Rudiments de logique propositionnelle

Fig. 1: G. Frege, 1848-1925, père fondateur de la logique contemporaine

1 Introduction

En simplifiant, on peut établir la vérité d'une proposition de deux manières.

1. On constate par l'observation que l'état de chose exprimé par la proposition est réalisé ; par ex. la proposition « la voiture démarre (en tel lieu et à telle date) » est vraie s'il est observé que la voiture démarre en ce même lieu et à cette même date.

2. On déduit (on infère, on tire) la proposition à partir d'autres propositions dont la vérité est admise. On dit en ce cas, habituellement, que l'on a fait un raisonnement. Par ex. étant admises les propositions : « s'il n'y a pas d'essence dans le réservoir de la voiture, cette dernière ne démarre pas » et « la voiture démarre », on peut en déduire : « il y a de l'essence dans le réservoir de la voiture ».

Il peut sembler « intuitivement » évident qu'un tel raisonnement est correct. L'expérience prouve que l'intuition en la matière est parfois trompeuse, surtout lorsque le raisonnement est un peu compliqué, et qu'il vaut mieux disposer d'une méthode ou d'une procédure pour s'assurer que tel ou tel raisonnement est effectivement correct (ou valide) [1]. C'est cela que fournit la logique.

Dans ce qui suit, plutôt que de raisonnement, on parlera d'inférence (valide). On peut donc donner la définition suivante :

Définition : la logique (en un sens étroit) est la science qui établit quelles sont les inférences valides.

2 Inférence valide

Une inférence est constituée d'une ou de plusieurs prémisses et d'une conclusion. On dit que la conclusion est inférée (ou déduite, ou tirée) des prémisses. On présente habituellement une inférence en écrivant les unes en dessous des autres les prémisses et la conclusion, cette dernière venant en dernier et étant séparée par un trait horizontal des prémisses. Dans l'ex. ci-dessus cela donne :

S'il n'y a pas d'essence dans le réservoir de la voiture, cette dernière ne démarre pas
La voiture démarre
―――――――――――
Il y a de l'essence dans le réservoir de la voiture

- Définition : Une inférence est valide s'il n'est pas possible que les prémisses soient vraies et la conclusion fausse ;

autre formulation : une inférence est valide si toutes les fois que les prémisses sont vraies, la conclusion l'est ;

ou encore : une inférence est valide si, dans tous les mondes possibles dans lesquels les prémisses sont vraies, la conclusion l'est également.

On voit que cette définition mentionne certes la vérité des prémisses et de la conclusion, mais ne suppose pas que les prémisses et la conclusion soient de fait vraies ; elle exclut seulement le cas où les prémisses seraient vraies et la conclusion fausse, mais elle laisse ouverte la possibilité que les prémisses soient fausses et la conclusion vraie, ou que les prémisses et la conclusion soient fausses ou encore, bien sûr, que prémisses et conclusion soient vraies. Autrement dit, on peut « raisonner » correctement à partir de prémisses fausses, tout comme on peut « raisonner » correctement en aboutissant à une conclusion fausse.

1. Comme le disait le vieil Aristote, « que certains raisonnements soient des raisonnements véritables, tandis que d'autres paraissent l'être tout en ne l'étant pas, c'est là une chose manifeste. [...] C'est de la même façon que raisonnement et réfutation sont tantôt véritables, et tantôt ne le sont pas, bien que l'inexpérience les fasse paraître tels : car les gens inexpérimentés n'en ont, pour ainsi dire, qu'une vue éloignée. » *Réfutations sophistiques* 164 a 23 - 164 b 29.

Exemple : modifions un peu notre exemple ci-dessus :

Si Jean n'est pas dans la voiture, cette dernière ne démarre pas
La voiture démarre

Jean est dans la voiture

La première prémisse est très vraisemblablement fausse (dans notre monde) et peut-être la conclusion est-elle également fausse, peu importe ; mais cette inférence « ressemble beaucoup » à la précédente, puisque l'on s'est contenté de remplacer la proposition « il y a de l'essence dans le réservoir de la voiture » par : « Jean est dans la voiture » et l'inférence est tout autant valide, puisque si jamais les deux prémisses étaient vraies, la conclusion le serait également. On pourrait s'amuser à substituer aux propositions « Jean est dans voiture » et « la voiture démarre » n'importe quelles autres propositions, si farfelues soient-elles ; l'inférence resterait toujours valide, pour la même raison.

Première conséquence : il faut rigoureusement distinguer le fait pour une proposition d'être vraie ou fausse, et le fait pour une inférence (un raisonnement) d'être ou de n'être pas valide. Deuxième conséquence : la vérité ou la fausseté d'une proposition dans notre monde dépend évidemment de ce qu'elle signifie, autrement dit de son contenu ; si donc la validité d'une inférence ne dépend pas de la vérité ou de la fausseté de fait des prémisses et de la conclusion, on peut en conclure qu'elle ne dépend pas du contenu particulier de ces dernières. La validité d'une inférence repose sur la forme des prémisses et de la conclusion, forme que l'on met en évidence par le jeu des substitutions faites il y a un instant et que l'on peut noter de la manière suivante (les petites lettres p et q symbolisent des propositions quelconques) :

$$\frac{\text{Si non-}p\text{, alors non-}q \qquad q}{p}$$

C'est pourquoi l'expression souvent usitée : « logique formelle », est un pléonasme !

3 Forme logique, niveau d'analyse

Dans l'exemple précédent, on a fait abstraction du contenu particulier des propositions que l'on a symbolisées par les lettres p et q, ce qui laisse, comme invariants, les petits mots « si..., alors... » et « non... ». Ces petits mots, que l'on peut appeler « petits mots logiques », relient entre elles des propositions entières. On définit minimalement une proposition comme étant une suite de mots, soit vraie, soit fausse : « la beauté de la Vénus de Milo », n'est pas une proposition, car cette suite de mots n'est ni vraie, ni fausse ; par contre, « la Vénus de Milo est belle » est une proposition, tout comme : « la beauté de la Vénus de Milo surpasse celle de la Victoire de Samothrace ». On appellera ces petits mots logiques qui relient des propositions, des connecteurs propositionnels, ou, plus simplement, des connecteurs. Dans le langage ordinaire, les « conjonctions de coordination », par ex., sont des connecteurs propositionnels, ainsi que les « conjonctions de subordination ». On comptera parmi les connecteurs, la négation, qui ne relie pas deux propositions, mais ne porte que sur une proposition.

Une proposition peut être soit élémentaire (ou simple), soit complexe : une proposition élémentaire est une proposition qui n'est pas composée d'autres propositions reliées par des connecteurs ou qui ne comporte pas de négation. Une proposition complexe (ou moléculaire), à l'inverse, est composée de plusieurs propositions élémentaires reliées par des connecteurs ou bien comporte au moins une négation. « La voiture démarre » est une proposition élémentaire ; par contre « si Jean est assis dans la voiture, alors la voiture démarre », est complexe, puisqu'elle est composée des deux propositions élémentaires « Jean est assis dans la voiture » et « la voiture démarre » reliées par « si…, alors… » ; tout comme est complexe, « Paul n'est pas gentil » qui est la négation de la proposition élémentaire « Paul est gentil ». Une proposition complexe peut donc être analysée en une ou plusieurs propositions (élémentaires) ; par contre une proposition élémentaire n'est pas analysable en d'autres propositions.

Comme l'exemple précédent le montre, la validité de certaines inférences ne repose que sur ces connecteurs et sur la place qu'occupent les différentes propositions qui entrent dans ces inférences. Ce n'est pas toujours le cas. Soit en effet le célèbre « syllogisme » :

$$\frac{\begin{array}{c}\text{tous les hommes sont mortels}\\ \text{tous les grecs sont des hommes}\end{array}}{\text{tous les grecs sont mortels}}$$

Si l'on ne fait abstraction que du contenu des propositions, cela donne :

$$\frac{\begin{array}{c}p\\ q\end{array}}{r}$$

qui ne représente certainement pas une inférence valide ; ce que l'on peut facilement constater si l'on remplace, par ex., p par : « l'eau bout à 100° », q par : « la marche des planètes est erratique » et r par : « la vie ne vaut pas la peine d'être vécue ».

La validité, intuitivement « évidente », de cette inférence, semble tenir à ce que les propositions ont des « termes » en commun ('mortels', 'hommes', 'grecs') et que certains de ces termes sont précédés de « tous les ». Si l'on fait abstraction du contenu de ces termes, on obtient le schéma suivant (en symbolisant les termes par les lettres P, Q, R) :

$$\frac{\begin{array}{c}\text{tous les Q sont R}\\ \text{tous les P sont Q}\end{array}}{\text{tous les P sont R}}$$

On constate facilement que quels que soient les termes que l'on met à la place des lettres P, Q, et R, on obtient une inférence valide. Pour mettre en évidence la forme d'une telle inférence, il faut donc prendre en compte la forme des propositions « élémentaires » elles-mêmes et donc analyser ces dernières. L'analyse que nous venons d'indiquer est celle qu'Aristote proposait il y a bien longtemps ; la logique contemporaine ne reprend pas cette analyse à son compte, comme on le verra plus tard.

Ainsi, on distingue deux niveaux d'analyse. À un premier niveau, assez grossier, on analyse les propositions complexes en propositions élémentaires ; à un second niveau, plus fin, on analyse ces dernières propositions, en leurs constituants. À chacun de ces niveaux, on fait apparaître des inférences valides. Le premier niveau d'analyse correspond à ce que l'on appelle la logique des propositions et le second niveau, à la logique des prédicats (du premier ordre). Pour l'instant nous ne considérerons que la logique des propositions.

4 Vérifonctionnalité (Extensionnalité)

On vient de voir que la validité d'une inférence ne dépend pas du « contenu » particulier des propositions qui constituent les prémisses et la conclusion, contenu qui permet de déterminer si ces propositions sont de fait vraies ou fausses dans notre monde. La seule chose que l'on admettra dans ce qui suit est qu'une proposition, quel que soit son contenu, est soit vraie, soit fausse [2]. En admettant cela, on n'affirme pas qu'il est effectivement possible de s'assurer qu'une proposition donnée est vraie ou fausse ; peut-être le sceptique a-t-il raison, mais cela n'est qu'une question épistémologique, pas logique. Dans une inférence valide, il est seulement exclu que les prémisses puissent être vraies et la conclusion fausse, et, comme on l'a déjà dit, cela n'implique nullement qu'on sache si de fait les prémisses et la conclusion sont vraies ou fausses. Même le sceptique doit admettre cela.

On appellera « le vrai » et « le faux », des valeurs de vérité ; on peut alors redire ce qui précède sous la forme suivante : une proposition est ce qui peut prendre l'une ou l'autre des deux valeurs de vérité. Pour l'instant, on admet qu'il n'y a que deux valeurs de vérité ; la logique étudiée est bivalente. On verra plus tard, qu'il est possible d'élaborer des logiques à plus de deux valeurs de vérité ; on jettera, en particulier, un coup d'œil sur la logique trivalente de Łukasiewicz qui admet, en plus du vrai et du faux, une troisième valeur de vérité « intermédiaire ».

4.1 La « signification » des connecteurs propositionnels

Revenons sur l'inférence dont nous sommes partis :

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Si Jean n'est pas dans la voiture, la voiture ne démarre pas}\\ \text{La voiture démarre}\end{array}}{\text{Jean est dans la voiture}}$$

Pourquoi cette inférence peut-elle être considérée comme valide ? En général, cela tient, comme on l'a vu, au fait que les prémisses ne peuvent être vraies et la conclusion fausse. Ici la première prémisse est constituée de deux propositions négatives reliées par « si. . ., alors. . . » et la deuxième prémisse n'est que la deuxième proposition de la première prémisse, mais cette fois-ci affirmée. Supposons que cette deuxième prémisse (« la voiture démarre ») soit vraie : cela veut dire alors que sa négation (« la voiture ne démarre pas »), qui figure dans la première prémisse, est fausse, et ici on admet que la négation d'une proposition vraie est fausse (et réciproquement).

Supposons maintenant que la première prémisse soit vraie. La deuxième proposition (« la voiture ne démarre pas ») qui figure dans cette prémisse est fausse par ce qui précède : cela veut dire alors que la première proposition (« Jean n'est pas dans la voiture ») qui figure dans cette prémisse, est également fausse, et ici *on admet qu'une proposition complexe de la forme « si non p, alors non q », dont la deuxième proposition, non q, est fausse, n'est vraie que lorsque la première, non p, est également fausse*. Puisque « Jean n'est pas dans la voiture » est faux, « Jean est dans la voiture » est vraie, ce qui est bien la conclusion.

En résumé, si cette inférence semble valide, c'est que l'on admet :
1. que la négation d'une proposition vraie est fausse et réciproquement,

2. Notons que cela exclut les « propositions » (au sens des grammairiens) exprimant des ordres, des souhaits, des prières, des questions, etc., « propositions » dont il n'y aurait aucun sens à se demander si elles sont vraies ou fausses.

2. qu'une proposition complexe de la forme « si p, alors q » dont la deuxième composante (q) est fausse, n'est vraie que si sa première composante (p) est également fausse.

Nous admettons donc plus généralement que la signification « logique » des connecteurs, comme « ne. . .pas », ou « si. . ., alors. . . » est *leur contribution à la détermination de la valeur de vérité d'une proposition complexe, étant donné les valeurs de vérité des propositions élémentaires qui figurent dans cette proposition complexe.*

Prenons un autre exemple dans le langage ordinaire : « Jean est dans la voiture et la voiture ne démarre pas ». Supposons que cette proposition, de la forme « p et non q », soit vraie. On admettra sans difficulté que cela implique que la proposition « Jean est dans la voiture » ainsi que la proposition « la voiture ne démarre pas » sont simultanément vraies ; et, inversement, que si l'une ou l'autre de ces deux propositions, ou les deux, étaient fausses, la proposition complexe le serait également. On peut donc légitimement inférer de « Jean est dans la voiture et la voiture ne démarre pas », « Jean est dans la voiture », puisque, si jamais la première est vraie, la seconde l'est nécessairement.

Les connecteurs examinés jusqu'alors sont de deux types : « ne. . .pas » ne porte que sur une proposition, « et » ou « si. . ., alors. . . » relie deux propositions ; il s'agit respectivement de connecteurs « unaires » et « binaires ». On peut systématiser ce qui précède de la manière suivante.

- Connecteurs binaires : une proposition ne pouvant prendre que deux valeurs de vérité, le Vrai ($\rightarrow$ V) et le Faux ($\rightarrow$ F), il n'y a donc que quatre combinaisons possibles de V - F pour deux propositions, à savoir : V/V, V/F, F/V, F/F, ce que l'on peut représenter commodément ainsi :

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Un connecteur binaire associe à chacune de ces combinaisons de V - F une des deux valeurs de vérité. Par ex. on vient de voir qu'une proposition de la forme « p et q » n'est vraie que si les deux propositions p et q sont vraies, ce que nous pouvons représenter de la manière suivante :

p	q	p et q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

De la même manière, on a admis que, dans une proposition vraie de la forme « si p alors q », si q est faux, alors p l'est également ; autrement dit, si p était vraie et q faux alors « si p alors q » serait faux. Cela permet de commencer à construire le petit tableau suivant :

p	q	si p alors q
V	V	?
V	F	F
F	V	?
F	F	V

Qu'en est-il des deux lignes incomplètes ? Il semble raisonnable d'admettre que si les deux propositions p et q sont vraies la proposition « si p alors q » l'est également. Par contre si p est fausse et q est vraie, les choses peuvent sembler moins évidentes : la proposition « si 2+2=5 alors 3+2=5 » est-elle vraie ou fausse ? Nos intuitions ne nous disent pas grand chose en ce cas ; pour des raisons encore inavouables, on admettra qu'en ce cas la proposition complexe est vraie, ce qui permet d'achever le petit tableau :

p	q	si p alors q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

4.2 Fonction de vérité

On voit qu'un connecteur binaire associe d'une certaine manière à chacune des combinaisons de valeurs de vérité indiquées dans les colonnes de gauches, une valeur de vérité indiquée dans la colonne de droite. Ce que l'on appelle ici « combinaison de valeurs de vérité » est une paire ordonnée. En termes mathématiques (ensemblistes), un connecteur binaire est donc une fonction f qui va de l'ensemble à quatre éléments : $\{<\mathrm{V,V}>, <\mathrm{V,F}>, <\mathrm{F,V}>, <\mathrm{F,F}>\}$ à l'ensemble à deux éléments $\{\mathrm{V}, \mathrm{F}\}$, ce que l'on peut représenter ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{c} <\mathrm{V, V}> \\ <\mathrm{V, F}> \\ <\mathrm{F, V}> \\ <\mathrm{F, V}> \end{array} \right\} \xrightarrow{f} \left\{ \begin{array}{c} \mathrm{V} \\ \mathrm{F} \end{array} \right\}$$

- Quelques considérations ensemblistes élémentaires pour bien comprendre ce qui précède :

Soit A et B deux ensembles.

On appelle « produit cartésien » de A et B (noté : A $\times$ B) l'ensemble de toutes les paires ordonnées dont la première 'projection' est un élément de A et la seconde un élément de B.

Exemple : soit A = $\{$a, b, c$\}$ et B = $\{$1, 2$\}$, alors :

$\mathrm{A} \times \mathrm{B} = \{<\mathrm{a},1>, <\mathrm{a},2>, <\mathrm{b},1>, <\mathrm{b},2>, <\mathrm{c},1>, <\mathrm{c},2>\}$.

Remarque : les paires $<\mathrm{a},1>$, $<\mathrm{a},2>$, etc. étant ordonnées, il en résulte que si les deux ensembles A et B sont différents (comme c'est le cas ici), les deux produits cartésiens A$\times$B et B$\times$A sont différents (même s'ils ont le même « nombre » d'éléments). À la différence de la multiplication arithmétique, la « multiplication » ensembliste n'est pas commutative.

On peut former le produit cartésien de plus de deux ensembles qui sera alors l'ensemble des triplets, quadruplets, n-uplets, tels que leur première 'projection' appartient au premier ensemble, leur deuxième, au deuxième ensemble, etc.

On peut former le produit cartésien d'un ensemble avec lui-même : A $\times$ A (que l'on peut noter A^2) est l'ensemble de toutes les paires ordonnées d'éléments de A. Si A = $\{$a, b, c$\}$ alors :

$\mathrm{A}^2 = \{<\mathrm{a, a}>, <\mathrm{a, b}>, <\mathrm{a, c}>, <\mathrm{b, a}>, <\mathrm{b, b}>, <\mathrm{b, c}>, <\mathrm{c, a}>, <\mathrm{c, b}>, <\mathrm{c, c}>\}$.

De la même manière, on peut former les produits cartésiens A^3, A^4 etc.

Comme on le voit, le « nombre » d'éléments du produit cartésien de n ensembles finis ayant respectivement m, m', m'', etc. éléments est égal à $m \times m' \times m'' \times \ldots$; en particulier, si A compte m éléments, A^n en compte m^n.

Une fonction f de A vers B (ce que l'on note : $f : \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$) associe à chaque élément de A un et un seul élément de B ; l'élément de B qui est associé à un élément x de A par f, est noté :$f(x)$ (on dit que $f(x)$ est l'image par f de x).

Le nombre de fonctions distinctes d'un ensemble A comptant n éléments vers un ensemble B, comptant m éléments, est m^n.

Comme on l'a dit plus haut, un connecteur binaire quelconque peut être considéré comme une fonction, f, qui associe à chaque paire ordonnée, élément de $\{\mathrm{V}, \mathrm{F}\}^2$ un élément de $\{\mathrm{V}, \mathrm{F}\}$, ce que l'on peut noter :

$$f : \{\mathrm{V}, \mathrm{F}\}^2 \rightarrow \{\mathrm{V}, \mathrm{F}\}.$$

Les éléments de $\{\mathrm{V}, \mathrm{F}\}^2$, sont les quatre paires ordonnées : <V, V >, <V, F>, <F, V>, <F, F>. et, par ex., l'implication que l'on vient de rencontrer est la fonction $f : \{\mathrm{V}, \mathrm{F}\}^2 \rightarrow \{\mathrm{V}, \mathrm{F}\}$ suivante :

$$\overset{\Rightarrow}{f}\ (<\mathrm{V}, \mathrm{V}>) = \mathrm{V}$$
$$\overset{\Rightarrow}{f}\ (<\mathrm{V}, \mathrm{F}>) = \mathrm{F}$$
$$\overset{\Rightarrow}{f}\ (<\mathrm{F}, \mathrm{V}>) = \mathrm{V}$$
$$\overset{\Rightarrow}{f}\ (<\mathrm{F}, \mathrm{F}>) = \mathrm{V}$$

ce qui n'est qu'une autre formulation de la table précédente pour « si. . ., alors. . . » :

p	q	si p alors q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

On comprend maintenant pourquoi l'on peut dire que les connecteurs sont des fonctions de vérité.

4.3 Principe de vérifonctionnalité et principe d'indépendance des propositions élémentaires

Ce qui précède repose sur le principe suivant :

- **Principe de vérifonctionnalité** : la valeur de vérité d'une proposition complexe ne dépend que de la valeur de vérité des propositions élémentaires qui figurent en elle.

Ce principe commande la logique contemporaine, dite « standard ».

Ce principe n'est pas évident si l'on considère certaines propositions que l'on peut former dans le langage ordinaire. Considérons, par ex. la proposition : « Jean croit que le Soleil tourne autour de la Terre ». Cette proposition est vraie ou fausse, comme toutes les propositions que nous considérons ici, et figure en elle la proposition élémentaire « le Soleil tourne autour de la Terre » ; mais il est clair que la vérité ou la fausseté de « Jean croit que le Soleil tourne autour de la Terre » ne dépend pas de celle de « le Soleil tourne autour de la Terre ». On peut faire le même genre de remarque à propos d'une proposition comme « il est possible que Jean vienne ». Les « opérateurs » comme « x croît que… » ou « il est possible que… » ne sont donc pas vérifonctionnels. Cela ne signifie cependant pas qu'il n'y ait pas une « logique » pour ce genre d'opérateurs : les logiques « modales » (au sens large) ont été élaborées pour étudier les raisonnements dont la validité repose sur ces opérateurs. On n'envisagera pas ces « logiques » ici.

Un deuxième principe est impliqué dans l'idée que les connecteurs propositionnels sont des fonctions de vérité, à savoir :

- Principe de l'indépendance des propositions élémentaires : la valeur de vérité d'une proposition élémentaire ne dépend pas de la valeur de vérité d'une quelconque autre proposition élémentaire.

On voit en effet que l'ensemble de départ des fonctions de vérité est constitué des quatre paires ordonnées – <V,V>, <V,F>, <F,V>, <F,F> – ce qui présuppose donc que chacune des deux propositions considérées peut être vraie ou fausse, quelle que soit la valeur de vérité de l'autre proposition ; ou, si l'on veut : que la vérité (ou la fausseté) de l'une des deux propositions n'exclut pas la vérité (ou la fausseté) de l'autre.

Cela non plus n'est pas évident. Soit les deux propositions élémentaires : « le réservoir d'essence de la voiture X est vide » et « la voiture X démarre » (on suppose ici qu'il s'agit d'un véhicule équipé d'un moteur à essence…). Est-il vraisemblable que ces deux propositions soient simultanément vraies, autrement dit que l'on puisse avoir la combinaison V/V ? Si l'on admet, ce qui semble raisonnable (!), qu'un moteur à essence ne peut fonctionner qu'avec de l'essence, cette combinaison apparaît impossible : la vérité de « le réservoir d'essence de la voiture X est vide » exclut la vérité de « la voiture X démarre ». Plus généralement, si l'on admet qu'il y a des relations causales dans le monde, on doit reconnaître que la vérité (ou la fausseté) de certaines propositions élémentaires exclut (ou rend nécessaire) la vérité (ou la fausseté) de certaines autres propositions élémentaires. Ce qui va directement à l'encontre du principe de l'indépendance des propositions élémentaires.

Ce principe est cependant justifié si l'on considère qu'il n'est pas logiquement nécessaire qu'il y ait de la causalité dans le monde ; en d'autres termes, ce que l'on appelle parfois le « principe de causalité » n'est pas logiquement nécessaire : un monde dans lequel il n'y aurait aucune relation causale est logiquement possible.

4.4 Tableau des connecteurs (fonctions de vérité)

Il y a 2^2 éléments dans $\{V, F\}^2$ et deux éléments dans {V, F}, il y a donc $2^{(2^2)}$ fonctions différentes $f : \{V, F\}^2 \to \{V, F\}$, c'est à dire 16 fonctions de vérité différentes ; on peut en faire le tableau systématique de la manière suivante :

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
p	q	$\top$	$\vee$	$\Leftarrow$	p	$\Rightarrow$	q	$\Leftrightarrow$	$\wedge$	$\uparrow$	w	$\sim q$		$\sim p$		$\downarrow$	$\perp$
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	F	F	F	F	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V	F	F	F	F	V	V	V	V	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	V	V	F	F	V	V	F	F	V	V	F	F
F	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F

Ce tableau indique toutes les fonctions de vérité (connecteurs) possibles ; il est construit de manière purement *a priori*, sans égard à ce que l'on trouve dans les langages ordinaires. On remarque cependant que certaines de ces fonctions de vérité ont leur équivalent (approximatif !) dans le français usuel.

Les deux exemples pris précédemment avec « si. . ., alors. . . » et « et » correspondent aux colonnes 5 et 8 respectivement. On appelle ces deux connecteurs : implication et conjonction respectivement. Par ailleurs, on a :

- colonne 2 : « ou » inclusif, que l'on écrit parfois « et/ou », disjonction (inclusive).
- colonne 7 : « si et seulement si » des mathématiciens (condition nécessaire et suffisante), bi-implication.
- colonne 9 : connecteur dont on verra l'intérêt mais qui n'a pas d'équivalent idiomatiquement satisfaisant en français, le mieux que l'on peut trouver est quelque chose comme : p est incompatible avec q, incompatibilité.
- colonne 10 : « ou bien. . ., ou bien. . . », ou encore « soit. . ., soit. . . », les deux propositions ne peuvent être simultanément vraies, à la différence du « ou » inclusif de la colonne 2, disjonction exclusive.
- colonne 15 : « ni. . ., ni. . . », rejet.

Les autres connecteurs n'ont pas vraiment d'équivalents en français.

On verra plus loin qu'il est possible de définir tous les connecteurs avec un très petit nombre d'entre eux. Les connecteurs binaires les plus utilisés sont la disjonction (2), l'implication (5), la bi-implication (7) et la conjonction (8).

- Connecteurs unaires. Formellement, ces connecteurs sont des fonctions de {V, F} dans {V, F}. Il y a donc $2^2 = 4$ fonctions différentes que la tableau ci-dessous indique :

	1	2	3	4
p			$\sim$	
V	V	V	F	F
F	V	F	V	F

Seule la colonne 3 est intéressante : elle correspond à la négation : si p est vraie, sa négation est fausse et si p est fausse, sa négation est vraie.

Il faut noter que plusieurs connecteurs de la langue naturelle peuvent correspondre à une même fonction de vérité ; par ex. « et », « mais », « cependant », « or », correspondent tous à la conjonction (8) en ajoutant des nuances de sens qui ne sont pas logiquement pertinentes (« il travaille beaucoup, mais ne réussit guère » ajoute une nuance de regret à la conjonction, mais on voit facilement que cette proposition n'est vraie que si les deux propositions constituantes sont elles-mêmes vraies). D'un autre côté, des fonctions de vérités différentes peuvent correspondre à un même connecteur naturel ; c'est le cas de « ou » qui peut être interprété soit inclusivement, soit exclusivement.

Enfin, comme on l'a déjà indiqué, il y a des fonctions de vérité qui n'ont aucun équivalent dans la langue naturelle. Il n'y a donc pas de correspondance exacte entre ce que l'on trouve dans la langue naturelle et les fonctions de vérités, ce qui n'est pas très surprenant si l'on songe que les langues naturelles ne sont pas exclusivement destinées à permettre de formuler des raisonnements corrects. C'est pourquoi, il vaut mieux adopter un symbolisme artificiel en lequel les choses soient claires.

5 Petit langage artificiel pour la logique des propositions

On a indiqué en haut de certaines colonnes du tableau des connecteurs, des symboles que l'on utilisera pour exprimer les fonctions de vérité correspondantes :

- $\sim$ pour la *négation*
- $\vee$ pour la *disjonction*
- $\Rightarrow$ pour l'*implication*
- $\Leftrightarrow$ pour la *bi-implication*
- $\wedge$ pour la *conjonction*

On utilise les lettres : p, q, r, s, etc., éventuellement p_1, p_2, p_3,... — que l'on appelle lettres de proposition, pour symboliser des propositions élémentaires (ou atomiques). On notera P, l'ensemble, que l'on peut admettre infini dénombrable, des lettres de proposition.

On dispose de toutes les parenthèses, crochets, accolades nécessaires pour la ponctuation.

On définit maintenant (récursivement) ce que l'on entend par formule (bien formée) de notre petit langage :

- a. une lettre de proposition est une formule bien formée
- b. si φ et ψ sont des formules bien formées, alors

  -i. $(\sim\varphi)$, [non φ]
  -ii. $(\varphi \vee \psi)$, [φ ou ψ]
  -iii. $(\varphi \Rightarrow \psi)$, [si φ, alors ψ]
  -iv. $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$, [$\varphi$ si et seulement si ψ]
  -v. $(\varphi \wedge \psi)$. [φ et ψ]

  sont des formules bien formées.
- c. il n'y a pas d'autres formules bien formées que celles qui sont obtenues grâce aux deux règles a. et b. ci-dessus.

Note importante : les lettres grecques, φ (phi), ψ (psi), θ (théta), etc. sont des symboles du métalangage qui désignent des formules quelconques du langage que nous venons de spécifier. Ces lettres n'appartiennent donc pas au langage lui-même. Dans le métalangage, on utilise de manière autonyme les connecteurs, autrement dit dans $(\varphi\wedge\psi)$ par ex. « $\wedge$ » est un symbole du métalangage qui désigne le symbole de même graphisme, $\wedge$, du langage.

Pour comprendre comment fonctionne la définition de formule (bien formée) (règles a) – c) ci-dessus), considérons l'exemple suivant :

soit les lettres de propositions : p, q et r ; en vertu de la règle a., ce sont des formules bien formées. On peut donc leur appliquer l'une des règles b. et former par ex. la formule : $(p\wedge q)$ (b.v.). Puis, avec la règle b.iii. on peut former : $[p \Rightarrow (p \wedge q)]$, puis : $\sim[p \Rightarrow (p \wedge q)]$ avec b.i.. De là, on peut encore former : $\{\sim[p \Rightarrow (p \wedge q)] \vee r\}$ avec b.ii., etc.

On peut représenter cette procédure par un arbre dit « de décompostion » :

$$\{\sim[p \Rightarrow (p \wedge q)] \vee r\}$$

$$\sim[p \Rightarrow (p \wedge q)] \qquad r$$

$$[p \Rightarrow (p \wedge q)]$$

$$p \qquad (p \wedge q)$$

$$p \qquad q$$

Le dernier connecteur introduit en vertu des règles b) est dit connecteur principal ; il sert à caractériser la formule entière. Dans l'ex. ci-dessus, le connecteur principal est « $\vee$ » et donc la formule est un disjonction. On appelle sous-formule d'une formule, une formule entrant dans la composition de cette dernière formule, par ex. ici : « $\sim[p \Rightarrow (p \wedge q)]$ » est une sous-formule, et même une sous-formule immédiate, de la formule entière ; « $(p \wedge q)$ » est une sous-formule (mais pas immédiate) de la formule entière, etc.

On appelle les deux sous-formules immédiates d'une disjonction : disjoints ; d'une conjonction : conjoints ; d'une implication : antécédent pour la sous-formule de gauche, conséquent pour la sous-formule de droite.

Pour simplifier l'écriture, on supprime les parenthèses (crochets, accolades. . .) extérieures ; au lieu, par ex., d'écrire : $\{\sim[p \Rightarrow (p \wedge q)] \ \vee \ r\}$, on écrit :

$$\sim[p \Rightarrow (p \wedge q)] \ \vee \ r$$

6 Table de vérité d'une formule

Jusqu'à présent nous n'avons affaire qu'à des suites de symboles qui n'ont encore aucun « sens ». Nous avons maintenant à déterminer dans quelles circonstances une formule est vraie ou fausse Comme on l'a vu précédemment, la valeur de vérité d'une formule complexe ne dépend que de celle des formules élémentaires qui figurent en elle. On appellera « interprétation » des lettres de propositions, une fonction (au sens mathématique) i qui va de l'ensemble P des lettres de propositions de notre langage à l'ensemble à deux éléments $\{\text{V, F}\}$: $i : P \to \{\text{V, F}\}$.

Théoriquement, cela signifie qu'une interprétation attribue à *chaque* lettre de proposition de notre langage, une des deux valeurs de vérité. Toutefois, en vertu du principe d'indépendance, il suffit, en pratique, pour déterminer la valeur de vérité d'une formule complexe φ, de fixer l'interprétation des seules lettres de propositions qui figurent dans φ.

On notera $i(p)$, $i(q)$, etc. la valeur de vérité de p, q, etc. pour l'interprétation i.

Une fois fixée une interprétation on peut alors calculer la valeur de vérité d'une formule : il suffit pour cela de faire appel aux tables pour les connecteurs $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\wedge$, que l'on peut présenter commodément ainsi (voir les colonnes 2, 5, 7 et 8 du tableau général ; on ne rappelle pas la table de la négation, parfaitement évidente) ; on utilise ici les lettres grecques (méta-variables de formules) car il n'est évidemment pas nécessaire que le calcul ne porte que sur des formules élémentaires :

$\varphi \vee \psi$

$\vee$	V	F	ψ
V	V	V	
F	V	F	
φ			

$\varphi \Rightarrow \psi$

$\Rightarrow$	V	F	ψ
V	V	F	
F	V	V	
φ			

$\varphi \Leftrightarrow \psi$

$\Leftrightarrow$	V	F	ψ
V	V	F	
F	F	V	
φ			

$\varphi \wedge \psi$

$\wedge$	V	F	ψ
V	V	F	
F	F	F	
φ			

ou bien ainsi :

φ	ψ	$\varphi \vee \psi$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

φ	ψ	$\varphi \Rightarrow \psi$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

φ	ψ	$\varphi \Leftrightarrow \psi$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemple de calcul : soit la formule : $\sim[p \Rightarrow (p \wedge q)] \vee r$, et l'interprétation i des lettres de propositions : $i(p) = \text{V}$, $i(q) = \text{F}$ et $i(r) = \text{F}$, que l'on peut figurer de manière plus intuitive ainsi :

$$p \rightarrow \text{V},\ q \rightarrow \text{F},\ r \rightarrow \text{F}$$

On procède de l'intérieur vers l'extérieur, ce qui donne :
- $(p \wedge q)$ a la valeur F, puisque q a la valeur F ;
- $p \Rightarrow (p \wedge q)$ a la valeur F, puisque p a la valeur V et $(p \wedge q)$ la valeur F ;
- $\sim[p \Rightarrow (p \wedge q)]$ a la valeur V, puisque $p \Rightarrow (p \wedge q)$ a la valeur F ;
- $\{\sim[p \Rightarrow (p \wedge q)] \vee r\}$ a la valeur V, puisque $\sim[p \Rightarrow (p \wedge q)]$ a la valeur V.

On peut présenter cela plus synthétiquement de la manière suivante :

p	q	r	$p \wedge q$	$p \Rightarrow (p \wedge q)$	$\sim[p \Rightarrow (p \wedge q)]$	$\sim[p \Rightarrow (p \wedge q)] \vee r$
V	F	F	F	F	V	V

Il apparaît ainsi que la formule $\sim[p \Rightarrow (p \wedge q)] \vee r$ est vraie pour l'interprétation i des lettres de proposition indiquée ci-dessus. Bien entendu, la même formule peut être fausse pour une autre interprétation des lettres de proposition. On vérifiera que cette formule est, par ex. fausse pour l'interprétation i' : $p \rightarrow \text{F}$, $q \rightarrow \text{V}$, $r \rightarrow \text{F}$.

Important : une formule n'est jamais vraie ou fausse *simpliciter*, mais toujours pour une interprétation donnée des lettres de proposition.

Pour le dire de manière imagée, une interprétation des lettres de proposition est une façon de caractériser des mondes. Dans l'exemple ci-dessus, on imagine un type de monde qui est tel que p y est vraie, q et r fausses. On peut imaginer d'autres types de mondes, dans lesquels les choses seraient différentes relativement à ces trois formules élémentaires. Toutefois le nombre de ces types de mondes différents, autrement dit, d'interprétations différentes de ces lettres de proposition, n'est pas illimité, il est même très limité (en vertu du principe d'indépendance, nous n'avons pas à nous soucier de la vérité ou de la fausseté des formules élémentaires qui ne figurent pas dans une formule donnée) ! De manière générale, pour une formule donnée, ce nombre dépend de celui des formules élémentaires qui figurent dans la formule : s'il s'agit d'une seule formule élémentaire, il n'y a que deux types de mondes différents relativement à cette formule, les uns dans lesquels elle est vraie, les autres dans lesquels elle est fausse. Pour deux formules élémentaires figurant dans la formule, il y a quatre types de mondes différents (quatre interprétations différentes), pour trois formules élémentaires (comme dans l'exemple ci-dessus), huit types de monde, etc. En général, pour n formules élémentaires figurant dans une formule, il y a 2^n interprétations différentes des lettres de proposition relativement à cette formule.

On peut donc facilement faire le tour de toutes les interprétations différentes des lettres de proposition d'une formule donnée. Reprenons l'exemple ci-dessus. Puisque la formule $\sim[p \Rightarrow (p \wedge q)] \vee r$ comporte trois lettres de proposition, il y a $2^3 = 8$, interprétations différentes des lettres de propositions (huit types de mondes différents) ; on fait donc un tableau comportant non pas une ligne comme ci-dessus, mais huit lignes ; un tel tableau est appelé une *table de vérité* :

	p	q	r	$p \wedge q$	$p \Rightarrow (p \wedge q)$	$\sim[p \Rightarrow (p \wedge q)]$	$\sim[p \Rightarrow (p \wedge q)] \vee r$
1	V	V	V	V	V	F	V
2	V	V	F	V	V	F	F
3	V	F	V	F	F	V	V
4	V	F	F	F	F	V	V
5	F	V	V	F	V	F	V
6	F	V	F	F	V	F	F
7	F	F	V	F	V	F	V
8	F	F	F	F	V	F	F

La ligne que l'on avait calculée précédemment est donc la ligne 4 de ce tableau.

Remarque : pour être assuré de faire le tour de toutes les interprétations différentes des lettres de proposition, il convient de respecter la disposition des combinaisons de V et de F telle qu'elle figure sur les trois colonnes de gauche. Un examen rapide de cette disposition permet de comprendre comment on y parvient et de l'étendre au cas de quatre, cinq, etc. lettres de proposition.

Autre exemple : $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim p \Rightarrow \sim q)$.

Comme cette formule ne comporte que deux lettres de propositions distinctes, il n'y a que $2^2 = 4$ interprétations différentes des lettres de proposition ; la table de vérité de cette formule ne compte donc que 4 lignes.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \Rightarrow \sim q$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim p \Rightarrow \sim q)$
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	F	V	V	V
F	V	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V	V

Remarques pratiques :

– La présentation suggérée ci-dessus n'est pas la seule possible ; on pourrait par ex. adopter cette autre présentation qui se comprend d'elle-même :

$(p$	$\Rightarrow$	$q)$	$\Rightarrow$	$(\sim p$	$\Rightarrow$	$\sim q)$
V	V	V	**V**	F V	V	F V
V	F	F	**V**	F V	V	V F
F	V	V	**F**	V F	F	F V
F	V	F	**V**	V F	V	V F

On adoptera plus loin une autre variante encore.

– Si l'on ne veut calculer qu'une ligne (la 3ème ligne de la formule précédente, par ex.) on peut présenter les choses de la manière suivante :

$(p$	$\Rightarrow$	$q)$	$\Rightarrow$	$(\sim p$	$\Rightarrow$	$\sim q)$
F		V		F		V
				V		F
	V				F	
			F			

L'usage de stylographes de couleurs différentes permet de simplifier et de rendre plus claire encore la présentation.

– L'examen des tables des connecteurs permet dans certains cas d'abréger le calcul :
  – pour une disjonction ($\vee$) : si l'on a déjà trouvé que l'un des disjoints prend la valeur V, il est inutile de calculer la valeur de l'autre disjoint, puisque, quelle qu'elle soit, la disjonction prend la valeur V.
  – pour une conjonction ($\wedge$) : si l'on a déjà trouvé que l'un des conjoints prend la valeur F, il est inutile de calculer la valeur de l'autre conjoint, puisque, quelle qu'elle soit, la conjonction prend la valeur F.
  – pour une implication ($\Rightarrow$) : si l'on a déjà trouvé que l'antécédent prend la valeur F, ou que le conséquent prend la valeur V, il est inutile de calculer la valeur de l'autre membre de l'implication, puisque, quelle qu'elle soit, l'implication prend la valeur V.

7 Formules neutres, tautologies et contradictions

Les formules des exemples précédents sont vraies pour certaines interprétations, et fausses pour d'autres. Leur vérité ou leur fausseté dépend donc des interprétations des lettres de proposition (des « mondes » dans lesquels on les évalue) ; on peut dire qu'elles représentent des propositions dont la vérité est contingente : si l'on met à la place des lettres p, q et r, des propositions signifiantes quelconques, les propositions complexes obtenues seront peut être vraies, mais, le monde eut-il été autre, elles eussent pu être fausses.

On appellera les formules de ce genre, vraies pour certaines interprétations mais fausses pour d'autres : *formules neutres*.

On en arrive maintenant au point important : il y a des formules qui sont vraies pour *toutes* les interprétations des lettres de propositions qui figurent en elles. Ce sont ces formules qui intéressent le logicien, car elles représentent des lois logiques. On appelle les formules vraies pour toute interprétation (ou formules toujours vraies) des *tautologies*.

Soit la formule toute simple : $p \vee \sim p$. Sa table de vérité est :

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
V	F	V
F	V	V

Autre exemple : $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \Rightarrow \sim p$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

La première loi s'appelle « loi du tiers exclu » ; la seconde « loi de contraposition ».

Ces formules représentent des propositions qui sont vraies quelles que soient les circonstances, ou, si l'on veut, quel que soit l'état de monde, ou si l'on veut encore : des propositions nécessairement vraies. Un exemple célèbre de la première est : « il pleut ou il ne pleut pas ». Comme on s'en aperçoit immédiatement, une proposition de ce genre ne dit rien sur le monde, à la différence de « il pleut » (donc je prends mon parapluie, etc.).

De la même manière, il y a des formules qui sont fausses pour toutes les interprétations des lettres de propositions qui figurent en elles. On appelle ces formules des *contradictions*. et elles représentent des propositions nécessairement fausses, ou, si l'on veut, impossiblement vraies.

Exemple : $p \wedge \sim p$:

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
V	F	F
F	V	F

Il est facile de voir que si une formule est une tautologie, sa négation est une contradiction, et inversement : si une formule est une contradiction, sa négation est une tautologie ; par ex. :

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$	$\sim (p \wedge \sim p)$
V	F	F	V
F	V	F	V

Ainsi, toute tautologie est la négation d'une contradiction et toute contradiction est la négation d'une tautologie ; il y a donc, si l'on peut dire, « autant » de tautologies que de contradictions.

En résumé : les formules du petit langage représentent soit des propositions nécessaires, soit des propositions contingentes, soit enfin des propositions impossibles. On peut figurer cette tripartition de la manière suivante :

TAUTOLOGIES	NEUTRES	CONTRADICTIONS
NÉCESSAIRES	CONTINGENTES	IMPOSSIBLES

ou encore, à la suite de Dante :

PARADIS : TAUTOLOGIES
PURGATOIRE : NEUTRES
ENFER : CONTRADICTIONS

8 Tautologies et inférences valides

Nous avons maintenant le moyen d'établir qu'une inférence est valide, ce qui était le but premier de toutes ces considérations.

Reprenons l'exemple initial :

S'il n'y a pas d'essence dans le réservoir de la voiture, cette dernière ne démarre pas
La voiture démarre

Il y a de l'essence dans le réservoir de la voiture

En symbolisant : « il y a de l'essence dans le réservoir de la voiture », par p et « la voiture démarre », par q, on peut représenter cette inférence par :

$$\begin{array}{c} (\sim p \Rightarrow \sim q) \\ q \\ \hline p \end{array}$$

Formons l'implication suivante : $[(\sim p \Rightarrow \sim q) \wedge q] \Rightarrow p$. L'antécédent de cette implication est formé de la conjonction des deux prémisses de l'inférence, et le conséquent, de la conclusion de la même inférence. Faisons maintenant la table de vérité de cette implication :

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \Rightarrow \sim q$	$(\sim p \Rightarrow \sim q) \wedge q$	$[(\sim p \Rightarrow \sim q) \wedge q] \Rightarrow p$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	F	F	F	V
F	F	V	V	V	F	V

Cette implication est tautologique. Comment comprendre cela ? La table de l'implication montre qu'une implication n'est fausse que si l'antécédent est vrai et le conséquent faux. Si donc une implication est toujours vraie (tautologique), c'est que cette circonstance ne se présente pas, autrement dit qu'il n'est jamais le cas que l'antécédent soit vrai et le conséquent faux ; mais l'antécédent ici est la conjonction des prémisses et le conséquent, la conclusion de l'inférence. Que l'implication soit tautologique veut alors dire qu'il n'est jamais le cas que les prémisses soient simultanément vraies et la conclusion fausse ; l'inférence est donc valide en vertu de la définition d' « inférence valide ».

On peut maintenant généraliser et formuler le théorème fondamental suivant :

- Une inférence est valide si et seulement si l'implication dont l'antécédent est formé par la conjonction des prémisses de l'inférence, et le conséquent, par la conclusion de la même inférence, est tautologique.

Remarque : une implication « vraie » (pour une interprétation) ne représente pas une inférence valide, mais c'est le fait qu'elle soit, éventuellement, tautologique (toujours vraie) qui représente une inférence valide.

Pour simplifier l'écriture, plutôt que de présenter une inférence comme nous l'avons fait jusque là, on peut adopter la notation suivante :

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vDash \psi$$

ce qui se lit : ψ est inférée des prémisses $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

On peut alors formuler le théorème ci-dessus plus simplement :

$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vDash \psi$ si et seulement si $(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \Rightarrow \psi$ est une tautologie [3].

On a donc un procédé simple pour s'assurer qu'une inférence est valide : on forme l'implication correspondante (antécédent = conjonction des prémisses et conséquent = conclusion) et on vérifie, en en faisant la table, qu'elle est tautologique.

Remarque pratique :

Il n'est pas toujours nécessaire de faire la table complète d'une implication pour s'assurer qu'elle est tautologique. On se demande d'abord si l'implication peut être fausse, i.e. si le conséquent peut être faux et l'antécédent vrai pour une interprétation ; parfois, on constate rapidement que la, ou les, interprétations qui rendent faux le conséquent rendent l'antécédent également faux, ou bien qu'il y en a une qui rend l'antécédent vrai. Dans le premier cas, l'implication est tautologique, dans le second, elle ne l'est pas.

Exemple : $[(\sim p \Rightarrow \sim q) \wedge q] \Rightarrow p$. Supposons p faux ; alors, $\sim p$ est vrai et si q est vrai, $\sim q$ est faux et donc $(\sim p \Rightarrow \sim q)$ est faux ainsi que la conjonction. Si q est faux, la conjonction l'est également. Dans les deux cas (q vrai / q faux), l'antécédent est faux. L'implication ne peut donc être fausse, elle est tautologique.

Autrement dit, ici on procède à rebours dans le calcul d'une ou de plusieurs lignes d'une table de vérité : on fixe d'abord la valeur de vérité de la formule entière et on examine ce qui s'ensuit

3. On verra dans un instant pourquoi il est licite d'écrire ainsi la conjonction qui constitue l'antécédent de l'implication.

pour les sous-formules. Une telle démarche n'a pas d'intérêt s'il se révèle qu'il faut examiner un grand nombre d'interprétations différentes ; en ce cas il vaut mieux faire la table complète.

9 Théorème de substitution et théorème de remplacement

1. Théorème de substitution.

   Une tautologie, écrite dans notre petit langage, est vraie quelle que soit la valeur de vérité que prend l'une ou l'autre des propositions élémentaires qui figurent en elle. On peut donc substituer, dans une tautologie, une formule quelconque (aussi complexe que l'on veut) à une lettre de proposition, pourvu que cette substitution se fasse en chaque occurrence dans la tautologie de la lettre de proposition en question (substitution uniforme).

   Exemple : $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$. Il est facile de voir que cette formule est une tautologie : si le conséquent est faux, q est vrai et p faux et donc l'implication tout entière est vraie.

   Substituons à p la formule : $r \vee s$; on obtient alors la formule :

   $(r \vee s) \Rightarrow [q \Rightarrow (r \vee s)]$ pour laquelle le même micro raisonnement que ci-dessus vaut : si le conséquent est faux, c'est que q est vrai et $(r \vee s)$ est faux ; mais si $(r \vee s)$ est faux l'implication tout entière est vraie.

   On peut formuler ce théorème ainsi :

   - THÉORÈME DE SUBSITUTION : Soit φ une formule tautologique, p une lettre de proposition figurant dans φ et ψ une formule quelconque ; alors : la formule obtenue en substituant uniformément ψ à p dans φ, est tautologique.

   Ce théorème ne fait qu'exprimer rigoureusement, en le généralisant, ce que l'on sait depuis le début, à savoir que la validité d'une inférence (le caractère tautologique d'une implication) ne dépend pas du contenu particulier des propositions qui entrent dans ladite inférence.

   Ce théorème a une conséquence pratique immédiate : plutôt que de formuler une loi logique dans notre petit langage, on peut la formuler dans le métalangage en usant des métavariables φ, ψ, etc. Ainsi au lieu de formuler la loi de contraposition ci-dessus sous la forme :

   – $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$ est une tautologie,
     on écrira :
   – $(\varphi \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow (\sim \psi \Rightarrow \sim \varphi)$ est un schéma de tautologie, c'est à dire que toutes les formules du langage obtenues en substituant uniformément à φ et à ψ des formules quelconques du langage sont des tautologies. $(\varphi \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow (\sim \psi \Rightarrow \sim \varphi)$ représente donc une infinité de tautologies.

2. Théorème de remplacement.

   Lorsqu'une bi-implication est tautologique, on dit, dans le métalangage, que les deux membres de la bi-implication sont équivalents, ce qui revient à dire que ces deux membres prennent, pour toute interprétation des lettres de propositions la même valeur de vérité. Si donc, dans une formule quelconque (pas nécessairement tautologique), on remplace une de ses sous-formules par une formule qui lui est équivalente, la formule obtenue prendra, pour toute interprétation des lettres de proposition, la même valeur de vérité que la formule de départ et lui sera donc équivalente. C'est ce qu'énonce le théorème suivant :

- TÉORÈME DE REMPLACEMENT : soit φ une formule, ψ une sous-formule de φ et ψ' une formule équivalente à ψ, alors : la formule φ' obtenue en substituant ψ' à ψ dans φ, est équivalente à φ.

10 Principales lois logiques

Dans ce qui suit, on ne répétera plus que l'on a affaire à des schémas de tautologies. On pourra s'exercer à vérifier que tous ces schémas correspondent à des tautologies.

- A. Propriétés des connecteurs.

Un premier ensemble de lois logiques découle directement des propriétés des connecteurs $\sim$, $\wedge$ et $\vee$ telles qu'elles se lisent sur leur table.

– idempotence :

$$\begin{array}{lcl}(\varphi \wedge \varphi) & \Leftrightarrow & \varphi \\ (\varphi \vee \varphi) & \Leftrightarrow & \varphi\end{array}$$

– commutativité :

$$\begin{array}{lcl}(\varphi \wedge \psi) & \Leftrightarrow & (\psi \wedge \varphi) \\ (\varphi \vee \psi) & \Leftrightarrow & (\psi \vee \varphi)\end{array}$$

– associativité :

$$\begin{array}{lcl}[\varphi \wedge (\psi \wedge \theta)] & \Leftrightarrow & [(\varphi \wedge \psi) \wedge \theta] \\ [\varphi \vee (\psi \vee \theta)] & \Leftrightarrow & [(\varphi \vee \psi) \vee \theta]\end{array}$$

– distributivité $^{\wedge}/_{\vee}$:

$$[\varphi \wedge (\psi \vee \theta)] \quad \Leftrightarrow \quad [(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \theta]$$

– distributivité $^{\vee}/_{\wedge}$:

$$[\varphi \vee (\psi \wedge \theta)] \quad \Leftrightarrow \quad [(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta]$$

– double négation :

$$\sim(\sim\varphi) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi$$

Il résulte de l'idempotence de $\wedge$ et de $\vee$ que l'on peut simplifier une formule comme par ex. : $p \wedge p$ (ou $p \vee p$) en p.

Il résulte de la commutativité de $\wedge$ et de $\vee$ que l'ordre des conjoints ou des disjoints dans une conjonction ou une disjonction est indifférent (attention ! ce n'est pas le cas pour l'implication).

Il résulte de leur associativité que l'on peut négliger les parenthèses intérieures ; par ex. , au lieu d'écrire : $[p \wedge (q \wedge r)]$, ou $[(p \vee q) \vee r]$, on écrira simplement : $(p \wedge q \wedge r)$ ou $(p \vee q \vee r)$, respectivement [4].

B. Equivalence entre connecteurs.

$\Rightarrow$:

4. C'est ce que nous avons fait pour ci-dessus, lorsque nous avions écrit : $(\varphi_1 \wedge \ldots, \wedge\varphi_n) \Rightarrow \psi$.

$$\begin{array}{rcl} (\varphi \Rightarrow \psi) & \Leftrightarrow & \sim(\varphi \wedge \sim\psi) \\ \sim(\varphi \Rightarrow \psi) & \Leftrightarrow & (\varphi \wedge \sim\psi) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} (\varphi \Rightarrow \psi) & \Leftrightarrow & (\sim\varphi \vee \psi) \\ \sim(\varphi \Rightarrow \psi) & \Leftrightarrow & \sim(\sim\varphi \vee \psi) \end{array}$$

$\wedge$:

$$\begin{array}{rcl} (\varphi \wedge \psi) & \Leftrightarrow & \sim(\varphi \Rightarrow \sim\psi) \\ \sim(\varphi \wedge \psi) & \Leftrightarrow & (\varphi \Rightarrow \sim\psi) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} (\varphi \wedge \psi) & \stackrel{dM}{\Leftrightarrow} & \sim(\sim\varphi \vee \sim\psi) \\ \sim(\varphi \wedge \psi) & \stackrel{dM}{\Leftrightarrow} & (\sim\varphi \vee \sim\psi) \end{array}$$

$\vee$:

$$\begin{array}{rcl} (\varphi \vee \psi) & \Leftrightarrow & \sim\varphi \Rightarrow \psi \\ \sim(\varphi \vee \psi) & \Leftrightarrow & \sim(\sim\varphi \Rightarrow \psi) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} (\varphi \vee \psi) & \stackrel{dM}{\Leftrightarrow} & \sim(\sim\varphi \wedge \sim\psi) \\ \sim(\varphi \vee \psi) & \stackrel{dM}{\Leftrightarrow} & (\sim\varphi \wedge \sim\psi) \end{array}$$

Les deux paires de lois dont le signe de bi-implication est surmonté de « dM » ($\stackrel{dM}{\Leftrightarrow}$) sont dites : « lois de de Morgan » (du nom d'un mathématicien et logicien anglais du XIXè siècle). Elles permettent d' « entrer » les négations en tête des sous-formules, en changeant les connecteurs ; elles sont d'un usage constant.

Plus généralement, toutes ces lois permettent d'éliminer des connecteurs au profit d'autres : chacun des trois connecteurs peut être éliminé au profit d'un des deux autres et de la négation. On pourrait donc n'introduire dans notre langage que la conjonction et la négation par exemple, sans aucune perte de pouvoir expressif.

C. Autres lois logiques.

(1)	$\varphi \Rightarrow \varphi$ / (1') $\varphi \vee \sim\varphi$ / (1") $\sim(\varphi \wedge \sim\varphi)$	Identité, Tiers Exclu, Non-contradiction
(2)	$(\sim\varphi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi$ / (2') $(\varphi \Rightarrow \sim\varphi) \Rightarrow \sim\varphi$	*Consequentia mirabilis*
(3)	$\varphi \Rightarrow (\varphi \vee \psi)$ / (3') $\psi \Rightarrow (\varphi \vee \psi)$	
(4)	$(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \varphi$ / (4') $(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \psi$	
(5)	$\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$ / (5') $\sim\varphi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi)$	Simplification (*ex falso...*)
(6)	$(\varphi \wedge \sim\varphi) \Rightarrow \psi$	Duns Scot
(7)	$[(\psi \Rightarrow \varphi) \wedge (\sim\psi \Rightarrow \varphi)] \Rightarrow \varphi$	
(8)	$[(\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\varphi \Rightarrow \sim\psi) \Rightarrow \sim\varphi$	
(9)	$(\varphi \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow (\sim\psi \Rightarrow \sim\varphi)$	Contraposition
(10)	$\varphi \Rightarrow [\psi \Rightarrow (\varphi \wedge \psi)]$	Adjonction
(11)	$[\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \theta)] \Leftrightarrow [\psi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \theta)$	Permutation
(12)	$[(\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \theta)] \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \theta)$	Syllogisme (transitivité de l'implication)
(13)	$[\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \theta)] \Leftrightarrow [(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \theta]$	Importation / exportation
(14)	$[(\varphi \Rightarrow (\psi \wedge \theta)] \Leftrightarrow [(\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\varphi \Rightarrow \theta)]$	
(15)	$(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \{(\varphi \Rightarrow \theta) \Rightarrow [\varphi \Rightarrow (\psi \wedge \theta)]\}$	Composition
(16)	$[(\varphi \wedge \psi) \vee \psi] \Leftrightarrow \psi$ / (16') $[\varphi \wedge (\varphi \vee \psi)] \Leftrightarrow \varphi$	Lois d'absorption
(17)	$[(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \theta)] \Rightarrow [(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \theta)]$	Loi de Frege
(18)	$(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \{(\theta \Rightarrow \sigma) \Rightarrow [(\varphi \wedge \theta) \Rightarrow (\psi \wedge \sigma)]\}$	
(20)	$[(\varphi \Rightarrow \psi) \wedge \varphi] \Rightarrow \psi$	*Modus Ponens*
(21)	$[(\varphi \Rightarrow \psi) \wedge \sim\psi] \Rightarrow \sim\varphi$	*Modus Tollens*
(22)	$[(\varphi \vee \psi) \wedge \sim\psi] \Rightarrow \varphi$	Principe du chien (Chrysippe)

Remarque [5] à propos des lois 5 et 5' : ses lois expriment ce que l'on appelle les paradoxes de l'implication « matérielle », à savoir qu'une implication est vraie si son conséquent est vrai, quel que soit son antécédent, et inversement, qu'une implication est vraie si son antécédent est faux, quel que soit son conséquent Si l'on suppose qu'une implication vraie « code » une inférence valide entre antécédent et conséquent, cela semble étrange, puisque l'on s'attend à ce que, dans une inférence valide, les prémisses et la conclusion aient un certain « lien ».

On sait cependant qu'il y a une erreur dans la formulation précédente ; ce n'est pas la vérité d'une implication qui correspond à un inférence valide, mais le fait que l'implication soit tautologique. On montre alors facilement que si une implication est tautologique, il y a bien un « lien » entre antécédent et conséquent, à savoir qu'il y a au moins une lettre de proposition commune à l'antécédent et au conséquent de l'implication.

5. À propos de la dernière loi (22) et de son nom : Chrysippe (277 - 204 avant J.C.) est présenté, par Diogène Laerce, comme le second fondateur du Stoicisme (le premier étant Zénon de Cittium) ; il s'est particulièrement illustré dans le domaine de la « dialectique », i.e. de la logique. On lui attribue la liste des « cinq arguments indémontrables » qui sont exposés ainsi par Sextus Empiricus : « Ils [les Stoiciens] forgent beaucoup d'argumentations indémontrables et ils en exposent surtout cinq auxquelles toutes les autres semblent se rapporter : la première, qui de la majeure et de l'antécédent amène le conséquent, par exemple : "si c'est le jour, il fait clair, or c'est le jour, donc il fait clair" ; la seconde, de la majeure et de l'opposé du conséquent, amène l'opposé de l'antécédent, par exemple : "si c'est le jour, il fait clair, or il ne fait pas clair, donc ce n'est pas le jour" ; la troisième, d'une proposition copulative négative et de l'un de ses termes amène l'opposé du reste, par exemple : "ce n'est pas à la fois le jour et la nuit, or c'est le jour, donc ce n'est pas la nuit" ; la quatrième, d'une proposition disjonctive et de l'un de ses termes amène l'opposé du reste, par exemple : "ou il est jour, ou il est nuit, or c'est le jour, donc ce n'est pas la nuit" ; la cinquième, d'une proposition disjonctive et de l'opposé de l'une de ses parties, amène le reste, par exemple : "ou c'est le jour ou c'est la nuit, or ce n'est pas la nuit, donc c'est le jour". » (*Hypotyposes*, II, 13). La dernière manière d'argumenter peut être appelée « principe du chien » car Chrysippe, qui n'avait pas la réputation d'aimer les animaux, admettait cependant que même un chien utilise ce mode d'argumentation, selon ce que rapporte toujours Sextus dans le texte suivant : « [Chrysippe] déclare que le chien a recours au cinquième des arguments indémontrables quand, parvenu à un carrefour, après avoir exploré deux chemins par où la bête n'est pas passée, sans avoir exploré le troisième, il s'y lance à la hâte. Cet ancien philosophe dit que cela revient à raisonner ainsi : la bête a passé par ce chemin-ci, ou par celui-là ou par cet autre ; or elle n'est pas passé par ce chemin-ci, ni par celui-là ; donc elle est passé par cet autre. » (*Hypotyposes*, I, 14). On pourra s'amuser à formaliser dans le petit langage pour le calcul des propositions ces cinq « arguments » et à identifier, pour certains, de quelle « loi logique » figurant sur la liste ci-dessus, il s'agit.

On démontre cela par contraposition : soit $\varphi \Rightarrow \psi$ une implication dont les deux membres sont neutres. Supposons qu'aucune lettre de proposition ne figure simultanément dans φ et dans ψ. On montre alors que $\varphi \Rightarrow \psi$ ne peut être tautologique. En effet :

Puisque φ est neutre, il y a au moins une interprétation i des lettres de proposition pour laquelle φ est vraie.

Puisque ψ est neutre, il y a au moins une interprétation i' des lettres de proposition pour laquelle ψ est fausse.

Soit l'interprétation i'' définie par :
- $i''(p) = i(p)$, si la lettre de proposition p figure dans φ,
- $i''(p) = i'(p)$, si la lettre de proposition p figure dans ψ,
- $i''(p) =$ V ou F indifféremment, si la lettre de proposition p ne figure ni dans φ ni dans ψ[6].

Cette interprétation i'' existe certainement : on est assuré qu'elle ne donnera pas à une même lettre de proposition simultanément la valeur V et la valeur F, puisqu'aucune lettre de proposition ne figure simultanément dans φ et dans ψ.

Pour cette interprétation i'', l'implication $\varphi \Rightarrow \psi$ est fausse puisque i'' donne la valeur V à φ et la valeur F à ψ. $\varphi \Rightarrow \psi$ n'est donc pas une tautologie.

On peut illustrer cette petite démonstration en considérant une implication comme :

$$[r\wedge \sim(p \Rightarrow q)] \Rightarrow [t \vee (u \Rightarrow s)]$$

Aucune lettre de proposition ne figure simultanément dans l'antécédent et dans le conséquent ; de plus, l'antécédent et le conséquent sont neutres. En effet, pour l'interprétation $i(p) =$ V, $i(q) =$ F et $i(r) =$V l'antécédent est vrai, alors que pour toutes les autres interprétations, il est faux. De la même manière, pour l'interprétation $i'(s) =$F, $i'(t) =$F et $i'(u) =$V le conséquent est faux, alors que pour toutes les autres interprétations, il est vrai.

On vient donc de remarquer que pour l'interprétation i, $r \wedge \sim(p \Rightarrow q)$ est vrai et que pour l'interprétation i', $t \vee (u \Rightarrow s)$ est faux. Comme il n'y a pas de lettre de proposition commune à ces deux formules, on peut donc « combiner » les deux interprétations i et i' et définir un interprétation i'' par :

$$\begin{array}{lll} i''(p) = i(p) = \text{V} & i''(q) = i(q) = \text{F} & i''(r) = i(r) = \text{V} \\ i''(s) = i'(s) = \text{F} & i''(t) = i'(t) = \text{F} & i''(u) = i'(u) = \text{V} \end{array}$$

Pour les autres lettres de proposition, les choses sont indifférentes (principe d'indépendance).

Il est clair que pour cette interprétation i'', l'implication est fausse puisqu'elle donne à l'antécédent la valeur V (comme i) et au conséquent la valeur F (comme i').

On a donc montré que si l'antécédent et le conséquent d'une implication sont neutres et n'ont en commun aucune lettre de proposition, alors cette implication n'est pas tautologique.

6. Cette dernière clause n'est nécessaire que parce que la définition d'une interprétation doit fixer quelle valeur de vérité elle attribue à *chaque* lettre de proposition de notre langage, et pas seulement à celles qui figurent dans une formule donnée. Mais, en vertu du principe d'indépendance, seule importe l'interprétation des lettres de proposition figurant dans une formule donnée.

On en tire donc par contraposition : si une implication, dont l'antécédent et le conséquent sont neutres, est tautologique, alors au moins une même lettre de proposition figure dans son antécédent et dans son conséquent (attention : la réciproque n'est évidemment pas vraie ! ! autrement dit : que l'antécédent et le conséquent, neutres, d'une implication aient en commun au moins une lettre de proposition, n'implique nullement que cette implication soit tautologique).

11 Formes normales

- Remarque préliminaire :
Si l'on note $\top$ une tautologie, $\bot$ une contradiction et φ une formule quelconque ; on a les équivalences suivantes qui découlent de ce qui précède :

a) $(\top \wedge \varphi) \Leftrightarrow \varphi$	b) $(\top \vee \varphi) \Leftrightarrow \top$	c) $(\bot \wedge \varphi) \Leftrightarrow \bot$	d) $(\bot \vee \varphi) \Leftrightarrow \varphi$
e) $(\varphi \Rightarrow \top) \Leftrightarrow \top$	f) $(\bot \Rightarrow \varphi) \Leftrightarrow \top$	c') $(\top \wedge \bot) \Leftrightarrow \bot$	d') $(\top \vee \bot) \Leftrightarrow \top$

Ces équivalences, ainsi que celles qui précèdent, permettent de transformer des formules en des formules équivalentes plus simples : si, par ex. figure dans une formule, une sous-formule de la forme $(\bot \Rightarrow \varphi)$, on peut la remplacer par $\top$, tout comme, si figure une sous-formule de la forme $(\varphi \vee \bot)$, on peut la remplacer par φ, etc.

Une formule peut se mettre soit en « forme normale conjonctive », soit en « forme normale disjonctive » et, en vertu du théorème de remplacement, est équivalente à l'une ou l'autre de ses formes normales.

Une forme normale conjonctive, - acronyme : FNC - est une conjonction de disjonctions et les membres de ces disjonctions sont soit des lettres de proposition soit des lettres de proposition précédées du signe de la négation. Une forme normale conjonctive a donc l'allure suivante :

$$(p \vee \sim q \vee \ldots \vee \ldots) \wedge (\sim p \vee \sim q \vee r \ldots \vee \ldots) \wedge \ldots$$

Une forme normale disjonctive, - acronyme : FND - est une disjonction de conjonctions et les membres de ces conjonctions sont soit des lettres de proposition soit des lettres de proposition précédées du signe de la négation. Une forme normale disjonctive a donc l'allure suivante :

$$(p \wedge \sim q \wedge \ldots \wedge s \wedge \ldots) \vee (p \wedge q \wedge \sim r \ldots \wedge \ldots) \vee \ldots$$

Remarque : - on admet qu'une lettre de proposition seule, ou une lettre de proposition précédée du signe de la négation, est un conjoint légitime d'une FNC et un disjoint tout aussi légitime d'une FND. De la même manière, on admet qu'une FNC ou une FND peut n'avoir qu'un seul membre qui est donc, respectivement, une disjonction ou une conjonction.

La mise en forme normale est une nouvelle procédure pour déterminer si une formule est une tautologie ou une contradiction.

- FNC : si dans chaque conjoint apparaissent une lettre de proposition et cette même lettre précédée du signe de la négation (du genre p / $\sim p$), alors chacun de ces conjoints est tautologique (puisqu'il est de la forme $(\top \vee \varphi)$) et la conjonction de ces tautologies est elle-même tautologique. Une formule dont la FNC est tautologique est elle-même tautologique.

Si, dans un conjoint, n'apparaissent pas à la fois une lettre de proposition et cette même lettre précédée du signe de la négation, on peut trouver une interprétation des lettres de proposition pour laquelle ce conjoint prend la valeur faux : il suffit d'interpréter par F les lettres de proposition qui figurent dans ce conjoint et par V celles qui figurent dans ce conjoint précédées du signe de la négation. Pour cette interprétation, la FNC prend la valeur F ainsi que la formule dont elle provient, qui n'est donc pas tautologique.

-FND : si dans chaque disjoint apparaissent une lettre de proposition et cette même lettre précédée du signe de la négation (du genre $p\ /\!\sim p$), alors chacun de ces disjoints est contradictoire (puisqu'il est de la forme $(\bot \wedge \varphi)$) et la disjonction de ces contradictions est elle-même contradictoire. Une formule dont la FND est contradictoire est elle-même contradictoire.

Si, dans un disjoint, n'apparaissent pas à la fois une lettre de proposition et cette même lettre précédée du signe de la négation, on peut trouver une interprétation des lettres de proposition pour laquelle ce disjoint prend la valeur vrai : il suffit d'interpréter par V les lettres de proposition qui figurent dans ce disjoint et par F celles qui figurent dans ce disjoint précédées du signe de la négation. Pour cette interprétation, la FND prend la valeur V ainsi que la formule dont elle provient, qui n'est donc pas contradictoire.

11.1 Procédure pour mettre une formule en forme normale

1. Éliminer toutes les implications et négations d'implication en utilisant les équivalences :

$$(\varphi \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow (\sim\varphi \vee \psi)$$
$$\sim(\varphi \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow (\varphi \wedge \sim\psi)$$

2. Entrer les négations en utilisant les lois de de Morgan et supprimer les doubles négations :

$$\sim(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow (\sim\varphi \wedge \sim\psi)$$
$$\sim(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow (\sim\varphi \vee \sim\psi)$$
$$\sim\sim\varphi \Leftrightarrow \varphi$$

Remarque : 1 et 2 peuvent ne pas se faire dans cet ordre en fonction de considérations tactiques (pour aller plus vite, par ex.)

3. Distribuer $^\wedge/_\vee$ et $^\vee/_\wedge$ en faisant sortir les conjonctions et entrer les disjonctions (FNC) ou en faisant sortir les disjonctions et entrer les conjonctions (FND).

Remarque : les lois de distributivité se généralisent. Par exemple. :

$$[(\varphi \wedge \psi) \vee (\theta \wedge \sigma)] \Leftrightarrow [(\varphi \vee \theta) \wedge (\varphi \vee \sigma) \wedge (\psi \vee \theta) \wedge (\psi \vee \sigma)]$$
$$[(\varphi \wedge \psi \wedge \theta) \vee \sigma] \Leftrightarrow [(\varphi \vee \sigma) \wedge (\psi \vee \sigma) \wedge (\theta \vee \sigma)]$$

etc.
Le nombre des sous-formules peut être supérieur à ce qu'il est dans ces exemples

11.1.1 Exemples de mise en FNC

- A. Soit la formule : $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim p \Rightarrow \sim q)$

– Élimination de l'implication principale :
$$\sim (p \Rightarrow q) \vee (\sim p \Rightarrow \sim q)$$
– Élimination des deux implications :
$$(p \wedge \sim q) \vee (p \vee \sim q)$$
– Distribution :
$$(p \vee p \vee \sim q) \wedge (\sim q \vee p \vee \sim q)$$
– Simplification :
$$(p \vee \sim q) \wedge (p \vee \sim q)$$
puis encore :
$$(p \vee \sim q)$$

Pour l'interprétation : $p \rightarrow$ F et $q \rightarrow$ V, ce conjoint est faux :
$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim p \Rightarrow \sim q)$ n'est donc pas une tautologie.

Table pour cette formule :

p	q	$(p \Rightarrow q)$	$\Rightarrow$	$(\sim p$	$\Rightarrow$	$\sim q)$
V	V	V	**V**	F	V	F
V	F	F	**V**	F	V	V
F	V	V	**F**	V	F	F
F	F	V	**V**	V	V	V

- B. Soit la formule : $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$

– Élimination de l'implication principale :
$$\sim (p \Rightarrow q) \vee (\sim q \Rightarrow \sim p)$$
– Élimination de l'implication $(\sim / \vee)$ et de la négation d'implication $(\sim / \wedge)$:
$$(p \wedge \sim q) \vee (q \vee \sim p)$$
– Distribution :
$$(\underline{p} \vee q \vee \underline{\sim p}) \wedge (\underline{\sim q} \vee \underline{q} \vee \sim p)$$

Les deux conjoints comportent une lettre de proposition et sa négation (soulignés) ; ils sont donc tautologiques ainsi que leur conjonction, ce que l'on peut noter :
– Simplification :
$$\top \wedge \top, \text{ c'est à dire : } \top.$$

$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$ est donc une tautologie (principe de contraposition).

- C. Soit la formule : $[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Rightarrow [(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)]$

– Élimination de l'implication principale $(\sim/\vee)$:
$$\sim[(p \wedge q) \Rightarrow r] \vee [(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)]$$
– Élimination de la négation d'implication et des deux implications de droite :
$$[(p \wedge q) \wedge \sim r] \vee [(\sim p \vee r) \wedge (\sim q \vee r)]$$
– Distribution (généralisée) :
$$[(p \wedge q) \vee (\sim p \vee r)] \wedge [(p \wedge q) \vee (\sim q \vee r)] \wedge (\sim r \vee \sim p \vee r) \wedge (\sim r \vee \sim q \vee r)$$
– Distribution dans les deux premiers conjoints :
$$(\underline{p} \vee \underline{\sim p} \vee r) \wedge (q \vee \sim p \vee r) \wedge (p \vee \sim q \vee r) \wedge (\underline{q} \vee \underline{\sim q} \vee r) \wedge$$
$$(\underline{\sim r} \vee \sim p \vee \underline{r}) \wedge (\underline{\sim r} \vee \sim q \vee \underline{r})$$
– Simplification :
$$\top \wedge (q \vee \sim p \vee r) \wedge (p \vee \sim q \vee r) \wedge \top \wedge \top \wedge \top$$
c'est à dire :
$$(q \vee \sim p \vee r) \wedge (p \vee \sim q \vee r)$$

Pour l'interprétation : $p \rightarrow$ V et $q \rightarrow$ F et $r \rightarrow$ F, le premier conjoint est faux, donc la conjonction est fausse ainsi que $[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Rightarrow [(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)]$.

Pour l'interprétation : $p \rightarrow$ F et $q \rightarrow$ V et $r \rightarrow$ F, le deuxième conjoint est faux, donc la conjonction est fausse ainsi que $[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Rightarrow [(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)]$.

11.1.2 Exemples de mise en FND

- D. Soit la formule : $(p \Rightarrow q) \wedge (\sim q \wedge p)$

– Élimination de l'implication à gauche :
$$(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \wedge p)$$
– Distribution :
$$(\underline{\sim p} \wedge \sim q \wedge \underline{p}) \vee (\underline{q} \wedge \underline{\sim q} \wedge p)$$
– Simplification :
$$\bot \vee \bot, \text{ c'est à dire } \bot.$$

$(p \Rightarrow q) \wedge (\sim q \wedge p)$ est donc contradictoire (négation du principe de contraposition).

- E. Soit la formule : $(p \Rightarrow q) \wedge (\sim p \wedge q)$

– Élimination de l'implication à gauche :
$$(\sim p \vee q) \wedge (\sim p \wedge q)$$
– Distribution :
$$(\sim p \wedge \sim p \wedge q) \vee (q \wedge \sim p \wedge q)$$

– Simplification :

$$(\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge q)$$

c'est dire :

$$\sim p \wedge q$$

Pour l'interprétation : $p \rightarrow$ F et $q \rightarrow$ V, $(p \Rightarrow q) \wedge (\sim p \wedge q)$ est vraie.

Table pour cette formule :

p	q	$(p \Rightarrow q)$	$\wedge$	$(\sim p$	$\wedge\, q)$
V	V	V	F	F	F
V	F	F	F	F	F
F	V	V	V	V	V
F	F	V	F	V	F

- F. Soit la formule : $[(p \wedge q) \Rightarrow r] \wedge [p \wedge \sim(q \Rightarrow r)]$

– Élimination des deux implications :

$$[\sim(p \wedge q) \vee r] \wedge (p \wedge q \wedge \sim r)$$

– Entrée de la négation dans le conjoint de gauche :

$$(\sim p \vee \sim q \vee r) \wedge (p \wedge q \wedge \sim r)$$

– Distribution généralisée :

$$(\underline{\sim p \wedge p} \wedge q \wedge \sim r) \vee (\underline{\sim q} \wedge p \wedge \underline{q} \wedge \sim r) \vee (\underline{r} \wedge p \wedge q \ \wedge \underline{\sim r})$$

– Simplification :

$$\bot \vee \bot \vee \bot$$

c'est à dire :

$$\bot.$$

$[(p \wedge q) \Rightarrow r] \wedge [p \wedge \sim(q \Rightarrow r)]$ est donc contradictoire.

Ainsi, la FNC d'une formule permet de déterminer pour quelles interprétations des lettres de proposition cette formule est fausse et sa FND, pour quelles interprétations des lettres de proposition elle est vraie. Si l'on prend en compte les deux formes normales d'une formule, on fait donc le tour de toutes les interprétations possibles de cette formule et on détermine pour chacune de ces interprétations si la formule est vraie ou fausse.

Exemple :
- G. Soit la formule : $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [p \Rightarrow (q \wedge r)]$

1. Mise en FNC :
   – Élimination de l'implication principale :
   $$\sim(p \Rightarrow q) \vee [p \Rightarrow (q \wedge r)]$$
   – Élimination de la négation d'implication et de l'implication :
   $$(p \wedge \sim q) \vee [\sim p \vee (q \wedge r)]$$

- Distribution à droite :
$$(p \wedge \sim q) \vee [(\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee r)]$$
- Distribution (généralisée) :
$$(\underline{p \vee \sim p} \vee q) \wedge (\underline{p \vee \sim p} \vee r) \wedge (\underline{\sim q} \ \vee \sim p \vee \underline{q}) \wedge (\sim q \vee \sim p \vee r)$$
- Simplification :
$$\top \wedge \top \wedge \top \wedge (\sim q \vee \sim p \vee r),$$
c'est à dire :
$$\sim q \vee \sim p \vee r$$

$(p \Rightarrow q) \Rightarrow [p \Rightarrow (q \wedge r)]$ est fausse pour l'interprétation :
$p \rightarrow$ V, $q \rightarrow$ V et $r \rightarrow$ F.

On doit donc s'attendre à ce que la FND de cette même formule permette de mettre en évidence que cette formule est vraie pour les sept autres interprétations possibles.

2. Mise en FND :
- Élimination de l'implication principale :
$$\sim (p \Rightarrow q) \vee [p \Rightarrow (q \wedge r)]$$
- Élimination de la négation d'implication et de l'implication :
$$(p \wedge \sim q) \vee [\sim p \vee (q \wedge r)]$$
À noter : ces deux premières opérations sont identiques aux deux premières opérations de la mise en FNC.
- Distribution à droite :
$$(p \wedge \sim q) \vee [(\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee r)]$$
- Distribution généralisée :
$$(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim p) \vee (\sim p \wedge r) \vee (q \wedge \sim p) \vee (q \wedge r)$$
- Simplification :
$$(p \wedge \sim q) \vee \sim p \vee (\sim p \wedge r) \vee (q \wedge \sim p) \vee (q \wedge r)$$

On remarque (deuxième disjoint) qu'il suffit que $\sim p$ soit vrai, i.e. que p soit faux, pour que la formule soit vraie ; on peut donc négliger les disjoints trois et quatre. D'autre part (premier disjoint), il suffit que p et $\sim q$ soient vrais pour que la formule soit vraie, que r soit vrai ou faux, tout comme (cinquième disjoint) il suffit que q et r soient vrais pour que la formule soit vraie, que p soit vrai ou faux. D'où :

$(p \rightarrow q) \rightarrow [p \Rightarrow (q \wedge r)]$ est vraie pour les interprétations :

$$\begin{array}{lll}
p \rightarrow \text{V}, & q \rightarrow \text{V}, & r \rightarrow \text{V} \\
p \rightarrow \text{V}, & q \rightarrow \text{F}, & r \rightarrow \text{V} \\
p \rightarrow \text{V}, & q \rightarrow \text{F}, & r \rightarrow \text{F} \\
p \rightarrow \text{F}, & q \rightarrow \text{V}, & r \rightarrow \text{V} \\
p \rightarrow \text{F}, & q \rightarrow \text{V}, & r \rightarrow \text{F} \\
p \rightarrow \text{F}, & q \rightarrow \text{F}, & r \rightarrow \text{V} \\
p \rightarrow \text{F}, & q \rightarrow \text{F}, & r \rightarrow \text{F}
\end{array}$$

Remarque : la FND ci-dessus peut sembler comme « incomplète » puisqu'elle ne comporte pas sept disjoints dans lesquels figureraient les trois lettres de proposition de la formule (précédées ou non du signe de la négation). On peut, si l'on veut, développer une telle FND pour obtenir une FND « complètement développée » en exploitant l'équivalence :

$$\varphi \Leftrightarrow [(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \sim\psi)]$$

On peut donc développer un membre « incomplet » de la FND en lui substituant deux nouveaux membres conformément à l'équivalence ci-dessus. Cela donne pour la FND de l'exemple précédent :

-1er disjoint : $(p \wedge \sim q) \rightarrow \quad (p \wedge \sim q \wedge r) \vee (p \wedge \sim q \wedge \sim r)$

-2ème disjoint : $\sim p \rightarrow \quad (\sim p \ \wedge q \ \wedge r) \vee (\sim p \ \wedge q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge r) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r)$
(résultat d'une double application de l'équivalence ci-dessus)

-3ème disjoint : $(\sim p \wedge r) \rightarrow \quad \underline{(\sim p \wedge r \wedge q)} \vee \underline{(\sim p \wedge r \wedge \sim q)}$

-4ème disjoint : $(q \wedge \sim p) \rightarrow \quad \underline{(q \wedge \sim p \wedge r)} \vee \underline{(q \wedge \sim p \wedge \sim r)}$

-5ème disjoint : $(q \wedge r) \rightarrow \quad (q \wedge r \wedge p) \vee \underline{(q \wedge r \wedge \sim p)}$

On voit dans cet exemple qu'il y a beaucoup de redondances (les sous-formules soulignées apparaissent précédemment) ; on peut donc simplifier, ce qui donne :

$(p \wedge \sim q \wedge r) \vee (p \wedge \sim q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge q \wedge r) \vee (\sim p \wedge q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge r) \vee$
$(\sim p \wedge \ q \wedge \ r) \vee (q \wedge r \wedge p)$

On vérifie aisément que ces sept disjoints correspondent aux sept interprétations trouvées ci-dessus.
De la même manière, pour développer complètement une FNC qui serait « incomplète », on peut exploiter l'équivalence, « sœur » de la précédente :

$$\varphi \Leftrightarrow [(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \sim\psi)]$$

12 Système axiomatique pour la logique des propositions

À fin d'illustration de ce qu'est un système axiomatique, on présente ci-dessous un tel système pour la logique des propositions ; c'est du reste ainsi que les « pères fondateurs » (Frege et Russell) de la logique contemporaine procédaient, ce qui donne une saveur historique à cette présentation.

12.1 Langage du système

Le système est écrit dans un langage identique à celui qui a été présenté ci-dessus sauf qu'il ne comporte, comme connecteurs, que la disjonction et la négation ; on admet les définitions suivantes (φ et ψ étant des formules quelconques) :

- Df. 1 : $\varphi \Rightarrow \psi =_{df} \sim\varphi \vee \psi$
- Df. 2 : $\varphi \wedge \psi =_{df} \sim(\sim\varphi \vee \sim\psi)$
- Df. 3 : $\varphi \Leftrightarrow \psi =_{df} (\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi)$

On peut donc remplacer, dans une formule quelconque, toute sous formule de la forme $\sim\varphi \vee \psi$, par la formule $\varphi \Rightarrow \psi$ (et inversement) ; même chose pour la conjonction et la bi-implication.

12.2 Axiomes

- Ax 1. $(p \vee p) \Rightarrow p$
- Ax 2. $p \Rightarrow (p \vee q)$
- Ax 3. $(p \vee q) \Rightarrow (q \vee p)$
- Ax 4. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(r \vee p) \Rightarrow (r \vee q)]$

12.3 Règles d'inférence

- R1. Règle de substitution : ψ est dit inféré de φ si ψ est obtenu à partir de φ par substitution d'une formule quelconque à une lettre de proposition figurant dans φ en toutes ses occurrences.

- R2. *Modus Ponens* : ψ est dit inféré de φ et de $\varphi \Rightarrow \psi$.

Définition : Une *déduction* pour φ est une suite finie de formules $\psi_1, \ldots, \psi_n$ telle que $\varphi = \psi_n$ et que chaque formule ψ_m $(1 \leq m \leq n)$ est soit un axiome, soit est inférée, en vertu de la règle de substitution, d'une formule précédente dans la suite, soit est inférée, en vertu de la règle du *Modus Ponens*, de deux formules précédentes dans la suite.

S'il y a une déduction pour la formule φ, on dit que φ est une thèse (ou un théorème), ce que l'on note $\vdash \varphi$.

Remarque :

- a. en vertu de la définition de *déduction*, un axiome est une thèse (la déduction ne comporte alors qu'une seul élément, l'axiome lui-même).
- b. pour simplifier on peut introduire dans une déduction une thèse précédemment déduite en omettant la déduction de cette dernière.

12.3.1 Exemples de déduction

1. Déduction du principe du syllogisme[7] (que l'on note : Syll), sous la forme :

$$\vdash (p \Rightarrow q) \Rightarrow [(r \Rightarrow p) \Rightarrow (r \Rightarrow q)]$$

$\vdash (p \Rightarrow q) \Rightarrow [(r \vee p) \Rightarrow (r \vee q)]$	(1)	Ax.4.
$\vdash (p \Rightarrow q) \Rightarrow [(\sim r \vee p) \Rightarrow (\sim r \vee q)]$	(2)	$Sub\ {}^{\sim r}/_{r}$ dans (1)
$\vdash (p \Rightarrow q) \Rightarrow [(r \Rightarrow p) \Rightarrow (r \Rightarrow q)]$	(3)	Df. 1 : remplacement dans (2) $\rightarrow$ (3) $=$ Syll

2. Déduction de $p \Rightarrow p$ et de $p \vee \sim p$.

   On peut prolonger cette déduction pour obtenir $\vdash p \Rightarrow p$ (principe d'identité pour la logique des propositions ; $\rightarrow$ Id.) puis $p \vee \sim p$ (principe du tiers exclu $\rightarrow$ TE).

7. À droite des formules, on indique d'où elles proviennent : « *M.P.* sur (n), (m) » signifie que la formule a été obtenue par application du *Modus Ponens* aux deux formules numérotées (n) et (m) ; « $Sub\ {}^{\varphi}/_{p}$ dans (n) » signifie que la formule a été obtenue par application de la règle de substitution à la formule numérotée (n), en substituant la formule φ à la lettre de proposition p figurant dans la formule numérotée (n) (par ex.).

$\vdash p \Rightarrow (p \vee q)$	(4)	Ax.2
$\vdash p \Rightarrow (p \vee p)$	(5)	$Sub\ {}^{p}/_{q}$ dans (4)
$\vdash (p \vee p) \Rightarrow p$	(6)	Ax.1
$\vdash [(p \vee p) \Rightarrow p] \Rightarrow \{[p \Rightarrow (p \vee p)] \Rightarrow (p \Rightarrow p)\}$	(7)	$Sub\ {}^{p}/_{r},\ {}^{p\vee p}/_{p},\ {}^{p}/_{q}$ dans (3) = Syll.
$\vdash [p \Rightarrow (p \vee p)] \Rightarrow (p \Rightarrow p)$	(8)	$M.P.$ sur (6), (7)
$\vdash p \Rightarrow p$	(9)	$M.P.$ sur (5), (8), $\rightarrow$ (9) = Id.
$\vdash \sim p \vee p$	(10)	Df. 1 sur (9)
$\vdash (p \vee q) \Rightarrow (q \vee p)$	(11)	Ax. 3
$\vdash (\sim p \vee p) \Rightarrow (p \vee \sim p)$	(12)	$Sub\ {}^{\sim p}/_{p},\ {}^{p}/_{q}$ dans (11)
$\vdash (p \vee \sim p)$	(13)	$M.P.$ sur (10), (12), $\rightarrow$ (13) = TE.

3. Déduction de $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$.
   On peut encore prolonger cette déduction pour avoir $\vdash p \Rightarrow \sim\sim p$ (15), puis $\vdash (p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$ ((23), la loi de contraposition $\rightarrow$ Contra).

$\vdash \sim p \vee \sim\sim p$	(14)	$Sub\ {}^{\sim p}/_{p}$ dans (13)
$\vdash p \Rightarrow \sim\sim p$	(15)	Df. 1 sur (14)
$\vdash q \Rightarrow \sim\sim q$	(16)	$Sub\ {}^{q}/_{p}$ dans (15)
$\vdash (q \Rightarrow \sim\sim q) \Rightarrow \{(\sim p \vee q) \Rightarrow (\sim p \vee \sim\sim q)\}$	(17)	$Sub\ {}^{q}/_{p},\ {}^{\sim\sim q}/_{q},\ {}^{\sim p}/_{r}$, dans (1) = Ax.4.
$\vdash (\sim p \vee q) \Rightarrow (\sim p \vee \sim\sim q)$	(18)	M.P. sur (16), (17)
$\vdash (\sim p \vee \sim\sim q) \Rightarrow (\sim\sim q \vee \sim p)$	(19)	$Sub\ {}^{\sim p}/_{p},\ {}^{\sim\sim q}/_{q}$, dans (11) = Ax. 3
$\vdash [(\overbrace{\sim p \vee \sim\sim q}^{p}) \Rightarrow (\overbrace{\sim\sim q \vee \sim p}^{q})] \Rightarrow \{[(\overbrace{\sim p \vee q}^{r}) \Rightarrow (\overbrace{\sim p \vee \sim\sim q}^{p})] \Rightarrow [(\overbrace{\sim p \vee q}^{r}) \Rightarrow (\overbrace{\sim\sim q \vee \sim p}^{q})]\}$	(20)	$Sub\ {}^{\sim p\vee q}/_{r},\ {}^{\sim p\vee\sim\sim q}/_{p},\ {}^{\sim\sim q\vee\sim p}/_{q}$ dans (3) = (Syll.)
$\vdash [(\sim p \vee q) \Rightarrow (\sim p \vee \sim\sim q)] \Rightarrow [(\sim p \vee q) \Rightarrow (\sim\sim q \vee \sim p)]$	(21)	M.P. sur (19), (20)
$\vdash (\sim p \vee q) \Rightarrow (\sim\sim q \vee \sim p)$	(22)	M.P. sur (18), (21)
$\vdash (p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$	(23)	Df. 1 sur (22), 2 fois.

4. Déduction de $\sim\sim p \Rightarrow p$
   À partir de (15) ci dessus ($\vdash p \Rightarrow \sim\sim p$), on peut obtenir $\vdash \sim\sim p \Rightarrow p$ de la manière suivante :

$\vdash \sim p \Rightarrow \sim\sim\sim p$	(16')	$Sub\ {}^{\sim p}/_{p}$ dans (15)
$\vdash (\sim p \Rightarrow \sim\sim\sim p) \Rightarrow [(p \vee \sim p) \Rightarrow (p \vee \sim\sim\sim p)]$	(17')	$Sub\ {}^{\sim p}/_{p},\ {}^{\sim\sim\sim p}/_{q},\ {}^{p}/_{r}$ dans (1)
$\vdash (p \vee \sim p) \Rightarrow (p \vee \sim\sim\sim p)$	(18')	$M.P.$ sur (16'), (17')
$\vdash p \vee \sim\sim\sim p$	(19')	$M.P.$ sur (13), (18')
$\vdash (p \vee \sim\sim\sim p) \Rightarrow (\sim\sim\sim p \vee p)$	(20')	$Sub\ {}^{\sim\sim\sim p}/_{q}$ dans (11)
$\vdash \sim\sim\sim p \vee p$	(21')	$MP.$ sur (19'), (20')
$\vdash \sim\sim p \Rightarrow p$	(22')	Df 1 sur (21')

12.4 Thèses et règles d'inférence dérivées.

Soit la thèse Syll. ci-dessus. En vertu de R1, on peut substituer uniformément à p, q ou r n'importe quelle formule, si complexe soit-elle ; il en résulte que toute formule de la forme $(\theta \Rightarrow \psi) \Rightarrow [(\varphi \Rightarrow \theta) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi)]$ est une thèse du système.

Supposons maintenant que l'on ait : $\vdash \theta \Rightarrow \psi$. En vertu de R2 (modus ponens), on obtient : $\vdash [(\varphi \Rightarrow \theta) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi)]$.

Supposons que l'on ait également : $\vdash \varphi \Rightarrow \theta$. Là encore en vertu de R2, on obtient : $\vdash \varphi \Rightarrow \psi$.

Comme cela vaut pour n'importe quelle formule de la forme $(\theta \Rightarrow \psi) \Rightarrow [(\varphi \Rightarrow \theta) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi)]$, on peut en tirer une *règle d'inférence dérivée* qui s'énonce :

R_d1 : $\varphi \Rightarrow \psi$ est dit inféré de $\theta \Rightarrow \psi$ et de $\varphi \Rightarrow \theta$.

Ainsi au lieu d'une déduction de la forme [8] :

$\vdash \theta \Rightarrow \psi$	(j)	
$\vdots$		
$\vdash \varphi \Rightarrow \theta$	(k)	
$\vdots$		
$\vdash (p \Rightarrow q) \Rightarrow [(r \Rightarrow p) \Rightarrow (r \Rightarrow q)$	Syll	
$\vdots$		
$\vdash (\theta \Rightarrow \psi) \Rightarrow [(\varphi \Rightarrow \theta) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi)]$	(m)	*Sub* ${}^{\varphi}/_{r}$, ${}^{\theta}/_{p}$, ${}^{\psi}/_{q}$ dans Syll.
$\vdots$		
$\vdash (\varphi \Rightarrow \theta) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi)$	(n)	*M.P.* sur (j), (m)
$\vdots$		
$\vdash \varphi \Rightarrow \psi$		*M.P.* sur (k), (n)

on aura un déduction plus courte de la forme :

$\vdash \theta \Rightarrow \psi$	(k)	
$\vdots$		
$\vdash \varphi \Rightarrow \theta$	(m)	
$\vdots$		
$\vdash \varphi \Rightarrow \psi$		R_d1 sur (k), (m)

Dans la déduction ci-dessus, cela aurait permis de faire l'économie des thèses (7) et (8) ainsi que des thèses (20) et (21).

Remarque : en vertu de fait que la conjonction, dans le métalangage, est tout aussi commutative que dans notre petit langage, on aurait pu formuler cette règle dérivée de la manière suivante : R_d1 : $\varphi \Rightarrow \psi$ est dit inféré de $\varphi \Rightarrow \theta$ et de $\theta \Rightarrow \psi$; autrement dit, l'ordre dans lequel on a déduit les deux

8. Les trois petits points verticaux (« $\vdots$ ») entre chaque ligne indiquent qu'il peut y avoir d'autres thèses intercalées entre les thèses mentionnées.

antécédents $\varphi \Rightarrow \theta$ et $\theta \Rightarrow \psi$ n'a aucune importance. La seule chose qui importe est qu'ils aient été déduits antérieurement. En ce sens, cette règle dérivée correspond à deux formes de Syll : celle que l'on a déduit au tout début, i.e. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(r \Rightarrow p) \Rightarrow (r \Rightarrow q)]$, ou celle, peut-être plus intuitive que l'on peut également déduire en s'aidant d'une autre loi (à savoir Perm, cf. plus bas, p. 37) : $(r \Rightarrow p) \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (r \Rightarrow q)]$.

Le même type de raisonnement vaut pour toute thèse de la forme $\varphi \Rightarrow \psi$; autrement dit, dès lors qu'une thèse est une implication, on peut en tirer une règle dérivée.

On admettra dans ce qui suit, en particulier, la règle suivante :

R_d2 : $\varphi \wedge \psi$ est dit inféré de φ et de ψ,

que l'on peut dériver de la thèse (supposée démontrée) :

$$\vdash p \Rightarrow [q \Rightarrow (p \wedge q)]$$

En vertu de cette dernière règle R_d2, on voit que si l'on a deux thèses de la forme $\vdash \varphi \Rightarrow \psi$ et $\vdash \psi \Rightarrow \varphi$, alors on peut en déduire : $\vdash (\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi)$, i.e. : $\vdash \varphi \Leftrightarrow \psi$ (par Df. 3). D'où une nouvelle règle :

R'_d2 : $\varphi \Leftrightarrow \psi$ est dit inféré de $\vdash \varphi \Rightarrow \psi$ et de $\vdash \psi \Rightarrow \varphi$.

Ainsi, par ex., après (22') ci-dessus on obtient par R'_d2 sur (15) et (22') :

$\vdash p \Leftrightarrow \sim\sim p$ (23').

De la même manière, on obtient $\vdash (p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$ de la manière suivante :

$\vdash (p \vee q) \Rightarrow (q \vee p)$	(24')	Ax. 3
$\vdash (q \vee p) \Rightarrow (p \vee q)$	(25')	$Sub\ {}^{p}/_{q},\ {}^{q}/_{p}$ dans (24')
$\vdash (p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$	(26')	R'_d2 sur (24'), (25') = Commut $\vee$

Comme on peut démontrer dans notre système (mais on ne le fera pas ici !) les lois d'associativité (Assoc $\wedge$ et $\vee$), commutativité (Commut $\wedge$, on a déjà Commut $\vee$), idempotence de $\wedge$ et de $\vee$, les deux distributivités ($\vee/\wedge, \wedge/\vee$) (Distrib) et les lois de de Morgan (de Morgan), on a donc les règles dérivées correspondantes. On laissera au lecteur le soin de formuler ces règles lorsqu'on les invoquera dans le cours d'une déduction future.

12.4.1 Règle de remplacement.

Cette règle est d'une grande utilité comme on le verra dans un exemple de déduction ; elle s'énonce :

R_P : soit Φ une formule, φ une de ses sous-formules et ψ une formule quelconque ; si l'on a : $\vdash \varphi \Rightarrow \psi$ et $\vdash \psi \Rightarrow \varphi$, alors la formule Φ' obtenue en remplaçant φ par ψ dans Φ est telle que l'on a : $\vdash \Phi \Rightarrow \Phi'$ et $\vdash \Phi' \Rightarrow \Phi$ (ce qui avec la règle R_d2 revient à : si $\vdash \varphi \Leftrightarrow \psi$ alors $\vdash \Phi \Leftrightarrow \Phi'$).

Preuve : il suffit de montrer que cela vaut pour les formules Φ les plus simples dont φ est une sous formule à savoir : $\sim\varphi$, $\varphi \vee \Gamma$, $\Gamma \vee \varphi$, Γ étant une formule quelconque différente de φ. Le résultat s'étendra naturellement à des formules plus complexes.

Supposons donc : $\vdash \varphi \Rightarrow \psi$ et $\vdash \psi \Rightarrow \varphi$.

1. À montrer : $\vdash\sim\varphi \Rightarrow \sim\psi$ et $\vdash\sim\psi \Rightarrow \sim\varphi$.

$\vdash \psi \Rightarrow \varphi$	(1')	par hypothèse
$\vdash (\psi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow (\sim\varphi \Rightarrow \sim\psi)$	(2')	$Sub^{\varphi}/_{p},\ {}^{\psi}/_{q}$ dans 24 (contraposition)
$\vdash\sim\varphi \Rightarrow \sim\psi$	(3')	$M.P.$ sur (1'), (2')

Même genre de chose pour obtenir : $\vdash\sim\psi \Rightarrow \sim\varphi$.

2. À montrer : $\vdash (\Gamma \vee \varphi) \Rightarrow (\Gamma \vee \psi)$; en effet :

$\vdash (\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow [(\Gamma \vee \varphi) \Rightarrow (\Gamma \vee \psi)]$	(1")	$Sub\ {}^{\varphi}/_{p},\ {}^{\psi}/_{q},\ {}^{\Gamma}/_{r}$, dans Ax. 4
$\vdash \varphi \Rightarrow \psi$	(2")	par hypothèse
$\vdash (\Gamma \vee \varphi) \Rightarrow (\Gamma \vee \psi)$	(3")	$M.P.$ sur (1"), (2")

Même genre de chose pour obtenir : $\vdash (\Gamma \vee \psi) \Rightarrow (\Gamma \vee \varphi)$ (4").

3. À montrer : $\vdash (\varphi \vee \Gamma) \Rightarrow (\psi \vee \Gamma)$.

$\vdash (\varphi \vee \Gamma) \Rightarrow (\Gamma \vee \varphi)$	(1"')	$Sub\ {}^{\varphi}/_{p},\ {}^{\Gamma}/_{q}$ dans Ax. 3
$\vdash (\Gamma \vee \varphi) \Rightarrow (\Gamma \vee \psi)$	(2"')	(3") ci-dessus
$\vdash (\varphi \vee \Gamma) \Rightarrow (\Gamma \vee \psi)$	(3"')	par R_d1 sur (1"') et (2"')
$\vdash (\Gamma \vee \psi) \Rightarrow (\psi \vee \Gamma)$	(4"')	$Sub\ {}^{\Gamma}/_{p},\ {}^{\psi}/_{q}$ dans Ax. 3
$\vdash (\varphi \vee \Gamma) \Rightarrow (\psi \vee \Gamma)$		par R_d1 sur (3"') et (4"')

Même genre de chose pour obtenir : $\vdash (\psi \vee \Gamma) \Rightarrow (\varphi \vee \Gamma)$.

Maintenant, il suit de ce qui précède que si la formule Φ est une thèse, alors Φ' l'est également et réciproquement ; ce que l'on peut formuler ainsi (en se souvenant de R'_d2) :

R'_P : si $\vdash \varphi \Leftrightarrow \psi$ alors $\vdash \Phi$ ssi $\vdash \Phi'$.

Remarque : une règle dérivée comme R_d1 ou R_d2, par ex. permet de déduire directement d'une ou de plusieurs thèses une nouvelle thèse, sans avoir besoin d'en passer par une application du $M.P.$ mais elle ne permet pas de passer d'une thèse à une autre en remplaçant dans la première une sous-formule φ par une autre équivalente ψ (i.e. pour lesquelles on a démontré $\vdash \varphi \Leftrightarrow \psi$). Par contre, dans les mêmes circonstances la règle de remplacement permet de remplacer φ par ψ dans une formule dont φ est une sous-formule, sans autre forme de procès. D'où le très grand confort qu'apporte cette règle, comme on le verra dans l'exemple ci-dessous de la déduction de la formule correspondant à Perm.

12.5 Consistance sémantique du système.

Définition : un système axiomatique pour la logique des propositions est *sémantiquement consistant* ssi toutes les thèses sont des tautologies.

Pour démontrer que notre système est consistant, il suffit de montrer que les axiomes sont des tautologies et que les règles d'inférence ne permettent de déduire, à partir de tautologies, que des tautologies.

1. On s'assure facilement que les quatre axiomes sont des tautologies en en faisant les tables de vérité.

2. Règle de substitution : le théorème de substitution garantit que l'on obtient toujours une tautologie en substituant uniformément dans une tautologie, théorème que l'on peut prouver ainsi :
   Soit une tautologie $\top$ dans laquelle figure la lettre de proposition q, soit une formule φ et $\top'$ la formule obtenue à partir de $\top$ en substituant φ à q en toutes ses occurrences (substitution uniforme).

   Supposons $\top'$ non tautologique. Il existe donc au moins une interprétation i des lettres de proposition qui rend $\top'$ fausse. Supposons encore que pour cette interprétation φ soit fausse (ou vraie, peu importe : le raisonnement serait le même). On peut alors définir une interprétation i' telle que pour toute lettre de proposition p différente de q, $i'(p) = i(p)$, et pour q, $i'(q) = \text{F}$. Mais pour cette interprétation $\top$ est fausse et n'est donc pas une tautologie, contrairement à l'hypothèse. Donc $\top'$ est une tautologie.

3. *Modus Ponens* : Soit φ et $\varphi \Rightarrow \psi$ tautologiques. Supposons que ψ ne soit pas une tautologie ; il existe donc au moins une interprétation des lettres de proposition pour laquelle ψ prend la valeur F. Pour cette même interprétation, φ prend la valeur V puisque, par hypothèse (φ tautologique), φ prend la valeur V pour toute interprétation ; et donc pour cette même interprétation l'implication $\varphi \Rightarrow \psi$ prend la valeur F. $\varphi \Rightarrow \psi$ n'est donc pas tautologique, ce qui contredit l'hypothèse. ψ est donc tautologique.

On vient donc de démontrer que l'ensemble des thèses est inclus dans l'ensemble des tautologies, ce qui n'est pas très surprenant. Il est plus remarquable que la réciproque soit également vraie, autrement dit que le système soit sémantiquement complet.

12.6 Complétude sémantique du système.

Définition : un système axiomatique pour la logique des propositions est sémantiquement complet ssi toutes les tautologies sont des thèses du système.

Pour démonter la complétude (sémantique) du système, on va exploiter ce que l'on sait des Formes Normales Conjonctives. On a vu que moyennant la Df1 (élimination de $\Rightarrow$), les lois de distributivité, les lois d'associativité, les lois de de Morgan et la loi de double négation, on peut mettre une formule quelconque en FNC et cette FNC lui est équivalente. De plus, une formule est une tautologie si et seulement sa FNC est telle que dans chacun des conjoints figurent une lettre de proposition et la même lettre précédée du signe de la négation.

Puisque l'on suppose que toutes les lois que l'on vient de mentionner sont des thèses du système, il est donc toujours possible de démontrer pour une formule Φ et une de ses FNC φ la thèse : $\vdash \Phi \Leftrightarrow \varphi$.

Supposons maintenant que dans chacun des conjoints de φ figurent une lettre de proposition et la même lettre précédée du signe de la négation ; alors chacun de ces conjoints — qui sont des disjonctions de la forme $(p \vee \sim p) \vee \psi$ (ψ représentant le reste de la disjonction) — est démontrable dans le système. En effet, on a dans chaque cas une déduction de la forme :

$\vdash p \vee \sim p$	(1a)	thèse (10) ci-dessus
$\vdash p \Rightarrow (p \vee q)$	(2a)	Ax 2
$\vdash (p \vee \sim p) \Rightarrow [(p \vee \sim p) \vee \psi]$	(3a)	$Sub\ {}^{p\vee\sim p}/_{p},\ {}^{\psi}/_{q}$ dans (2a)
$\vdash [(p \vee \sim p) \vee \psi]$	(4a)	$M.P.$ sur (1a), (3a).

Il suffit alors d'appliquer la règle R_d2, pour obtenir la conjonction de toutes les disjonctions ainsi démontrées.

Ainsi, si une formule Φ est une tautologie, sa FNC φ est démontrable dans le système et comme $\varphi \Leftrightarrow \Phi$ est également démontrable, Φ est démontrable, CQFD.

L'argumentation qui précède à une portée pratique immédiate : si l'on veut trouver une déduction pour une formule autre que celles qui expriment la loi du syllogisme, la loi de contraposition et les lois nécessaires à la mise en FNC d'une formule, il suffit de mettre cette formule en FNC selon la procédure indiquée plus haut, d'utiliser le petit schéma de déduction ci-dessus pour déduire chacun des conjoints, la règle R_d2 pour obtenir leur conjonction et enfin les lois nécessaires à la mise en forme normale (de Morgan, distributivité, double négation) pour déduire la formule en question. Voilà, par ex. une déduction pour la loi de permutation (Perm) qui permet de déduire la deuxième forme de Syll évoquée plus haut, de la première (cf. p. 34).

On rappelle d'abord les étapes de la mise en FNC de la formule pour Perm : $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (q \Rightarrow (p \Rightarrow r))$.

– Élimination de l'implication principale :
$$\sim(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \vee (q \Rightarrow (p \Rightarrow r))$$
– Élimination de la négation d'implication à gauche et de l'implication à droite :
$$(p \wedge \sim(q \Rightarrow r)) \vee (\sim q \vee (p \Rightarrow r))$$
– Élimination de la négation d'implication à gauche et de l'implication à droite :
$$(p \wedge (q \wedge \sim r)) \vee (\sim q \vee (\sim p \vee r))$$
– Suppression des parenthèses :
$$(p \ \wedge q \wedge \sim r) \vee (\sim q \vee \sim p \vee r)$$
– Distribution généralisée :
$$(p \vee \sim q \vee \sim p \vee r) \wedge (q \vee \sim q \vee \sim p \vee r) \wedge (\sim r \vee \sim q \vee \sim p \vee r)$$

On constate sans trop de surprise que cette FNC est tautologique puisqu'elle se réduit à : $\top \wedge \top \wedge \top$, c'est-à-dire à : $\top$!!

On commence par déduire les trois conjoints de cette FNC.

$\vdash p \vee \sim p$	(1)	thèse (13) ci-dessus
$\vdash p \Rightarrow (p \vee q)$	(2)	Ax 2
$\vdash (p \vee \sim p) \Rightarrow [(p \vee \sim p) \vee (\sim q \vee r)]$	(3)	$Sub\ {}^{p \vee \sim p}/_{p},\ {}^{\sim q \vee r}/_{q}$ dans (2)
$\vdash (p \vee \sim p) \vee (\sim q \vee r)$	(4)	$M.P.$ sur (1) (3)
$\vdash (p \vee \sim q \vee \sim p \vee r)$	(5)	R'_p Assoc $\vee$ + R'_p Commut $\vee$ sur (4)
$\vdash q \vee \sim q$	(6)	$Sub\ {}^{q}/_{p}$ dans (1)
$\vdash (q \vee \sim q) \Rightarrow [(q \vee \sim q) \vee (\sim p \vee r)]$	(7)	$Sub\ {}^{q \vee \sim q}/_{p},\ {}^{\sim p \vee r}/_{q}$ dans (2)
$\vdash (q \vee \sim q) \vee (\sim p \vee r)$	(8)	$M.P.$ sur (6) (7)
$\vdash (q \vee \sim q \vee \sim p \vee r)$	(9)	R'_p Assoc $\vee$ + R'_p Commut $\vee$ sur (8)
$\vdash \sim r \vee r$	(10)	$Sub\ {}^{\sim r}/_{p}$ dans (1) + R'_p Double neg
$\vdash (\sim r \vee r) \Rightarrow [(\sim r \ \vee r) \vee (\sim q \vee \sim p)]$	(11)	$Sub\ {}^{\sim r \vee r}/_{p},\ {}^{\sim q \vee \sim p}/_{q}$ dans (2)
$\vdash (\sim r \vee r) \vee (\sim q \vee \sim p)$	(12)	$M.P.$ sur (10) (11)
$\vdash (\sim r \vee \sim q \vee \sim p \vee r)$	(13)	R'_p Assoc $\vee$ + R'_p Commut $\vee$ sur (12)

On peut maintenant déduire la FNC de Perm :

$\vdash (p \vee \sim q \vee \sim p \vee r) \wedge (q \vee \sim q \vee \sim p \vee r)$ $\wedge\ (\sim r \vee \sim q \vee \sim p \vee r)$	(14)	R_d2 deux fois sur (5), (9) et (13) + R'_p Assoc $\wedge$

On admet dans ce qui suit la loi de distributivité généralisée sous la forme :

$\vdash [(p \vee s \vee t \vee u) \wedge (q \vee s \vee t \vee u)$ $\wedge (r \vee s \vee t \vee u)]$ $\Rightarrow [(p \wedge q \wedge r) \vee (s \vee t \vee u)]$	(15)	Distributivité généralisée
$\vdash [(p \vee \sim q \vee \sim p \vee r) \wedge (q \vee \sim q \vee \sim p \vee r)$ $\wedge (\sim r \vee \sim q \vee \sim p \vee r)]$ $\Rightarrow [(p \wedge q \wedge \sim r) \vee (\sim q \vee \sim p \vee r)]$	(16)	$Sub\ {}^{\sim r}/_{r},\ {}^{\sim q}/_{s},\ {}^{\sim p}/_{t},\ {}^{r}/_{u}$ dans (15)
$\vdash [p \ \wedge (q \wedge \sim r)] \vee [\sim q \ \vee (\sim p \vee r)]$	(17)	$M.P.$ sur (14), (16) + R'_p avec Assoc $\wedge$ et $\vee$
$\vdash [p \wedge \sim (q \Rightarrow r)] \vee [\sim q \ \vee (p \Rightarrow r)]$	(18)	Df $\Rightarrow$ deux fois sur (17)
$\vdash \sim [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \vee [q \ \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$	(19)	Df $\Rightarrow$ deux fois sur (18)
$\vdash [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [q \ \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$	(20)	Df $\Rightarrow$ sur (19) = Perm

13 « Complétude » du système des connecteurs binaires

Un système de connecteur est dit « complet » s'il permet d'exprimer toutes les fonctions de vérités. Jusqu'alors nous n'avons à notre disposition que des connecteurs unaires ou binaires. Mais, formellement, rien n'interdit de considérer des connecteurs ternaires, quaternaires, etc… On va voir qu'il est inutile d'introduire de tels connecteurs.

13.1 Inutilité de l'introduction de connecteurs « ternaires » (et plus...)

Tout comme on a fait plus haut le tableau systématique de tous les connecteurs binaires (rappelons qu'il y en a 16), on pourrait tenter de faire le tableau systématique de tous les connecteurs ternaires. Cela prendrait l'allure suivante :

p	q	r	?	?	?	?	?	?	?	?	...	?	?	?	?	...	?	?	?
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	...	V	F	F	F	...	F	F	F
V	V	F	V	V	V	V	V	V	V	V	...	F	V	V	V	...	F	F	F
V	F	V	V	V	V	V	V	V	V	V	...	F	V	V	V	...	F	F	F
V	F	F	V	V	V	V	V	V	V	V	...	F	V	V	V	...	F	F	F
F	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	...	F	V	V	V	...	F	F	F
F	V	F	V	V	V	V	F	F	F	F	...	F	V	V	V	...	F	F	F
F	F	V	V	V	F	F	V	V	F	F	...	F	V	V	F	...	V	F	F
F	F	F	V	F	V	F	V	F	V	F	...	F	V	F	V	...	F	V	F

Un connecteur ternaire est une fonction de $\{\text{V, F}\}^3$, qui compte 2^3 $(= 8)$ éléments, vers $\{\text{V, F}\}$ qui en compte 2. Il y a donc $2^{(2^3)}$ $(= 2^8 = 256)$ connecteurs ternaires différents. C'est pourquoi on ne peut écrire facilement la table des connecteurs ternaires ! Notons que l'on ne trouve pas dans le langage naturel des expressions qui pourraient être naturellement considérées comme étant de tels connecteurs.

La question est donc : est-il nécessaire d'introduire, à côté des connecteurs binaires, des connecteurs ternaires ? Ce qui revient à se demander si des connecteurs ternaires pourraient être indéfinissables en termes de connecteurs binaires et unaires. On montre facilement que la réponse est négative et qu'il est donc tout à fait inutile d'introduire de tels connecteurs.

Soit, par ex., le connecteur ternaire $\dagger(p, q, r)$ dont la table est :

	p	q	r	$\dagger(p, q, r)$
1	V	V	V	F
2	V	V	F	V
3	V	F	V	F
4	V	F	F	V
5	F	V	V	V
6	F	V	F	F
7	F	F	V	F
8	F	F	F	F

On voit que $\dagger(p, q, r)$ est vrai pour les combinaisons de valeurs de vérité de p, q, et r, portées sur les lignes 2, 4 et 5, ce qui trouve son expression dans la forme normale disjonctive suivante :

$(p \wedge q \wedge \sim r) \vee (p \wedge \sim q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge q \wedge r)$.

Il est facile de voir que cette formule, est équivalente à $\dagger(p, q, r)$:

	p	q	r	$\dagger(p, qr)$	$[(p \wedge q \wedge\ \sim r)$	$\vee$	$(p \wedge \sim q \sim r)]$	$\vee$	$(\sim p \wedge q \wedge r)$
1	V	V	V	F	F	F	F	F	F
2	V	V	F	V	V	V	F	V	F
3	V	F	V	F	F	F	F	F	F
4	V	F	F	V	F	V	V	V	F
5	F	V	V	V	F	F	F	V	V
6	F	V	F	F	F	F	F	F	F
7	F	F	V	F	F	F	F	F	F
8	F	F	F	F	F	F	F	F	F

On voit sans difficulté que cette même procédure vaut pour n'importe quel connecteur ternaire : en conséquence, pour tout connecteur ternaire, on peut trouver une forme normale disjonctive ne comportant que des connecteurs unaires et binaires, forme normale qui lui est équivalente et qui permet de l'éliminer.

On voit également que la même procédure vaudrait pour des connecteurs reliant non seulement trois propositions, mais un nombre quelconque de propositions.

Il est donc inutile d'introduire de tels connecteurs, ouf!!!

13.2 Réduction du nombre des connecteurs nécessaires

On sait déjà qu'il suffit de deux connecteurs, négation et conjonction, négation et disjonction, ou négation et implication pour définir toutes les fonctions de vérité (connecteurs) à deux arguments ($f : \{V,\ F\}^2 \rightarrow \{V,\ F\}$). On vient de voir que les fonctions de vérité à plus de deux arguments peuvent être définies en n'utilisant que des fonctions de vérité à un et deux arguments. Peut-on encore réduire ce nombre et se contenter de n'user que d'un seul connecteur ? La réponse est : *oui*.

Considérons les connecteurs dit « barre de Sheffer » 'et' (incompatibilité : (« $\uparrow$ ») et « barre de Sheffer » 'ou' (rejet : « $\downarrow$ ») dont les tables sont :

p	q	$p \uparrow q$	$p \downarrow q$
V	V	F	F
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	V	V

On peut définir les quatre connecteurs habituels, et donc tous les autres, en n'usant que de l'un ou l'autre de ces connecteurs.

La négation est définie par : $\sim p =_{df} p \uparrow p$; ou par : $p \downarrow p$.

p	$p \uparrow p$	$p \downarrow p$	$\sim p$
V	F	F	F
F	V	V	V

La conjonction est définie par :
$p \wedge q =_{df} (p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q)$, ou par :

$p \wedge q =_{df} (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$:

p	q	$(p \uparrow q)$	$\uparrow$	$(p \uparrow q)$	$(p \downarrow p)$	$\downarrow$	$(q \downarrow q)$	$p \wedge q$
V	V	F	V	F	F	V	F	V
V	F	V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	V	F	F	F
F	F	V	F	V	V	F	V	F

La disjonction est définie par :
$p \vee q =_{df} (p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)$, ou par :

$p \vee q =_{df} (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$:

p	q	$(p \uparrow p)$	$\uparrow$	$(q \uparrow q)$	$(p \downarrow q)$	$\downarrow$	$(p \downarrow q)$	$p \vee q$
V	V	F	V	F	F	V	F	V
V	F	F	V	V	F	V	F	V
F	V	V	V	F	F	V	F	V
F	F	V	F	V	V	F	V	F

L'implication est définie par :
$p \Rightarrow q =_{df} p \uparrow (q \uparrow q)$, ou par :

$p \Rightarrow q =_{df} [(p \downarrow p) \downarrow q] \downarrow [(p \downarrow p) \downarrow q]$.

p	q	p	$\uparrow$	$(q \uparrow q)$	$[(p \downarrow p)$	$\downarrow$	$q]$	$\downarrow$	$[(p \downarrow p)$	$\downarrow$	$q]$	$p \Rightarrow q$
V	V	V	V	F	F	F		V	F	F		V
V	F	V	F	V	F	V		F	F	V		F
F	V	F	V	F	V	F		V	V	F		V
F	F	F	V	V	V	F		V	V	F		V

Il est clair que n'utiliser qu'une des barres de Sheffer, est fort peu commode. Cependant il est théoriquement possible de ne faire usage que de l'un ou l'autre de ces connecteurs. Cela revient à dire que chacun de ces connecteurs constitue à lui tout seul un système complet de connecteur, au sens où une barre de Sheffer suffit à définir tous les autres connecteurs (toutes les autres fonctions de vérité).

14 Eléments sur la trivalence.

Aristote soulevait le problème suivant (*De Int.* chap. 9) : « une bataille navale aura lieu demain ou une bataille navale n'aura pas lieu demain » est (aujourd'hui) « nécessairement » vraie, en vertu du principe du *Tiers Exclu.* Cela semble signifier que, dés aujourd'hui, l'une des deux propositions est vraie et l'autre est fausse, même si nous ne savons laquelle est vraie et laquelle est fausse. Cela n'entraîne-t-il pas, alors, que le fait qu'une bataille navale aura lieu, ou pas, demain, est déjà fixé aujourd'hui en vertu de la définition de la vérité d'une proposition comme conformité à ce qui est ? Si tel est le cas, alors, en particulier, il semble que l'on doive nier la liberté humaine (de se faire la guerre ou pas ...) et qu'il ne reste plus qu'à se laisser porter par le Destin ; ce qui est l'argument « paresseux » classique (cf. Ciceron, *De fato*, XIII) [9].

Pour sauver la liberté, ne faut-il pas alors admettre que les propositions « une bataille navale aura lieu demain » et « une bataille navale n'aura pas lieu demain », ne sont, aujourd'hui, ni vraies ni fausses, et qu'elles prennent une troisième valeur « indéterminée ». Ce qui revient alors, comme on va le voir, à admettre que le *Tiers Exclu* ne vaut plus et qu'il n'y a pas à tenir pour « nécessairement » vraie la proposition : « une bataille navale aura lieu demain ou une bataille navale n'aura pas lieu demain ». On présente sommairement ci-dessous le système de logique trivalent de Łukasiewicz

14.1 Système de Łukasiewicz

On admet donc, en plus des deux valeurs de vérité, le Vrai (V) et le Faux (F), une troisième valeur, l'Indéterminé (I). On redéfinit alors les connecteurs classiques de la manière suivante.

– Table de la négation :

9. Ce chapître du *de Int.* a suscité d'innombrables commentaires que l'on ne peut évoquer ici. Voilà comment Aristote pense pouvoir échapper au fatalisme : « Chaque chose, nécessairement, est ou n'est pas, sera ou ne sera pas, et cependant si on envisage séparément ces alternatives, on ne peut pas dire laquelle des deux est nécessaire. Je prends un exemple. Nécessairement il y aura demain une bataille navale ou il n'y en aura pas ; mais il n'est pas nécessaire qu'il y ait demain une bataille navale, pas plus qu'il n'est nécessaire qu'il n'y en ait pas. Mais qu'il y ait ou qu'il qu'il n'y ait pas demain une bataille navale, voilà qui est nécessaire. (...) Il faut alors nécessairement que l'une des deux propositions contradictoires soit vraie et l'autre fausse, mais ce n'est pas forcément celle-ci plutôt que celle-là : en fait, c'est n'importe laquelle, et, bien que l'une soit plus vraisemblable que l'autre, elle n'est pas pour le moment vraie ou fausse. » Cette dernière affirmation d'Aristote peut laisser penser qu'il admet que s'agissant des propositions exprimant des événements « futurs (mais) contingents », il faut admettre qu'elles n'ont pas de valeur de vérité déterminée (même s'il semble également admettre que la disjonction de leur affirmation et de leur négation est, elle, nécessairement vraie, ce qui peut paraître incompatible). C'est ainsi que Łukasiewicz le comprenait et ce pourquoi il élabora une logique « trivalente » en abandonnant le principe du *Tiers Exclu.*

p	$\sim p$
V	F
I	I
F	V

– Table des connecteurs habituels :

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$	$p \wedge q$	$p \vee q$
V	V	V	V	V	V
V	I	I	I	I	V
V	F	F	F	F	V
I	V	V	I	I	V
I	I	V	V	I	I
I	F	I	I	F	I
F	V	V	F	F	V
F	I	V	I	F	I
F	F	V	V	F	F

Comme en bivalent, on dit qu'une formule est tautologique (exprime une loi logique) si et seulement si elle prend la valeur V pour toutes les interprétations des lettres de propositions ; une formule qui prend la valeur I pour une interprétation n'est donc pas une tautologie.

Exemple d'évaluation d'une formule (même principe qu'en bivalent) :

Soit la formule (loi de contraposition) : $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$

p	q	$(p \Rightarrow q)$	$\Leftrightarrow$	$(\sim q$	$\Rightarrow$	$\sim p)$
V	V	V	V	F	V	F
V	I	I	V	I	I	F
V	F	F	V	V	F	F
I	V	V	V	F	V	I
I	I	V	V	I	V	I
I	F	I	V	V	I	I
F	V	V	V	F	V	V
F	I	V	V	I	V	V
F	F	V	V	V	V	V

La loi de contraposition est donc tout autant tautologique en logique trivalente qu'en logique bivalente.

On a également les lois de Morgan :

$$(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim(\sim p \vee \sim q), \text{ et : } (p \vee q) \Leftrightarrow \sim(\sim p \wedge \sim q),$$

ainsi que les lois :

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow p), \text{ et : } \sim p \Rightarrow (p \Rightarrow q) \text{ (“paradoxes” de l’implication matérielle).}$$

Par contre, certaines lois, qui peuvent sembler fondamentales, ne sont plus valides en trivalente. C’est le cas du *Tiers Exclu*, ainsi que du principe de *Non-Contradiction* dont les formules ne sont pas tautologiques :

p	p	$\vee$	$\sim p$	$\sim$	$(p$	$\wedge$	$\sim p)$
V		V	F	V		F	F
I		I	I	I		I	I
F		V	V	V		F	V

De la même manière les formules correspondant aux lois qui gouvernent les raisonnements par l’absurde ne sont pas tautologiques : $(\sim p \Rightarrow p) \Rightarrow p, (p \Rightarrow \sim p) \Rightarrow \sim p$ (*consequentia mirabilis*, attribuer la valeur I à p) et $[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q) \Rightarrow \sim p)]$ (*Modus Tollens*, attribuer les valeurs V à p et I à q).

Du reste, la formule correspondant au *Modus Ponens* n’est elle-même pas tautologique : $[(p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q)]$ (attribuer les valeurs I à p et F à q), pas plus que la loi dite « d’importation / exportation » : $[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \Rightarrow r]$ (attribuer les valeurs I à p et q et F à r).

Enfin, on n’a pas les équivalences habituelles : $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$, et : $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim (p \wedge \sim q)$.

Par contre, on a l’équivalence : $(p \vee q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow q]$:

p	q	$(p \vee q)$	$\Leftrightarrow$	$[(p \Rightarrow q)$	$\Rightarrow$	$q]$
V	V	V	V	V	V	
V	I	V	V	I	V	
V	F	V	V	F	V	
I	V	V	V	V	V	
I	I	I	V	V	I	
I	F	I	V	I	I	
F	V	V	V	V	V	
F	I	I	V	V	I	
F	F	F	V	V	F	

Table des matières