1 Correction des exercices de déduction naturelle – 2

1.1

Vous démontrerez que l'on peut dériver $\exists x \neg Px$ à partir de la prémisse $\neg \forall x Px$.

1	$\neg \forall x Px$	P
2	$\mid\ \neg \exists x \neg Px$	A
3	$\mid\ \mid\ \neg Pa$	A
4	$\mid\ \mid\ \exists x \neg Px$	$\exists$ I, 3
5	$\mid\ \mid\ \neg \exists x \neg Px$	R2
6	$\mid\ \neg\neg P\hat{a}$	$\neg I$, 3-5
7	$\mid\ P\hat{a}$	$\neg$ E, 6
8	$\mid\ \forall x Px$	$\forall$ I, 7
9	$\mid\ \neg \forall x Px$	R1
10	$\neg\neg \exists x \neg Px$	$\neg$ I, 2-8
11	$\exists x \neg Px$	$\neg$ E, 10

1.2

Vous démontrerez que l'on peut dériver $\exists x Gx \rightarrow (\neg A \wedge B)$ à partir de la prémisse $\forall x[Gx \rightarrow (\neg A \wedge B)]$.

1	$\forall x[Gx \rightarrow (\neg A \wedge B)]$	P
2	$\mid\ \exists x Gx$	A
3	$\mid\ \mid\ \boxed{a}\ Ga$	A
4	$\mid\ \mid\ \forall x[Gx \rightarrow (\neg A \wedge B)]$	R1
5	$\mid\ \mid\ Ga \rightarrow (\neg A \wedge B)$	$\forall$ E, 4
6	$\mid\ \mid\ (\neg A \wedge B)$	$\rightarrow$ E, 3, 5
7	$\mid\ (\neg A \wedge B)$	$\exists$ E, 2, 3-6
8	$\exists x Gx \rightarrow (\neg A \wedge B)$	$\rightarrow$ I, 2-7

1.3

Vous démontrerez que l'on peut dériver $\exists x(Fx \wedge Gxd)$ à partir de la prémisse $\forall x Fx \wedge \forall x Gxd$.

1	$\forall x Fx \wedge \forall x Gxd$	P
2	$\forall x Fx$	$\wedge$ E, 1
3	$\forall x Gxd$	$\wedge$ E, 1
4	Fa	$\forall$ E, 2
5	Gad	$\forall$ E, 3
6	$Fa \wedge Gad$	$\wedge$ I, 4, 5
7	$\exists x(Fx \wedge Gxd)$	$\exists$ I, 6

1.4

Vous démontrerez que l'on peut dériver $\forall x(B \to Mdx)$ à partir de la prémisse $B \to \forall x(Mdx)$.

1	$B \to \forall x(Mdx)$	P
2	$\quad B$	A
3	$\quad B \to \forall x(Mdx)$	R1
4	$\quad \forall x Mdx$	$\to$ E, 2, 3
5	$\quad Md\hat{a}$	$\forall$ E, 4
6	$B \to Md\hat{a}$	$\to$ I, 2-5
7	$\forall x(B \to Mdx)$	$\forall$ I, 6

1.5

Vous démontrerez que l'on peut dériver $\exists x(Hx \wedge \neg Sx)$ à partir des prémisses $\forall x(Sx \to Bx)$ et $\exists x(Hx \wedge \neg Bx)$.

1	$\forall x(Sx \to Bx)$	P
2	$\exists x(Hx \wedge \neg Bx)$	P
3	$\quad \boxed{a}\ Ha \wedge \neg Ba$	A
4	$\quad Ha$	$\wedge$ E, 3
5	$\quad \neg Ba$	$\wedge$ E, 3
6	$\quad \forall x(Sx \to Bx)$	R1
7	$\quad Sa \to Ba$	$\forall E$, 6
8	$\quad\quad Sa$	A
9	$\quad\quad Sa \to Ba$	R7
10	$\quad\quad Ba$	$\to$ E, 7, 8
11	$\quad\quad \neg Ba$	R5
12	$\quad \neg Sa$	$\neg$ I, 8-11
13	$\quad Ha \wedge \neg Sa$	$\wedge I$, 4, 12
14	$\quad \exists x(Hx \wedge \neg Sx)$	$\exists$ I , 13
15	$\exists x(Hx \wedge \neg Sx)$	$\exists$ E, 2, 3-14

1.6

Vous démontrerez que l'on peut dériver $\exists x(Hx \wedge Mx)$ à partir des prémisses $\exists x(Nx \wedge Hx)$ et $\forall x(Nx \to Mx)$.

1	$\exists x(Nx \wedge Hx)$	P
2	$\forall x(Nx \rightarrow Mx)$	P
3	$\quad \boxed{a}\ Na \wedge Ha$	A
4	$\quad \forall x(Nx \rightarrow Mx)$	R2
5	$\quad Na \rightarrow Ma$	$\forall$ E, 4
6	$\quad Na$	$\wedge$ E, 3
7	$\quad Ma$	$\rightarrow$ E, 5, 6
8	$\quad Ha$	$\wedge$ E, 3
9	$\quad Ha \wedge Ma$	$\wedge$ I, 7, 8
10	$\quad \exists x(Hx \wedge Mx)$	$\exists$ I, 9
11	$\exists x(Hx \wedge Mx)$	$\exists$ E, 1, 3-10

1.7

Vous démontrerez que l'on peut dériver $\exists x(Fx \wedge Bx)$ à partir des prémisses $\exists xFx$, $\forall x(Fx \rightarrow Sx)$ et $\forall x(Sx \rightarrow Bx)$.

1	$\exists xFx$	P
2	$\forall x(Fx \rightarrow Sx)$	P
3	$\forall x(Sx \rightarrow Bx)$	P
4	$\quad \boxed{a}\ Fa$	A
5	$\quad \forall x(Fx \rightarrow Sx)$	R2
6	$\quad Fa \rightarrow Sa$	$\forall$E, 5
7	$\quad Sa$	$\rightarrow$ E, 4, 6
8	$\quad \forall x(Sx \rightarrow Bx)$	R3
9	$\quad Sa \rightarrow Ba$	$\forall$ E, 8
10	$\quad Ba$	$\rightarrow$ E, 7, 9
11	$\quad Fa \wedge Ba$	$\wedge$ I, 4, 10
12	$\quad \exists x(Fx \wedge Bx)$	$\exists$ I, 11
13	$\exists x(Fx \wedge Bx)$	$\exists$ E, 1, 4-12