Principles of Mathematics

Chap. XXVI - Relations asymétriques.

B. Russell (trad. F. Schmitz)

208. Nous avons vu maintenant que tout ordre repose sur des relations asymétriques. Comme de telles relations sont d'un genre que la logique traditionnelle n'est pas disposée à reconnaître et que le refus de les admettre est une des sources principales des contradictions que la Philosophie Critique a découvertes dans les mathématiques, il est souhaitable, avant de poursuivre, de faire un détour pas la logique pure et de présenter les raisons qui rendent nécessaire d'admettre de telles relations. Ultérieurement (dans la Partie VI, Chap. LI), j'entreprendrai de répondre aux objections générales soulevées par les philosophes contre les relations ; pour le moment, je ne considère que les relations asymétriques.

Les relations peuvent être divisées en quatre classes, selon qu'elles possèdent, ou non, l'une ou l'autre des deux propriétés, transitivité [1] et symétrie. Les relations telles que xRy implique toujours yRx sont appelées *symétriques* ; les relations telles que xRy, yRz ensemble impliquent toujours xRz sont appelées *transitives*. J'appellerai *non-symétirques* les relations qui ne possèdent pas la première propriété ; et *asymétriques*celles qui possèdent la propriété opposée, *i.e.* pour lesquelles xRy exclut toujours yRx. J'appellerai *non-transitives* les relations que ne possèdent pas la deuxième propriété et *intransitives* celles qui possèdent la propriété que xRy, yRz excluent toujours xRz. On peut illustrer tous ces cas par des relations de famille. La relation *frère ou sœur* est symétrique, et est transitive si nous admettons qu'un homme puisse son propre frère et une femme sa propre sœur.. La relation *frère* n'est pas symétrique, mais est transitive. *Demi-frère ou demi-sœur* est symétrique mais pas transitive. *Epous(e)* est symétrique mais intransitive ; *descendant* est asymétrique mais transitive. *Demi-frère* n'est ni symétrique, ni transitive ; s'il était interdit de se marier une troisième fois, elle serait intransitive. *Beau fils* est asymétrique et n'est pas transitive ; s'il était interdit de se marier une deuxième fois, elle est serait

1. Ce terme semble avoir été utilisé pour la première fois en ce sens par De Morgan ; voir *Camb. Phil. Trans.* IX, p. 104 ; X, p. 346. Ce terme est maintenant d'un usage courant.

intransitive. *Beau-frère* n'est ni symétrique ni transitive. Enfin, *père* est à la fois asymétrique et intransitive. Parmi les relations non-transitives mais pas intransitives, la seule importante, pour autant que je sache, est *diversité* ; parmi les relations non-symétriques mais pas asymétriques, il semble n'y avoir qu'une d'importante, à savoir *implication*. Dans les autres cas, habituellement, les relations sont soit transitives soit intransitives, et sont soit symétriques, soit asymétriques.

209. Les relations qui sont à la fois symétriques et transitives sont, formellement, de la nature de l'égalité. Tout terme du champ d'un telle relation à la relation en question à lui-même, bien qu'il puisse ne pas avoir cette relation à aucun autre terme. Car, si l'on dénote la relation par le signe de l'égalité, si a est dans le champ de cette relation, il y a un autre terme b tel que $a = b$. Si a et b sont identiques, alors a=a. Sinon, puisque la relation est symétrique, $b = a$; puisqu'elle transitive, et que nous avons $a = b$, $b = a$, il s'ensuit que $a = a$. La propriété d'une relation qui fait qu'elle se tient entre un terme et lui-même est appelée par Peano *réflexivité*, et il a montré que, contrairement à ce que l'on croyait précédemment, cette propriété ne peut être inférée de la symétrie et de la transitivité.. Car ni l'une ni l'autre de ces propriétés n'affirme qu'il y ait un b tel que $a = b$, mais seulement ce qui s'ensuit au cas il y aurait un tel b ; et s'il n'y a pas un tel b, alors la preuve de $a = a$ échoue [2]. Cette propriété de réflexivité introduit cependant quelques difficultés. Il n'y a qu'une seule relation dont elle est vraie sans limitation, et c'est l'identité. Dans tous les autres cas, elle ne vaut que pour les termes d'une certaine classe. L'égalité quantitative, par exemple, n'est réflexive qu'appliquée à des quantités ; de termes autres, il est absurde d'affirmer qu'ils sont quantitativement égaux à eux-mêmes. De même, l'égalité logique, n'est réflexive que pour les classes, les propositions ou les relations. La simultanéité n'est réflexive que pour les événements, etc. Ainsi, s'agissant d'une relation transitive et symétrique donnée autre que l'identité, nous ne pouvons affirmer sa réflexivité qu'à l'intérieur d'une certaine classe ; et, mis à part le principe d'abstraction (déjà mentionné dans la partie III, Chap. XIX et que nous allons bientôt discuté plus longuement), il n'est pas nécessaire que cette classe soit définie autrement que comme l'extension de la relation transitive et symétrique en question. Et lorsque la classe est définie ainsi, la réflexivité à l'intérieur de cette classe suit, comme nous l'avons vu, de la transitivité et de la symétrie.

210. En introduisant ce que j'ai appelé le principe d'abstraction [3], il est possible

2. Voir *e. g. Revue de Mathématiques*, T. VII, p. 22 ; *Notations de Logique Mathématique*, Turin, 1894, p. 45, F. 1901, p. 193.

3. On trouvera dans De Morgan, *Camb. Phil. Trans.*, Vol X, p. 345, un axiome virtuellement identique à ce principe, mais qui n'est pas posé avec la précision nécessaire et qui n'est pas démontré.

de rendre compte un peu mieux de la réflexivité. Peano a défini[4] un processus qu'il appelle définition par abstraction, dont il montre qu'il est fait fréquemment usage en Mathématiques. Ce processus est le suivant : lorsque il y a une relation quelconque qui est transitive, symétrique et réflexive (dans son champ), alors, si cette relation se tient entre u et v, nous définissons une nouvelle entité $\phi(u)$, qui doit être identique à $\phi(v)$). Ainsi notre relation est analysée en une même relation à un nouveau terme $\phi(u)$ ou $\phi(v)$. La légitimité de ce processus, tel que le présente Peano, exige un axiome, à savoir l'axiome que, s'il y a une instance de la relation en question, alors il y a une entité telle que $\phi(u)$ ou $\phi(v)$. Cet axiome est mon principe d'abstraction, qui peut être formulé précisément comme suit : « Toute relation transitive et symétrique, dont il y a au moins une instance, est analysable en la possession conjointe d'une nouvelle relation à un nouveau terme, cette nouvelle relation étant telle qu'aucun terme ne peut l'avoir à plus d'un terme, mais que sa converse n'a pas cette propriété. » Ce principe revient, en langage courant, à l'affirmation que les relations transitives et symétriques proviennent d'une propriété commune, à quoi il faut ajouter que cette propriété entretient, avec les termes qui l'ont, une relation que rien d'autre n'entretient avec ces termes. Cela fournit la formulation précise du principe, souvent appliqué par les philosophes, que les relations symétriques et transitives naissent toujours d'une identité de contenu. L'identité de contenu est cependant une expression extrêmement vague, à laquelle la proposition ci-dessus donne, dans le cas présent, une signification précise, mais une signification qui ne correspond nullement à ce que vise cette expression qui est, apparemment, de réduire les relations aux adjectifs des termes en relation.

Il est maintenant possible de rendre compte de manière plus claire de la propriété de réflexivité. Soit R notre relation symétrique, et S la relation asymétrique que deux termes entretenant la relation R doivent avoir à un même troisième terme. Alors la proposition xRy est équivalente à celle-ci : « Il y a un terme a tel que xSa et ySa ». Il s'ensuit alors que, si x appartient à ce que nous avons appelé le domaine de S, *i. e.* s'il y a un terme a tel que xSa, alors xRx ; car xRx est simplement xSa et xSa. Il ne s'ensuit évidemment pas qu'il y ait un autre terme y tel que xRy et donc l'objection de Peano à la preuve habituelle de la réflexivité est valide. Mais au moyen de l'analyse des relations symétriques et transitives, nous obtenons la preuve de la propriété de réflexivité, accompagnée de sa limitation exacte.

211. Nous pouvons maintenant voir la raison d'exclure de notre exposé des méthodes pour engendrer des suites, une septième méthode, à laquelle certains lecteurs auraient pu s'attendre. C'est la méthode selon laquelle la position est seulement relative - une méthode qu'au Chap. XIX, § 154 nous avons rejeter en ce qui concerne

4. *Notations de Logique Mathématique*, p. 45.

les quantités. Comme la philosophie de l'espace et du temps toute entière est liée à la question de la légitimité de cette méthode, qui est en fait la question de la position absolue ou relative, il peut être bienvenu d'en rendre compte ici et de montrer comment le principe d'abstraction conduit à la théorie absolutiste des positions.

Si nous considérons une suite telle que celle des événements, et si nous refusons d'admettre le temps absolu, nous devrons admettre trois relations fondamentales entre les événements, à savoir, simultanéité, priorité et postériorité. Formellement, une telle théorie peut être formulée comme suit : Soit une classe de termes tels que n'importe quels deux termes x, y ont entre eux soit une relation asymétrique et transitive P, ou la relation converse $\breve{P}$, soit une relation symétrique et transitive R. Et soit également : xRy, yPz implique xPz et xPy, yRz implique xPz. Alors tous les termes peuvent être arrangés en une suite dans laquelle, toutefois, il pourrait y avoir de nombreux termes ayant la même place dans la suite. Cette place, selon la théorie relativiste des positions, n'est rien d'autre que la relation transitive et symétrique R à un certain nombre d'autres termes. Mais il suit du principe d'abstraction qu'il y a une relation S telle que si xRy, il y a une entité t pour laquelle xSt et ySt Nous trouverons alors que les différentes entités t correspondant à différents groupes de nos termes de départ, forment également une suite, mais une suite dans laquelle deux termes distincts ont entre eux une relation asymétrique (formellement, le produit $\breve{S}|R|S$[5]). Les termes t seront alors les positions absolues de nos x et de nos y, et notre prétendue septième méthode pour engendrer des suites est réduite à la deuxième méthode fondamentale. Ainsi, il n'y aura pas de suites n'ayant que des positions relatives, mais, dans toute suite, ce sont les positions elles-mêmes qui constituent la suite[6].

212. Nous sommes maintenant en position de faire face à l'aversion des philosophes pour les relations. L'explication entière de l'ordre donnée ci-dessus et l'argument concernant l'abstraction feront l'objet d'objections de la part de ces philosophes - et je crains qu'ils soient majoritaires - qui soutiennent qu'aucune relation ne peut avoir de validité absolue et métaphysique. Je n'ai pas l'intention d'entrer ici dans une discussion générale, mais seulement d'exposer les objections à l'encontre de toute analyse des relations asymétriques.

C'est une opinion commune - souvent inconsciente et utilisée dans des arguments même par ceux qui ne s'en font pas explicitement les avocats - que toute proposition consiste ultimement en un sujet et un prédicat. Lorsque cette opinion rencontre une proposition relationnelle, elle a deux façons d'en rendre compte, l'une que l'on

5. Ndt. : il doit y avoir une erreur ; il faut lire $\breve{S}|P|S$

6. Un traitement formel des positions relatives est donné par Schröder, *Sur une extension de l'idée d'ordre*, *Congrès*, Vol. III, p. 235.

peut appeler monadiste, et l'autre moniste. Etant donné, par exemple, la proposition aRb dans laquelle R est une relation quelconque, elle sera analysée du point de vue monadiste en deux propositions, que l'on peut appeler ar_1 et br_2 qui confèrent à a et à b respectivement, des adjectifs qui pris ensemble sont équivalents à R. Le point de vue moniste, au contraire, considère la relation comme une propriété du tout composé de a et de b, et donc équivalente à une proposition que l'on peut dénoter par $(ab)r$. De ces deux points de vue, le premier est représenté par Leibniz et (pour l'essentiel) par Lotze, le second par Spinoza et M. Bradley. Examinons successivement ces points de vue lorsqu'ils s'appliquent à des relations asymétriques ; et, pour fixer les idées, prenons les relations de « plus grand » et « plus petit ».

213. Le point de vue monadiste est formulé avec une admirable clairvoyance par Leibniz dans le passage suivant [7] :

« La raison ou proportion entre deux lignes L et M peut être conçue de trois façons : comme raison du plus grand L au moindre M, comme raison du moindre M au plus grand L, et enfin comme quelque chose d'abstrait des deux, c'est à dire comme la raison entre L et M, sans considérer lequel est l'antérieur ou le postérieur, le sujet ou l'objet. Et c'est ainsi que les proportions sont considérées dans la Musique. Dans la première considération, L le plus grand est le sujet ; dans la seconde M le moindre est le sujet de cet accident, que les philosophes appellent relation ou rapport. Mais quel en sera le sujet dans le troisième sens ? On ne saurait dire que tous les deux L et M ensemble, soient le sujet d'un tel accident, car ainsi nous aurions un Accident en deux sujets, qui aurait une jambe dans l'un, et l'autre dans l'autre, ce qui est contre la notion des accidents. Donc il faut dire, que ce rapport dans ce troisième sens est bien hors des sujets ; mais que n'étant ni substance ni accident, cela doit être une chose purement idéale, dont la considération ne laisse pas d'être utile. »

214. La troisième des manières ci-dessus de considérer la relation de « plus grand » et celle de « plus petit », est, pour le dire vite, celle dont les monistes se font les avocats, en soutenant, comme ils le font, que le tout composé de L et de M est un sujet, de telle sorte que leur manière de considérer le rapport ne les oblige pas, comme le suppose Leibniz, à le ranger parmi les bipèdes. Pour l'instant, nous ne sommes concernés que par les deux premières manières. Dans la première façon de considérer les choses, nous avons « L est (plus grand que M) », les mots entre parenthèses étant considérés comme un adjectif de L. Mais lorsque nous examinons cet adjectif, il est immédiatement évident qu'il est complexe : il consiste, au moins, en les parties *plus grand* et M, et ces deux parties sont essentielles. Dire que L est plus grand, ne véhicule pas du tout notre signification, et il est hautement probable

7. *Phil. Werke*, Gerhardt éd., Vol. VII, p. 401. Ndt : le texte de la citation est celui de l'édition Gerhardt ; elle est extraite du *Cinquième Ecrit* à Clarke (p. 144-145 de l'édition Robinet).

que M est également plus grand. Le prétendu adjectif de L comporte une référence à M ; mais ce qui peut bien être signifié par « une référence », reste inintelligible dans la théorie. Un adjectif comportant une référence à M est tout simplement un adjectif relatif à M, et cela n'est qu'une manière lourde de décrire une relation. Ou bien, pour dire les choses autrement, si L a un adjectif correspondant au fait qu'il est plus grand que M, cet adjectif est logiquement une suite de la relation directe de L à M et en est simplement dérivé. Mis à part M, rien n'apparaît, dans l'analyse de L, pour la différencier de M ; et cependant, dans la théorie des relations en question, L devrait différer intrinsèquement de M. Nous serions ainsi obligés d'admettre, dans tous les cas de relations asymétriques, une différence spécifique entre les termes en relation, alors qu'aucune analyse de chacun d'eux pris isolément, ne révélera une propriété pertinente que l'un possède, mais pas l'autre. Pour la théorie monadiste des relations, cela constitue une contradiction ; et c'est une contradiction qui condamne la théorie dont elle provient [8].

Examinons plus avant l'application de la théorie monadiste aux relations quantitatives. La proposition « A est plus grand que B » doit être analysable en deux propositions, l'une conférant un adjectif à A, l'autre en conférant un à B. Un partisan de l'opinion en question soutiendra probablement que A et B sont des quantités, pas des grandeurs, et dira que les adjectifs requis sont les grandeurs de A et de B. Mais il devra alors admettre une relation entre les grandeurs, qui sera tout autant asymétrique que celle que les grandeurs devaient expliquer. En conséquence, les grandeurs auront besoin de nouveaux adjectifs, et ainsi de suite *ad infinitum* ; et la régression à l'infini devra être complétée avant qu'une *signification* quelconque puisse être assignée à notre proposition initiale. Ce genre de processus infini est sans aucun doute critiquable, puisque son seul objectif est d'expliquer la signification d'une proposition donnée, alors qu'aucune de ses étapes ne nous rapproche de cette signification [9]. Nous ne pouvons donc prendre les grandeurs de A et de B pour les adjectifs requis. A cela s'ajoute que, quels que soient les adjectifs que nous prenions, hormis ceux qui

8. Voir un article sur « Les relations du nombre et de la quantité », *Mind*, N. S. No. 23. Cet article fut écrit alors que j'adhérais encore à la théorie monadiste des relations : les contradictions en question étaient donc considérées comme inévitables. L'extrait suivant de Kant soulève le même point : « La main droite est semblable et égale à la main gauche, et si l'on considère seulement l'une d'entre elles isolément, la proportion et position des parties entre elles, et la grandeur du tout, une description complète de l'une doit également valoir en tous points pour l'autre. » (*Von dem ersten Grunde des Unterschiedes der Gegenden im Raum*, éd. Hart. Vol. II, p. 389) [Ndt. : le texte allemand que cite Russell est fautif ; il faut lire « ...auf die Proportion und Lage... » et non pas « ...auf die Proportion der Lage... ».]

9. Lorsqu'un processus infini de ce genre est exigé, nous avons nécessairement affaire à une proposition qui est une unité infinie, au sens de Part II, Chap. XVII.

font référence à l'autre terme, nous serons incapables, même formellement, de rendre compte en quelque façon de la relation, sans admettre précisément une telle relation entre les adjectifs. Car le simple fait que les adjectifs soient différents ne conduit qu'à une relation symétrique. Ainsi, si nos deux termes ont des couleurs différentes, nous constatons que A à B la relation de différence de couleur, une relation qu'aucun traitement, aussi soigneux soit-il, ne rendra asymétrique. Ou bien, si devions en revenir aux grandeurs, nous dirions simplement que A et B diffèrent en grandeur, ce qui ne fournit aucune indication quant à celui qui est le plus grand. Ainsi les adjectifs de A et de B doivent être, comme dans l'analyse de Leibniz, des adjectifs faisant référence chacun à l'autre terme. L'adjectif de A doit être « plus grand que B », et celui de B doit être « plus petit que A ». Ainsi A et B diffèrent, puisqu'ils ont des adjectifs différents - B n'est pas plus grand que B et A n'est pas plus petit que A - mais les adjectifs sont extrinsèques, au sens où l'adjectif de A fait référence à B et celui de B, à A. En conséquence, la la tentative d'analyser ainsi la relation échoue et nous sommes forcés d'admettre ce que cette théorie était destinée à éviter, à savoir une relation soit-disant « externe », *i.e.* une relation n'impliquant aucune complexité dans l'un ou l'autre des termes en relation.

Le même résultat peut être prouvé des relations asymétriques en général, puisqu'il ne dépend que du fait que identité et diversité sont toutes deux des relations symétriques. Soit a et b ayant une relation R asymétrique, de telle sorte que aRb et $b\breve{R}a$. Admettons que les adjectifs (qui, comme on l'a vu, doivent chacun faire référence à l'autre terme) soient dénotés par β et α respectivement. Nos termes deviennent alors $a\beta$ et $b\alpha$. α comporte une référence à a et β une référence à b ; et α et β diffèrent puisque le relation est asymétrique. Mais a et b n'ont aucune différence intrinsèque correspondant à la relation R et antérieure à elle ; ou bien, s'ils en ont, les points de différence doivent eux-mêmes entretenir une relation semblable à R, de sorte que l'on a rien gagné. Soit α, soit β exprime une différence entre a et b, mais une différence qui, puisque soit α, soit β comporte une référence à un terme autre que celui dont il est l'adjectif, loin d'être antérieure à R, est en fait la relation R elle-même. Et puisque α comme β présupposent R, la différence entre α et β ne peut être utilisée pour fournir une différence intrinsèque entre a et b. Ainsi nous avons une différence sans un point de différence antérieur. Cela montre que certaines relations asymétriques doivent être ultimes, et qu'au moins une telle relation asymétrique ultime doit être un composant de toute relation asymétrique envisageable.

Il est facile de critiquer la théorie monadiste d'un point de vue général, en développant les contradictions qui surgissent des relations des termes aux adjectifs en lesquels notre première relation a été analysée. Ces considérations, qui n'ont pas de connexion particulière avec l'asymétrie, relève de la philosophie générale et ont été mises en avant par les partisans de la théorie moniste. Ainsi M. Bradley dit de la théorie monadiste [10] : « Bref nous sommes entraînés par un principe de fission qui ne s'achève nulle part. Toute qualité en relation a en conséquence une diversité à l'intérieur de sa propre nature et cette diversité ne peut être immédiatement affirmée de la qualité. En conséquence la qualité doit échanger son unité pour une relation interne. Mais, ainsi libérés, les divers aspects, parce qu'ils sont chacun quelque chose en relation, doivent chacun être également quelque chose par-delà [le fait d'être en relation]. Cette diversité est fatale à l'unité interne de chacun ; et il demande une nouvelle relation et ainsi de suite sans limites. » Il reste à voir si la théorie moniste, en évitant cette difficulté, n'en rencontre pas d'autres tout aussi sérieuses.

215. La théorie moniste soutient que tout proposition relationnelle aRb se ramène à une proposition concernant le tout que composent a et b - une proposition que nous pouvons dénoter par $(ab)r$. Cette conception, tout comme l'autre, peut être examinée en faisant référence aux relations asymétriques, ou bien du point de vue de la philosophie générale. Ceux qui se font les avocats de cette opinion, nous disent que le tout contient de la diversité en lui-même, qu'il synthétise des différences, et qu'il accomplit d'autres exploits semblables. Pour ma part, je suis incapable d'attacher une signification précise à ces expressions. Mais faisons de notre mieux.

La proposition « a est plus grand que b », est-il dit, ne dit en réalité rien à propos soit de a, soit de b, mais [dit quelque chose] des deux pris ensembles. Si l'on dénote le tout qu'ils composent par (ab), elle dit, supposerons-nous, « (ab) contient de la diversité de grandeur ». Négligeant pour le moment tout argument général, il y a une objection particulière à cet énoncé dans le cas de l'asymétrie. (ab) est symétrique relativement à a et à b et ainsi la propriété du tout sera exactement la même que a soit plus grand que b, ou que b soit plus grand que a. Leibniz, qui n'acceptait pas la théorie moniste, et n'avait donc aucune raison de la rendre plausible, a clairement aperçu ce fait, comme en témoigne la citation ci-dessus. Car, dans cette troisième manière de considérer les rapports, nous ne considérons pas lequel est l'antécédent et lequel est le conséquent ; et il est de fait assez évident que dans le tout (ab) en tant que tel, il n'y a ni antécédent, ni conséquent. Pour distinguer un tout (ab) d'un tout (ba), ce que nous devons faire si nous voulons expliquer l'asymétrie, nous serons forcés de revenir du tout à ses parties et à leur relation. Car (ab) et (ba) sont constitués d'exactement les mêmes parties et ne diffèrent que par le sens de la relation entre a et b. « a est plus grand que b » et « b est plus grand que a » sont des propositions contenant exactement les mêmes constituants, et donnant donc lieu au même tout ; leur différence tient seulement au fait que « plus grand » est dans le premier cas, une relation de a à b et, dans le second, de b à a. Ainsi, la distinction de sens, *i.e.* la

10. *Appearence and Reality*, 1ère édition , p. 31, 2ème édition, p. 26.

distinction entre une relation asymétrique et sa converse, est une distinction que la théorie moniste des relations est entièrement incapable d'expliquer.

On pourrait multiplier presque indéfiniment des arguments d'une nature plus générale, mais l'argument suivant semble particulièrement pertinent. La relation de tout à partie est elle-même une relation asymétrique, et le tout - comme les monistes aiment particulièrement à le dire - est distinct de toutes ses parties, aussi bien distributivement que collectivement. En conséquence, lorsque nous disons « a est une partie de b », nous cherchons en réalité - si la théorie moniste est correcte - à affirmer quelque chose du tout composé de a et de b, qu'il ne faut pas confondre avec b. Si la proposition concernant ce nouveau tout n'est pas une proposition de tout et de partie, il n'y aura pas de jugements vrais de tout et partie, et il sera donc faux de dire qu'une relation entre les parties est réellement un adjectif du tout. Si la nouvelle proposition est une proposition de tout et partie, elle en exigera une nouvelle pour sa signification et ainsi de suite. Si, en désespoir de cause, le moniste affirme que le tout composé de a et de b n'est pas distinct de b, il est obligé d'affirmer qu'un tout est la somme (au sens de la Logique Symbolique) de ses parties, ce qui, par delà le fait d'être un abandon de l'ensemble de sa position, rend inévitable que le tout soit symétrique relativement à ses parties - une conception dont nous avons déjà vu qu'elle est fatale. En conséquence, nous voyons le moniste conduit à soutenir l'opinion que le seul vrai tout, l'Absolu, n'a pas du tout de parties, et qu'aucune proposition le concernant, ou concernant quoi que ce soit d'autre, n'est entièrement vraie - une opinion qui, de simplement l'énoncer, se contredit elle-même. Et il est sûr qu'une opinion qui soutient que toutes les propositions sont, en fin de compte, contradictoires est suffisamment condamnée par le fait que, si elle est acceptée, elle doit aussi être contradictoire.

216. Nous avons vu que les relations asymétriques sont inintelligibles dans le cadre des deux théories des relations habituelles [11]. En conséquence, comme de telles relations sont impliquées dans le Nombre, la Quantité, l'Ordre, l'Espace, le Temps, et le Mouvement, nous pouvons difficilement espérer avoir une philosophie des mathématiques satisfaisante aussi longtemps que nous sommes convaincus qu'aucune relation ne peut être « purement externe ». Cependant, dès que nous adoptons une théorie différente, les difficultés logiques, qui ont jusqu'ici bloqué les philosophes, se révèlent artificielles. Parmi les termes communément admis comme relationnel, ceux qui sont symétriques et transitifs - tels que l'égalité et la simultanéité - *peuvent* être réduit à ce qui a été vaguement appelé identité de contenu, mais cela doit, à son tour, être analysé comme étant le fait d'entretenir une même relation à un autre terme.

11. Les fondements de ces théories seront examinés d'un point de vue plus général dans le Partie VI, Chap. LI.

Car les soi-disant propriétés d'un terme ne sont, en fait, que d'autres termes avec lesquels il est en relation ; et la propriété commune à deux termes est un terme avec lequel ils entretiennent la même relation.

Cette longue digression dans le domaine de la logique est rendue nécessaire par l'importance fondamentale de l'ordre, et par l'impossibilité complète de l'expliquer sans abandonner les dogmes les plus répandus et les plus chers aux philosophes. S'agissant de l'ordre, tout dépend de l'asymétrie et de la différence de sens, mais ces deux concepts sont inintelligibles pour la logique traditionnelle. Dans le chapitre suivant, nous aurons à examiner la connexion de la différence de sens, avec ce qui apparaît en mathématiques comme différence de signe. Au cours de cet examen, un peu de pure logique sera nécessaire, mais nous toucherons de nouveau à des questions mathématiques ; et ces dernières nous occuperont entièrement au cours des chapitres suivants de cette Partie.