Contrôle continu de logique L1 n°2 – Semestre 1
Correction

Vendredi 5 Décembre 2014

Tous les documents sont autorisés.
Feuille imprimée *recto&verso*.
Toutes les réponses doivent être détaillées.

1 Arbres de vérité (7,5 pts)

Vous déterminerez à l'aide de la méthode des arbres si les formules suivantes sont tautologiques :

1. $[(A \wedge \neg B) \rightarrow C] \rightarrow [\neg C \rightarrow (\neg A \vee B)]$
   Voici l'arbre pour cette formule (comme toujours, on part de la négation de la formule).

$$
\begin{array}{c}
\checkmark \neg\{[(A \wedge \neg B) \rightarrow C] \rightarrow [\neg C \rightarrow (\neg A \vee B)]\} \\
| \\
\checkmark [(A \wedge \neg B) \rightarrow C] \\
| \\
\checkmark \neg[\neg C \rightarrow (\neg A \vee B)] \\
| \\
\neg C \\
| \\
\checkmark \neg(\neg A \vee B) \\
| \\
\checkmark \neg\neg A \\
| \\
A \\
| \\
\neg B \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c}
\checkmark \neg(A \wedge \neg B) \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c} \neg A \\ \otimes \end{array} &
\begin{array}{c} \neg\neg B \\ | \\ B \\ \otimes \end{array}
\end{array}
\end{array} &
\begin{array}{c} C \\ \otimes \end{array}
\end{array}
\end{array}
$$

   Toutes les branches de l'arbre ferment, la formule en haut de l'arbre est donc contradictoire, ce qui veut dire que la formule de départ (la formule à évaluer – sa négation) est tautologique, nécessairement vraie.

2. $[(A \rightarrow C) \leftrightarrow \neg(A \wedge \neg C)]$

$$
\begin{array}{c}
\checkmark \neg[(A \to C) \leftrightarrow \neg(A \wedge \neg C)] \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c}
\checkmark (A \to C) \\
| \\
\checkmark \neg\neg(A \wedge \neg C) \\
| \\
\checkmark (A \wedge \neg C) \\
| \\
A \\
| \\
\neg C \\
\begin{array}{cc}
\neg A & C \\
\otimes & \otimes
\end{array}
\end{array}
&
\begin{array}{c}
\checkmark \neg(A \to C) \\
| \\
\checkmark \neg(A \wedge \neg C) \\
| \\
A \\
| \\
\neg C \\
\begin{array}{cc}
\neg A & \checkmark \neg\neg C \\
\otimes & | \\
 & C \\
 & \otimes
\end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}
$$

Toutes les branches de l'arbre ferment, la formule en haut de l'arbre est donc contradictoire, ce qui veut dire que la formule de départ (la formule à évaluer – sa négation) est tautologique, nécessairement vraie.

3. $[(A \wedge B) \wedge C] \to [A \wedge (B \wedge C)]$

$$
\begin{array}{c}
\checkmark \neg\{[(A \wedge B) \wedge C] \to [A \wedge (B \wedge C)]\} \\
| \\
\checkmark [(A \wedge B) \ \wedge C] \\
| \\
\checkmark \neg[A \wedge (B \wedge C)] \\
| \\
A \\
| \\
B \\
| \\
C \\
\begin{array}{cc}
\neg A & \checkmark \neg(B \wedge C) \\
\otimes & \begin{array}{cc} \neg B & \neg C \\ \otimes & \otimes \end{array}
\end{array}
\end{array}
$$

Toutes les branches de l'arbre ferment, la formule en haut de l'arbre est donc contradictoire, ce qui veut dire que la formule de départ (la formule à évaluer – sa négation) est tautologique, nécessairement vraie.

2 Exercices de déduction naturelle (7,5 pts)

2.1 (2,5 pts)

Vous démontrerez que l'on peut dériver $\neg B \to C$ à partir des prémisses $\neg C \to \neg A$ et $\neg A \to B$.

1	$\neg C \to \neg A$	P
2	$\neg A \to B$	P
3	$\quad \neg B$	A
4	$\quad\quad \neg C$	A
5	$\quad\quad \neg C \to \neg A$	R1
6	$\quad\quad \neg A$	$\to$ E, 4, 5
7	$\quad\quad \neg A \to B$	R2
8	$\quad\quad B$	$\to$ E, 6, 7
9	$\quad\quad \neg B$	R3
10	$\quad \neg\neg C$	$\neg$ I, 4-9
11	$\quad C$	$\neg$ E, 10
12	$\neg B \to C$	$\to$ I, 4-10. CQFD

2.2 **(2,5 pts)**

Vous démontrerez que l'on peut dériver la formule $\neg A \leftrightarrow B$ des prémisses suivantes : $\neg(A \wedge B)$ et $(A \vee B)$.

1	$\neg(A \wedge B)$	P
2	$(A \vee B)$	P
3	$\quad \neg A$	A
4	$\quad A \vee B$	R2
5	$\quad B$	$\vee$ E, 3, 4
6	$\neg A \to B$	$\to$ I, 3-5
7	$\quad B$	A
8	$\quad\quad A$	A
9	$\quad\quad B$	R7
10	$\quad\quad (A \wedge B)$	$\wedge$ I, 8, 9
11	$\quad\quad \neg(A \wedge B)$	R1
12	$\quad \neg A$	$\neg$ I, 8-11
13	$B \to \neg A$	$\to$ I, 7-12.
14	$\neg A \leftrightarrow B$	$\leftrightarrow$ I, 6, 13

2.3 **(2,5 pts)**

Vous démontrerez que l'on peut dériver la formule $[(A \wedge B) \to C] \to [(A \to B) \to (A \to C)]$ sans prémisses.

1	$[(A \wedge B) \to C]$	A
2	$(A \to B)$	A
3	A	A
4	$(A \to B)$	R2
5	B	$\to$ E, 3, 4
6	$(A \wedge B)$	$\wedge$ I, 3, 5
7	$(A \wedge B) \to C$	R1
8	C	$\to$ E, 6, 7
9	$(A \to C)$	$\to$ I, 3-8
10	$(A \to B) \to (A \to C)$	$\to$ I, 2-9
11	$[(A \wedge B) \to C] \to [(A \to B) \to (A \to C)]$	$\to$ I, 1-10. CQFD

3 Vérifonctionnalité **(2 pts)**

Qu'est-ce qu'un connecteur vérifonctionnel ? *Question de cours.*

4 Forme normale conjonctive **(3 pts)**

Vous mettrez la formule suivante en *forme normale conjonctive*. Que pouvez-vous en conclure ?

$$[(A \wedge \neg B) \to C] \to [\neg C \to (\neg A \vee B)]$$

Mettons cette formule en FNC :

1.
$$\neg[(A \wedge \neg B) \to C] \vee [\neg C \to (\neg A \vee B)]$$
Équivalences entre connecteurs : $(\phi \to \psi) \equiv (\neg\phi \vee \psi)$

2.
$$(A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (C \vee \neg A \vee B)$$
Équivalences : $\neg(\phi \to \psi) \equiv (\phi \wedge \neg\psi)$ et $(\phi \to \psi) \equiv (\neg\phi \vee \psi)$ et $\neg\neg\phi \equiv \phi$

3.
$$(\neg C \vee C \vee \neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee C \vee \neg A \vee B) \wedge (A \vee C \vee \neg A \vee B)$$
Distributivité : $(\phi \wedge \psi) \vee \theta \equiv (\psi \vee \theta) \wedge (\phi \vee \theta)$

On trouve dans chacun des conjoints une lettre de proposition et sa négation, ce qui veut dire que chacun des conjoints est tautologique, ce qui veut dire que la conjonction elle-même est tautologique (et que notre formule de départ, qui lui est équivalente, est tout aussi tautologique).