1 Quelques équivalences entre connecteurs

$(\phi \to \psi) \equiv (\neg\phi \vee \psi) \equiv \neg(\phi \wedge \neg\psi)$
$\neg(\phi \to \psi) \equiv (\phi \wedge \neg\psi) \equiv \neg(\neg\phi \vee \psi)$
$\neg(\neg\phi) \equiv \phi$ (*Double négation* – DN)

$(\phi \leftrightarrow \psi) \equiv [(\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)]$
$(\phi \vee \psi) \equiv (\neg\phi \to \psi)$
$(\phi \wedge \psi) \equiv \neg(\phi \to \neg\psi)$

1.1 Lois de De Morgan (DM)

$(\phi \wedge \psi) \equiv \neg(\neg\phi \vee \neg\psi)$
$(\phi \vee \psi) \equiv \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$

$\neg(\phi \vee \psi) \equiv (\neg\phi \wedge \neg\psi)$
$\neg(\phi \wedge \psi) \equiv (\neg\phi \vee \neg\psi)$

2 Lois $\wedge$ et $\vee$

2.1 Idempotence (IDEM)

$(\phi \wedge \phi) \equiv \phi$

$(\phi \vee \phi) \equiv \phi$

2.2 Commutativité (COM)

$(\phi \wedge \psi) \equiv (\psi \wedge \phi)$

$(\phi \vee \psi) \equiv (\psi \vee \phi)$

2.3 Associativité (ASSO)

$[(\phi \wedge \psi) \wedge \theta] \equiv [\phi \wedge (\psi \wedge \theta)] \equiv \phi \wedge \psi \wedge \theta$

$[(\phi \vee \psi) \vee \theta] \equiv [\phi \vee (\psi \vee \theta)] \equiv \phi \vee \psi \vee \theta$

2.4 Distributivité (DIST)

$[\phi \wedge (\psi \vee \theta)] \equiv [(\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \theta)]$

$[\phi \vee (\psi \wedge \theta)] \equiv [(\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \theta)]$

3 Quelques lois logiques utiles

3.1 *Modus Ponens* (MP)

$[(\phi \to \psi) \wedge \phi] \to \psi$

3.2 *Modus Tollens* (MT)

$[(\phi \to \psi) \wedge \neg\psi] \to \neg\phi$

3.3 Contraposition (CP)

$(\phi \to \psi) \equiv (\neg\psi \to \neg\phi)$

3.4 Transitivité de l'implication

$[(\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \theta)] \to (\phi \to \theta)$

3.5 Adjonction

$\phi \to [\psi \to (\phi \wedge \psi)]$

3.6 Loi de Frege

$[(\phi \wedge \psi) \to \theta] \to [(\phi \to \psi) \to (\phi \to \theta)]$

3.7 Identité

$\phi \to \phi$

3.8 Tiers exclu

$\phi \vee \neg\phi$

3.9 Non-contradiction

$\neg(\phi \wedge \neg\phi)$

3.10 Chrysippe

$[(\phi \vee \psi) \wedge \neg\psi] \to \phi$

3.11 Composition

$(\phi \to \psi) \to \{(\phi \to \theta) \to [\phi \to (\psi \wedge \theta)]\}$

3.12 Importation-Exportation

$[\phi \to (\psi \to \theta)] \equiv [(\phi \wedge \psi) \to \theta]$

4 Comportement des tautologies ($\top$) et des contradictions ($\bot$)

$\top \vee \phi \equiv \top \quad \top \wedge \phi \equiv \phi \quad \bot \wedge \phi \equiv \bot \quad \bot \vee \phi \equiv \phi \quad \phi \rightarrow \top \equiv \top \quad \bot \rightarrow \phi \equiv \top$

5 Transcriptions

1. ... $\wedge$ ... $\approx$ « ... et ... », « ... mais ... », « ... or ... », « ... . ».
2. ... $\vee$ ... $\approx$ « ... ou ... ».
3. ... $\rightarrow$ ... $\approx$ « si ..., alors ... », « ... donc ... », « ... conclusion : ... ». [1]
4. ... $\leftrightarrow$ ... $\approx$ « ... si et seulement si ... ».
5. $\neg$... $\approx$ « il n'est pas le cas que ... ».

6 Méthode de mise en forme normale

1. Mise en forme normale **conjonctive** (FNC) : permet de déterminer si la formule est **tautologique**. Elle est tautologique quand on trouve dans **chacun** des conjoints une lettre de proposition et la négation de cette lettre de proposition. Si la formule n'est pas tautologique, la FNC nous donne alors **les conditions de fausseté** de la formule : j'interprète comme F les lettres de propositions élémentaires du ou des conjoints et comme V les lettres de propositions précédées du signe de négation.

   $$(... \vee ... \vee ...) \wedge (... \vee ... \vee ...) \wedge ...$$

   On ne peut trouver à la place des « ... » à l'intérieur des parenthèses que des lettres de propositions élémentaires ou des négations de lettres de propositions élémentaires.
2. Mise en forme normale **disjonctive** (FND) : permet de déterminer si la formule est **contradictoire**. Elle est contradictoire quand on trouve dans **chacun** des disjoints une lettre de proposition et la négation de cette lettre de proposition. Si la formule n'est pas contradictoire, la FND nous donne alors les **conditions de vérité** de la formule : j'interprète comme V les lettres de propositions élémentaires du ou des disjoints et comme F les lettres de proposition précédées du signe de négation.

   $$(... \wedge ... \wedge ...) \vee (... \wedge ... \wedge ...) \vee ...$$

   On ne peut trouver à la place des « ... » à l'intérieur des parenthèses que des lettres de propositions élémentaires ou des négations de lettres de propositions élémentaires.
3. L'ordre pour la mise en forme normale :
   (a) Se débarrasser des implications et des négations d'implications (en utilisant les équivalences entre connecteurs suivants : $(\phi \rightarrow \psi) \equiv (\neg\phi \vee \psi)$ et $\neg(\phi \rightarrow \psi) \equiv (\phi \wedge \neg\psi)$.
   (b) Faire jouer les lois de De Morgan (si c'est nécessaire), de sorte que les négations soient toutes à l'intérieur des parenthèses.
   (c) Faire jouer les lois de distributivité (si c'est nécessaire). [2]

1. $\phi \rightarrow \psi$ peut également se lire : « ψ, si ϕ ».
2. Les lois de dsitributivité peuvent se généraliser :

$$[\phi \wedge (\psi \vee \theta \vee \sigma \vee ...)] \equiv [(\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \theta) \vee (\phi \wedge \sigma) \vee ...]$$
$$[\phi \vee (\psi \wedge \theta \wedge \sigma \wedge ...)] \equiv [(\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \theta) \wedge (\phi \vee \sigma) \wedge ...]$$