

1 Les règles d'inférence de la déduction naturelle

1.1 La conjonction \wedge

1.1.1 Introduction ($\wedge I$)

$$\begin{array}{l|l} 1 & \phi \\ 2 & \psi \\ \hline 3 & \phi \wedge \psi \quad (\wedge I, 1, 2) \end{array}$$

1.1.2 Élimination ($\wedge E$)

$$\begin{array}{l|l} 1 & \phi \wedge \psi \\ \hline 2 & \phi \quad (\wedge E, 1) \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 1 & \phi \wedge \psi \\ \hline 2 & \psi \quad (\wedge E, 1) \end{array}$$

1.2 La disjonction \vee

1.2.1 Introduction ($\vee I$)

$$\begin{array}{l|l} 1 & \phi \\ \hline 2 & \phi \vee \psi \quad (\vee I, 1) \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 1 & \psi \\ \hline 2 & \phi \vee \psi \quad (\vee I, 1) \end{array}$$

1.2.2 Élimination ($\vee E$)

$$\begin{array}{l|l} 1 & \phi \vee \psi \\ 2 & \neg \phi \\ \hline 3 & \psi \quad (\vee E, 1, 2) \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 1 & \phi \vee \psi \\ 2 & \neg \psi \\ \hline 3 & \phi \quad (\vee E, 1, 2) \end{array}$$

1.3 Le conditionnel \rightarrow

1.3.1 Introduction ($\rightarrow I$)

$$\begin{array}{l|l} 1 & \phi \quad (A) \\ \vdots & \vdots \\ 2 & \psi \\ \hline 3 & \phi \rightarrow \psi \quad (\rightarrow I, 1 - 2) \end{array}$$

1.3.2 Élimination ($\rightarrow E$)

$$\begin{array}{l|l} 1 & \phi \rightarrow \psi \\ 2 & \phi \\ \hline 3 & \psi \quad (\rightarrow E, 1, 2) \end{array}$$

1.4 Le Biconditionnel \leftrightarrow

1.4.1 Introduction ($\leftrightarrow I$)

$$\begin{array}{l|l} 1 & \phi \rightarrow \psi \\ 2 & \psi \rightarrow \phi \\ \hline 3 & \phi \leftrightarrow \psi \quad (\leftrightarrow I, 1, 2) \end{array}$$

1.4.2 Élimination ($\leftrightarrow E$)

$$\begin{array}{l|l} 1 & \phi \leftrightarrow \psi \\ \hline 2 & \phi \rightarrow \psi \quad (\leftrightarrow E, 1) \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 1 & \phi \leftrightarrow \psi \\ \hline 2 & \psi \rightarrow \phi \quad (\leftrightarrow E, 1) \end{array}$$

1.5 La Négation \neg

1.5.1 Introduction ($\neg I$)

$$\begin{array}{l|l} 1 & \phi \quad (A) \\ \vdots & \vdots \\ 2 & \psi \\ \vdots & \vdots \\ 3 & \neg \psi \\ \hline 4 & \neg \phi \quad (\neg I, 1 - 3) \end{array}$$

1.5.2 Élimination ($\neg E$)

$$\begin{array}{l|l} 1 & \neg \neg \phi \\ \hline 2 & \phi \quad (\neg E, 1) \end{array}$$

1.6 Le quantificateur existentiel \exists

1.6.1 Introduction ($\exists I$)

$$\begin{array}{l|l} 1 & (...a...) \\ 2 & \hline & \exists u(...u...) \quad (\exists I, 1) \end{array}$$

2 est une *généralisation existentielle* à partir de 1.

1.6.2 Élimination ($\exists E$)

$$\begin{array}{l|l} 1 & \exists u(...u...) \\ 2 & \hline & \boxed{a} (...a...) \quad (A) \\ \vdots & \vdots \\ 3 & \phi \\ 4 & \hline & \phi \quad (\exists E, 1, 2-3) \end{array}$$

2 est une *instance de substitution* de 1; a est *isolé* en 2; ϕ en 3 est tel que a n'apparaît pas dans ϕ .

1.7 Le quantificateur universel \forall

1.7.1 Introduction ($\forall I$)

$$\begin{array}{l|l} 1 & (...â...) \\ 2 & \hline & \forall u(...u...) \quad (\forall I, 1) \end{array}$$

Avec \hat{a} arbitraire (ligne 1). Avec « $\forall u...u...$ » *généralisation universelle* de « $(...â...)$ » (ligne 2).

1.7.2 Élimination ($\forall E$)

$$\begin{array}{l|l} 1 & \forall u(...u...) \\ 2 & \hline & (...a...) \quad (\forall E, 1) \end{array}$$

Avec a comme lettre de constante du domaine de quantification; 2 est une *instance de substitution* de 1.

1.8 Règle dérivée : analyse de cas (AC)

Nous introduisons une *règle dérivée*, la règle AC. Cette règle est un raccourci. Ce n'est pas une règle élémentaire nouvelle. Elle nous épargne seulement des lignes de calcul. On trouve à gauche ci-dessous la forme générale de cette règle dérivée, et à droite la forme générale des lignes de calcul que nous épargne cette règle.

$$\begin{array}{l|l} 1 & \phi \vee \psi \\ \vdots & \vdots \\ 2 & \phi \rightarrow \theta \\ \vdots & \vdots \\ 3 & \psi \rightarrow \theta \\ 4 & \theta \quad \text{AC, 1, 2, 3} \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 1 & \phi \vee \psi \\ \vdots & \vdots \\ 2 & \phi \rightarrow \theta \\ \vdots & \vdots \\ 3 & \psi \rightarrow \theta \\ 4 & \hline & \neg \theta \quad A \\ 5 & \hline & \phi \quad A \\ 6 & \hline & \phi \rightarrow \theta \quad R2 \\ 7 & \hline & \theta \quad \rightarrow E, 5, 6 \\ 8 & \hline & \neg \theta \quad R4 \\ 9 & \hline & \neg \phi \quad \neg I, 5-8 \\ 10 & \hline & \psi \quad A \\ 11 & \hline & \psi \rightarrow \theta \quad R2 \\ 12 & \hline & \theta \quad \rightarrow E, 10, 11 \\ 13 & \hline & \neg \theta \quad R4 \\ 14 & \hline & \neg \psi \quad \neg I, 10-13 \\ 15 & \hline & \phi \vee \psi \quad R1 \\ 16 & \hline & \phi \quad \vee E, 14, 15 \\ 17 & \hline & \neg \neg \theta \quad \neg I, 4-16 \\ 18 & \hline & \theta \quad \neg E, 17 \end{array}$$

2 Former une *instance de substitution*

Pour les règles d'élimination du quantificateur universel ($\forall E$) et d'élimination du quantificateur existentiel ($\exists E$), vous devez former ce que l'on a appelé une *instance de substitution*. Expliquons. Nous partons donc d'une formule quantifiée (universellement ou existentiellement). Nous allons nous séparer du quantificateur qui gouverne la formule, soit parce que la formule que nous allons écrire *suit logiquement* de la formule quantifiée (cas de la règle $\forall E$) soit parce que nous faisons une hypothèse à partir de la formule quantifiée (cas de la règle $\exists E$). Pour cela, nous devons éliminer *toutes et seulement les occurrences de la variable liée au quantificateur* et nous les remplaçons par *une seule et même lettre* de constante. Cela veut dire que si une formule est bien formée (si c'est une proposition), une *instance de substitution* de cette formule ne pourra pas être une fonction propositionnelle (qui ne serait donc pas une proposition) – une instance de substitution d'une formule bien formée ne peut pas donner une formule dans laquelle une variable apparaît libre. Donnons quelques exemples de bonnes dérivations, utilisant la règle $\forall E$:

$\begin{array}{l} 1 \quad \left \begin{array}{l} \forall xFx \\ \hline Fa \end{array} \right. \quad \text{P} \\ 2 \quad \quad \quad \forall E, 1 \end{array}$	$\begin{array}{l} 1 \quad \left \begin{array}{l} \forall yFyy \\ \hline Fbb \end{array} \right. \quad \text{P} \\ 2 \quad \quad \quad \forall E, 1 \end{array}$	$\begin{array}{l} 1 \quad \left \begin{array}{l} \forall z(Fz \rightarrow \exists zGz) \\ \hline Fc \rightarrow \exists zGz \end{array} \right. \quad \text{P} \\ 2 \quad \quad \quad \forall E, 1 \end{array}$
--	--	--

Dans le cas de la règle ($\forall E$) vous pouvez utiliser n'importe quelle lettre du domaine de quantification (si c'est vrai *pour tous*, c'est vrai de chacun). Dans le cas de la règle ($\exists E$) il faut veiller à ce que la lettre choisie soit *isolée* (cf. section 5.2).

Pour donner un exemple où l'on passe étape par étape d'une formule quantifiée universellement à une instance de substitution de cette formule :

1. Soit la formule $\forall x[(Gx \wedge Hx) \rightarrow \exists xFx]$
2. J'efface le quantificateur de la formule. J'obtiens donc une formule ouverte : $[(Gx \wedge Hx) \rightarrow \exists xFx]$
3. Je remplace ici *tous les x* qui apparaissent libres par une (seule et même) lettre de constante de mon choix, tirée du domaine d'individus et j'arrive ainsi sur mon instance de substitution. $(Ga \wedge Ha) \rightarrow \exists xFx$

3 La généralisation existentielle

La règle d'introduction du quantificateur existentiel ($\exists I$) utilise la notion de généralisation existentielle. Pour généraliser existentiellement, il faut :

1. Supprimer *le nombre que l'on souhaite* d'occurrences d'une lettre de constante dans une formule dans laquelle cette lettre apparaît : (... a ...).
2. Remplacer cette ou ces occurrences par une variable qui apparaît *libre* à cette ou ces places : (... x ...) avec *x* libre.
3. Appliquer le quantificateur existentiel devant ce résultat : $\exists x(\dots x \dots)$.

Donnons quelques exemples, dans des dérivations :

$\begin{array}{l} 1 \quad \left \begin{array}{l} Fa \\ \hline \exists xFx \end{array} \right. \quad \text{P} \\ 2 \quad \quad \quad \exists I, 1 \end{array}$	$\begin{array}{l} 1 \quad \left \begin{array}{l} Maa \\ \hline \exists xMxx \end{array} \right. \quad \text{P} \\ 2 \quad \quad \quad \exists I, 1 \end{array}$	$\begin{array}{l} 1 \quad \left \begin{array}{l} Maa \\ \hline \exists xMax \end{array} \right. \quad \text{P} \\ 2 \quad \quad \quad \exists I, 1 \end{array}$
$\begin{array}{l} 1 \quad \left \begin{array}{l} Maa \\ \hline \exists xMxa \end{array} \right. \quad \text{P} \\ 2 \quad \quad \quad \exists I, 1 \end{array}$	$\begin{array}{l} 1 \quad \left \begin{array}{l} \exists x[Gx \rightarrow Ha] \\ \hline \exists y \exists x[Gx \rightarrow Hy] \end{array} \right. \quad \text{P} \\ 2 \quad \quad \quad \exists I, 1 \end{array}$	

4 La généralisation universelle

Dans la règle d'introduction du quantificateur universel ($\forall I$), on a fait mention de la *généralisation universelle*. Les conditions d'une généralisation universelle sont différentes de celles d'une généralisation existentielle. Expliquons, étape par étape.

1. Soit une formule dans laquelle un nom « a » apparaît (au moins une fois) : (...a...).
2. On efface *toutes* les occurrences de ce nom : (... ..).
3. On remplace *toutes* les occurrences de ce nom par une variable *u* qui est *libre* à ces occurrences : (...u...) Avec *u* libre.

4. On ajoute, devant le tout, le quantificateur universel qui liera cette ou ces variable(s) : $\forall u(\dots u\dots)$.

Donnons quelques exemples, dans des dérivations :

1	$F\hat{a}$	a est arbitraire	1	$M\hat{a}\hat{a}$	a est arbitraire
2	$\forall xFx$	\forall I, 1	2	$\forall xMxx$	\forall I, 1

5 Lettres arbitraires, lettres isolées

5.1 Lettres de constante arbitraires

Nous venons de voir que, dans le cas de la règle (\forall I), il était crucial que nous ayons affaire à un nom (une lettre de constante) *arbitraire*. Nous représentons les noms arbitraires avec un accent circonflexe (par exemple \hat{a}). Un nom est arbitraire dans une formule si la formule en question n'est pas gouvernée par une prémisses ou une supposition dans laquelle ce même nom apparaît.

Donnons un exemple :

1	$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	P
2	$\forall x(Gx \rightarrow Hx)$	P
3	$F\hat{a} \rightarrow G\hat{a}$	\forall E, 1
4	$G\hat{a} \rightarrow H\hat{a}$	\forall E, 2
5	Fa	A
6	$Fa \rightarrow Ga$	R3
7	Ga	\rightarrow E, 5, 6
8	$Ga \rightarrow Ha$	R4
9	Ha	\rightarrow E, 7, 8
10	$F\hat{a} \rightarrow H\hat{a}$	\rightarrow I, 5-9
11	$\forall x(Fx \rightarrow Hx)$	\forall I, 10

On dira que les lignes 3 et 4 ne sont pas *gouvernées* par une prémisses ou une supposition dans laquelle le nom « a » est utilisé (nous aurions notamment pu prendre n'importe quelle autre lettre de constante et on ne trouve pas ce nom dans la prémisses dont la ligne dépend). Les lignes de 5 à 9 sont en revanche gouvernées par une prémisses ou une supposition dans laquelle le nom « a » est utilisé, à savoir par la supposition 5. Puisque l'on décharge la supposition 5 en passant à la ligne 10, cette dernière n'est pas non plus gouvernée par une supposition ou une prémisses dans laquelle la lettre « a » est utilisée, la lettre de constante a est alors arbitraire en 10. C'est ce qui autorise le passage à la ligne 11 (la généralisation universelle, l'introduction du quantificateur universel).

5.2 Lettres de constante isolées

Un nom (une lettre de constante) est *isolé* quand il n'apparaît *nulle part ailleurs* que dans la sous-dérivation dans laquelle il apparaît. Pour montrer qu'un nom est isolé, nous le mettons dans une boîte au moment de son introduction. Un tel nom peut bien entendu apparaître dans une sous-sous dérivation de la sous-dérivation en question (puisque une sous-dérivation est considérée comme étant *à l'intérieur* ou comme appartenant à la dérivations dans laquelle elle s'insère). Cela veut dire qu'il ne peut pas apparaître dans la dérivations principale, ni en guise de prémisses, ni en guise de conclusion. Cela veut également dire qu'un nom isolé ne peut pas tenir le rôle d'un nom arbitraire : puisqu'il apparaît comme supposition dans une sous-dérivation, il ne peut pas, par définition, être arbitraire.