# Contrôle continu de logique L1 n°2 – Semestre 1
# Correction

Vendredi 5 Décembre 2014

Tous les documents sont autorisés.
Feuille imprimée *recto&verso*.
Toutes les réponses doivent être détaillées.

## 1 Arbres de vérité (7,5 pts)

Vous déterminerez à l'aide de la méthode des arbres si les formules suivantes sont tautologiques :

1. $[(A \wedge \neg B) \rightarrow C] \rightarrow [\neg C \rightarrow (\neg A \vee B)]$
   Voici l'arbre pour cette formule (comme toujours, on part de la négation de la formule).

$$
\begin{array}{c}
\checkmark\, \neg\{[(A \wedge \neg B) \rightarrow C] \rightarrow [\neg C \rightarrow (\neg A \vee B)]\} \\
| \\
\checkmark [(A \wedge \neg B) \rightarrow C] \\
| \\
\checkmark\, \neg[\neg C \rightarrow (\neg A \vee B)] \\
| \\
\neg C \\
| \\
\checkmark\, \neg(\neg A \vee B) \\
| \\
\checkmark\, \neg\neg A \\
| \\
A \\
| \\
\neg B \\
\swarrow \qquad \searrow \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c}
\checkmark\, \neg(A \wedge \neg B) \\
\swarrow \quad \searrow \\
\begin{array}{cc}
\neg A & \begin{array}{c} \neg\neg B \\ | \\ B \end{array}
\end{array}
\end{array}
& C
\end{array}
\end{array}
$$

   Toutes les branches de l'arbre ferment, la formule en haut de l'arbre est donc contradictoire, ce qui veut dire que la formule de départ (la formule à évaluer – sa négation) est tautologique, nécessairement vraie.

2. $[(A \rightarrow C) \leftrightarrow \neg(A \wedge \neg C)]$

$\checkmark : [(A \; ! \; C) \; \$ \; : (A \wedge : C)]$

$\checkmark (A \; ! \; C)$ $\quad$ $\checkmark : (A \; ! \; C)$

$\checkmark : : (A \wedge : C)$ $\quad$ $\checkmark : (A \wedge : C)$

$\checkmark (A \wedge : C)$ $\quad$ $A$

$A$ $\quad$ $: C$

$: C$ $\quad$ $: A$ $\quad$ $\checkmark : : C$

$: A$ $\quad$ $C$ $\quad$ $C$

Toutes les branches de l'arbre ferment, la formule en haut de l'arbre est donc contradictoire, ce qui veut dire que la formule de départ (la formule à évaluer – sa négation) est tautologique, nécessairement vraie.

3. $[(A \wedge B) \wedge C] \; ! \; [A \wedge (B \wedge C)]$

$\checkmark : f[(A \wedge B) \wedge C] \; ! \; [A \wedge (B \wedge C)]g$

$\checkmark [(A \wedge B) \wedge C]$

$\checkmark : [A \wedge (B \wedge C)]$

$A$

$B$

$C$

$: A$ $\quad$ $\checkmark : (B \wedge C)$

$: B$ $\quad$ $: C$

Toutes les branches de l'arbre ferment, la formule en haut de l'arbre est donc contradictoire, ce qui veut dire que la formule de départ (la formule à évaluer – sa négation) est tautologique, nécessairement vraie.

# 2 Exercices de déduction naturelle (7,5 pts)

## 2.1 (2,5 pts)

Vous démontrerez que l'on peut dériver $: B \; ! \; C$ à partir des prémisses $: C \; ! \; : A$ et $: A \; ! \; B$.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $:C\ !\ :A$ | P |
| 2 | $:A\ !\ B$ | P |
| 3 | $:B$ | A |
| 4 | $:C$ | A |
| 5 | $:C\ !\ :A$ | R1 |
| 6 | $:A$ | ! E, 4, 5 |
| 7 | $:A\ !\ B$ | R2 |
| 8 | $B$ | ! E, 6, 7 |
| 9 | $:B$ | R3 |
| 10 | $::C$ | : I, 4-9 |
| 11 | $C$ | : E, 10 |
| 12 | $:B\ !\ C$ | ! I, 4-10. CQFD |

## 2.2 (2,5 pts)

Vous démontrerez que l'on peut dériver la formule $:A\ \$\ B$ des prémisses suivantes : $:(A \wedge B)$ et $(A\ \_\ B)$.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $:(A \wedge B)$ | P |
| 2 | $(A\ \_\ B)$ | P |
| 3 | $:A$ | A |
| 4 | $A\ \_\ B$ | R2 |
| 5 | $B$ | _ E, 3, 4 |
| 6 | $:A\ !\ B$ | ! I, 3-5 |
| 7 | $B$ | A |
| 8 | $A$ | A |
| 9 | $B$ | R7 |
| 10 | $(A \wedge B)$ | ^ I, 8, 9 |
| 11 | $:(A \wedge B)$ | R1 |
| 12 | $:A$ | : I, 8-11 |
| 13 | $B\ !\ :A$ | ! I, 7-12. |
| 14 | $:A\ \$\ B$ | \$ I, 6, 13 |

## 2.3 (2,5 pts)

Vous démontrerez que l'on peut dériver la formule $[(A \wedge B) \to C] \to [(A \to B) \to (A \to C)]$ sans prémisses.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $[(A \wedge B) \to C]$ | A |
| 2 | $(A \to B)$ | A |
| 3 | $A$ | A |
| 4 | $(A \to B)$ | R2 |
| 5 | $B$ | $\to$ E, 3, 4 |
| 6 | $(A \wedge B)$ | $\wedge$ I, 3, 5 |
| 7 | $(A \wedge B) \to C$ | R1 |
| 8 | $C$ | $\to$ E, 6, 7 |
| 9 | $(A \to C)$ | $\to$ I, 3-8 |
| 10 | $(A \to B) \to (A \to C)$ | $\to$ I, 2-9 |
| 11 | $[(A \wedge B) \to C] \to [(A \to B) \to (A \to C)]$ | $\to$ I, 1-10. CQFD |

# 3 Vérifonctionnalité (2 pts)

Qu'est-ce qu'un connecteur vérifonctionnel ? *Question de cours.*

# 4 Forme normale conjonctive (3 pts)

Vous mettrez la formule suivante en *forme normale conjonctive*. Que pouvez-vous en conclure ?

$$[(A \wedge \neg B) \to C] \to [\neg C \to (\neg A \vee B)]$$

Mettons cette formule en FNC :

1. $$\neg[(A \wedge \neg B) \to C] \vee [\neg C \to (\neg A \vee B)]$$

   Équivalences entre connecteurs : $(\phi \to \psi) \quad (\neg \phi \vee \psi)$

2. $$(A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (C \vee \neg A \vee B)$$

   Équivalences : $\neg(\phi \to \psi) \quad (\phi \wedge \neg \psi)$ et $(\phi \to \psi) \quad (\neg \phi \vee \psi)$ et $\neg \neg \phi \quad \phi$

3. $$(\neg C \vee C \vee \neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee C \vee \neg A \vee B) \wedge (A \vee C \vee \neg A \vee B)$$

   Distributivité : $(\phi \wedge \psi) \vee \theta \quad (\psi \vee \theta) \wedge (\phi \vee \theta)$

On trouve dans chacun des conjoints une lettre de proposition et sa négation, ce qui veut dire que chacun des conjoints est tautologique, ce qui veut dire que la conjonction elle-même est tautologique (et que notre formule de départ, qui lui est équivalente, est tout aussi tautologique).