu de logique L1 n°2 - Semestre 1

Mardi 1er Décembre 2015

Tous les documents sont autorisés.

Feuille imprimée *recto & verso*.

Toutes les réponses doivent être *justifiées* et *détaillées*.

1 Déduction naturelle (15 pts)

1.1 (2 pts)

Vous dériverez la formule $(A \to C)$ à partir des prémisses $(\neg C \to D)$ et $(D \to \neg A)$.

1	$(\neg C \to D)$	P
2	$(D \to \neg A)$	P
3	$\quad \mid A$	A
4	$\quad \mid \quad \mid \neg C$	A
5	$\quad \mid \quad \mid (\neg C \to D)$	R1
6	$\quad \mid \quad \mid D$	→E, 4, 5
7	$\quad \mid \quad \mid (D \to \neg A)$	R2
8	$\quad \mid \quad \mid \neg A$	→ E, 6, 7
9	$\quad \mid \quad \mid A$	R3
10	$\quad \mid \neg\neg C$	¬ I, 4-9
11	$\quad \mid C$	¬ E, 10
12	$(A \to C)$	→ I, 3-11

1.2 (2 pts)

Vous dériverez la formule $\neg(A \wedge \neg B)$ de la prémisse $[(\neg A \vee B) \wedge \neg B]$.

1	$[(\neg A \vee B) \wedge \neg B]$	P
2	$\quad (A \wedge \neg B)$	A
3	$\quad (\neg A \vee B) \wedge \neg B$	R1
4	$\quad (\neg A \vee B)$	$\wedge$ E, 3
5	$\quad A$	$\wedge$ E, 2
6	$\quad\quad \neg A$	A
7	$\quad\quad A$	R5
8	$\quad \neg\neg A$	$\neg$ I, 6-7
9	$\quad B$	$\vee$ E, 4, 8
10	$\quad \neg B$	$\wedge$ E, 3
11	$\neg(A \wedge \neg B)$	$\neg$ I, 2-10

1.3 (3 pts)

Vous démontrerez que la formule $[(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C)] \rightarrow (A \vee C)$ est une instance de loi logique.

1	$\quad [(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C)]$	A
2	$\quad\quad \neg(A \vee C)$	A
3	$\quad\quad (A \vee B)$	$\wedge$ E, 1
4	$\quad\quad (\neg B \vee C)$	$\wedge$ E, 1
5	$\quad\quad\quad A$	A
6	$\quad\quad\quad A \vee C$	$\vee$ I, 5
7	$\quad\quad\quad \neg(A \vee C)$	R2
8	$\quad\quad \neg A$	$\neg$ I, 5-7
9	$\quad\quad\quad C$	A
10	$\quad\quad\quad (A \vee C)$	$\vee$ I, 9
11	$\quad\quad\quad \neg(A \vee C)$	R2
12	$\quad\quad \neg C$	$\neg$ I, 9-11
13	$\quad\quad B$	$\vee$ E, 3, 8
14	$\quad\quad \neg B$	$\vee$ 4, 12
15	$\quad \neg\neg(A \vee C)$	$\neg$ I, 2-14
16	$\quad (A \vee C)$	$\neg$ E, 15
17	$[(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C)] \rightarrow (A \vee C)$	$\rightarrow$ I, 1-16

1.4 **(4 pts)**

Vous démontrerez que la formule $(A \to B)$ est logiquement équivalente à $\neg(A \wedge \neg B)$.

1	$(A \to B)$	A
2	$(A \wedge \neg B)$	A
3	A	$\wedge$ E, 2
4	$(A \to B)$	R1
5	B	$\to$ E, 3, 4
6	$\neg B$	$\wedge$ E, 2
7	$\neg(A \wedge \neg B)$	$\neg$ I, 2-6
8	$(A \to B) \to \neg(A \wedge \neg B)$	$\to$ I, 1-7
9	$\neg(A \wedge \neg B)$	A
10	A	A
11	$\neg B$	A
12	$A \wedge \neg B$	$\wedge$ I, 10, 11
13	$\neg(A \wedge \neg B)$	R9
14	$\neg\neg B$	$\neg$ I, 11-14
15	B	$\neg$ E, 14
16	$(A \to B)$	$\to$ I, 10-15
17	$\neg(A \wedge \neg B) \to (A \to B)$	$\to$ I, 9-16
18	$[(A \to B) \leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)]$	$\leftrightarrow$ I, 8, 17

1.5 **(4 pts)**

Vous démontrerez que la formule $(A \vee B)$ est logiquement équivalente à $\neg(\neg A \wedge \neg B)$.

1	$(A \vee B)$	A
2	$(\neg A \wedge \neg B)$	A
3	$\neg A$	$\wedge$ E, 2
4	$\neg B$	$\wedge$ E, 2
5	$(A \vee B)$	R1
6	B	$\vee$ 3, 5
7	$\neg(\neg A \wedge \neg B)$	$\neg$ I, 2-6
8	$(A \vee B) \rightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$	$\rightarrow$ I, 1-7
9	$\neg(\neg A \wedge \neg B)$	A
10	$\neg(A \vee B)$	A
11	A	A
12	$(A \vee B)$	$\vee$ I, 11
13	$\neg(A \vee B)$	R10
14	$\neg A$	$\neg$ I, 11-13
15	B	A
16	$A \vee B$	$\vee$ I, 15
17	$\neg(A \vee B)$	R10
18	$\neg B$	$\neg$ I, 15-17
19	$(\neg A \wedge \neg B)$	$\wedge$ I, 14, 18
20	$\neg(\neg A \wedge \neg B)$	R9
21	$\neg\neg(A \vee B)$	$\neg$ I, 10-20
22	$(A \vee B)$	$\neg$ E, 21
23	$\neg(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow (A \vee B)$	$\rightarrow$ I, 9-22
24	$[(A \vee B) \leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)]$	$\leftrightarrow$ I, 8, 23

2 Propriétés des connecteurs (3 pts)

Vous répondrez, à l'aide d'une table de vérité, aux questions suivantes :

1. La disjonction exclusive (w)[1] est-elle commutative ?
2. L'équivalence matérielle $(\leftrightarrow)$[2] est-elle commutative ?

1. Colonne 10 dans le document « Tableau des connecteurs ».
2. Colonne 7 dans le document « Tableau des connecteurs ».

Oui, et oui. La preuve passe par la table de vérité de l'équivalence $(A \mathsf{w} B) \leftrightarrow (B \mathsf{w} A)$ et de l'équivalence $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (B \leftrightarrow A)$. Ces formules sont tautologiques.

A	B	$(A \mathsf{w} B)$	$\leftrightarrow$	$(B \mathsf{w} A)$
V	V	F	V	F
V	F	V	V	V
F	V	V	V	V
F	F	F	V	F

A	B	$(A \leftrightarrow B)$	$\leftrightarrow$	$(B \leftrightarrow A)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	F	V	F
F	F	V	V	V

Ces deux formules sont tautologiques, les formules qui sont de part et d'autre du signe « $\leftrightarrow$ » sont donc logiquement équivalentes.

3 Vérifonctionnalité (2 pts)

Qu'est-ce qu'un connecteur vérifonctionnel ?
Question de cours.