

Contrôle continu de logique L1 n°2 – Semestre 1

Correction

Vendredi 5 Décembre 2014

Tous les documents sont autorisés.

Feuille imprimée *recto&verso*.

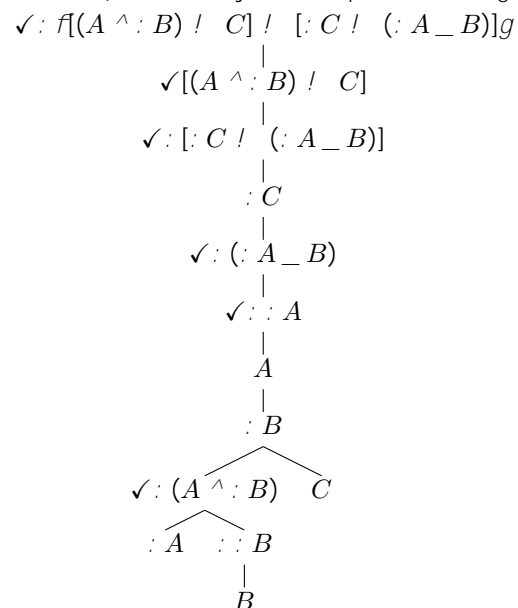
Toutes les réponses doivent être détaillées.

1 Arbres de vérité (7,5 pts)

Vous déterminerez à l'aide de la méthode des arbres si les formules suivantes sont tautologiques :

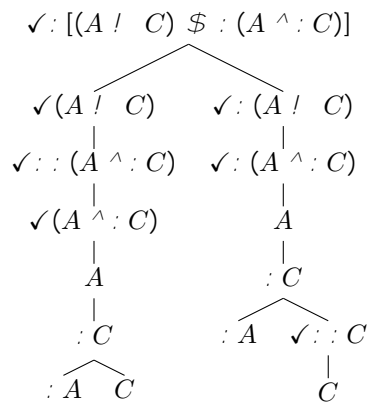
1. $[(A \wedge B) \rightarrow C] \wedge [C \rightarrow (A \vee B)]$

Voici l'arbre pour cette formule (comme toujours, on part de la négation de la formule).



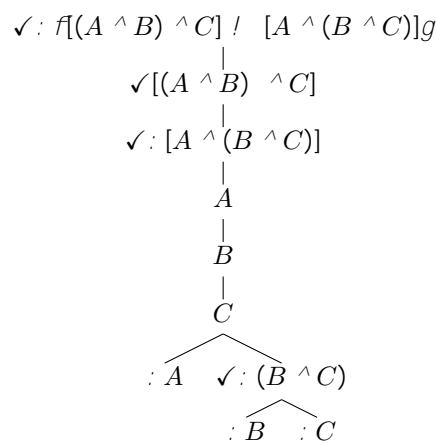
Toutes les branches de l'arbre ferment, la formule en haut de l'arbre est donc contradictoire, ce qui veut dire que la formule de départ (la formule à évaluer – sa négation) est tautologique, nécessairement vraie.

2. $(A \rightarrow C) \wedge (A \wedge C)$



Toutes les branches de l'arbre ferment, la formule en haut de l'arbre est donc contradictoire, ce qui veut dire que la formule de départ (la formule à évaluer – sa négation) est tautologique, nécessairement vraie.

3. $[(A \wedge B) \wedge C] \vdash [A \wedge (B \wedge C)]$



Toutes les branches de l'arbre ferment, la formule en haut de l'arbre est donc contradictoire, ce qui veut dire que la formule de départ (la formule à évaluer – sa négation) est tautologique, nécessairement vraie.

2 Exercices de déduction naturelle (7,5 pts)

2.1 (2,5 pts)

Vous démontrerez que l'on peut dériver $\vdash B \vdash C$ à partir des prémisses $\vdash C \vdash A$ et $\vdash A \vdash B$.

1	: C ! : A	P
2	: A ! B	P
3	: B	A
4	: C	A
5	: C ! : A	R1
6	: A	! E, 4, 5
7	: A ! B	R2
8	B	! E, 6, 7
9	: B	R3
10	: : C	: I, 4-9
11	C	: E, 10
12	: B ! C	! I, 4-10. CQFD

2.2 (2,5 pts)

Vous démontrerez que l'on peut dériver la formule : $A \$ B$ des prémisses suivantes : : $(A \wedge B)$ et $(A _ B)$.

1	: $(A \wedge B)$	P
2	$(A _ B)$	P
3	: A	A
4	$A _ B$	R2
5	B	_ E, 3, 4
6	: A ! B	! I, 3-5
7	B	A
8	A	A
9	B	R7
10	$(A \wedge B)$	\wedge I, 8, 9
11	: $(A \wedge B)$	R1
12	: A	: I, 8-11
13	$B ! : A$! I, 7-12.
14	: A \$ B	\$ I, 6, 13

2.3 (2,5 pts)

Vous démontrerez que l'on peut dériver la formule $[(A \wedge B) \rightarrow C] \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)]$ sans prémisses.

1				$[(A \wedge B) \rightarrow C]$		A
2				$(A \rightarrow B)$		A
3				A		A
4				$(A \rightarrow B)$		R2
5				B		\rightarrow E, 3, 4
6				$(A \wedge B)$		\wedge I, 3, 5
7				$(A \wedge B) \rightarrow C$		R1
8				C		\rightarrow E, 6, 7
9				$(A \rightarrow C)$		\rightarrow I, 3-8
10				$(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$		\rightarrow I, 2-9
11				$[(A \wedge B) \rightarrow C] \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)]$		\rightarrow I, 1-10. CQFD

3 Vérifonctionnalité (2 pts)

Qu'est-ce qu'un connecteur vérifonctionnel? *Question de cours.*

4 Forme normale conjonctive (3 pts)

Vous mettez la formule suivante en *forme normale conjonctive*. Que pouvez-vous en conclure?

$$[(A \wedge \neg B) \rightarrow C] \rightarrow [\neg C \rightarrow (\neg A \vee B)]$$

Mettons cette formule en FNC :

1. $[(A \wedge \neg B) \rightarrow C] \rightarrow [\neg C \rightarrow (\neg A \vee B)]$
 Équivalences entre connecteurs : $(\phi \rightarrow \psi) \equiv (\neg \phi \vee \psi)$
2. $(A \wedge \neg B \vee C) \vee (\neg C \wedge \neg A \wedge B)$
 Équivalences : $(\neg \phi \vee \psi) \equiv (\phi \wedge \neg \psi) \vee (\neg \phi \wedge \psi)$ et $(\phi \wedge \psi) \equiv \phi \wedge \psi$
3. $(\neg C \vee C \vee \neg A \vee B) \wedge (\neg C \vee \neg A \vee B) \wedge (A \vee C \vee \neg A \vee B)$
 Distributivité : $(\phi \wedge \psi) \vee \theta \equiv (\phi \vee \theta) \wedge (\psi \vee \theta)$

On trouve dans chacun des conjoints une lettre de proposition et sa négation, ce qui veut dire que chacun des conjoints est tautologique, ce qui veut dire que la conjonction elle-même est tautologique (et que notre formule de départ, qui lui est équivalente, est tout aussi tautologique).