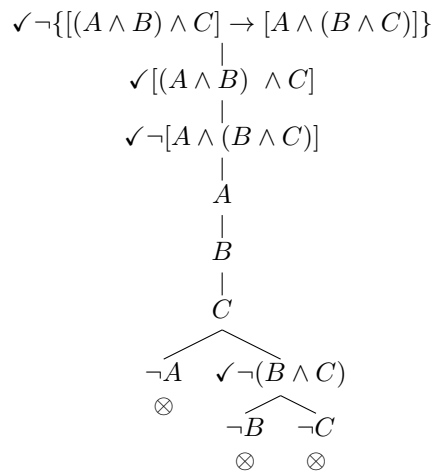


Toutes les branches de l'arbre ferment, la formule en haut de l'arbre est donc contradictoire, ce qui veut dire que la formule de départ (la formule à évaluer – sa négation) est tautologique, nécessairement vraie.

3. $[(A \wedge B) \wedge C] \rightarrow [A \wedge (B \wedge C)]$



Toutes les branches de l'arbre ferment, la formule en haut de l'arbre est donc contradictoire, ce qui veut dire que la formule de départ (la formule à évaluer – sa négation) est tautologique, nécessairement vraie.

2 Exercices de déduction naturelle (7,5 pts)

2.1 (2,5 pts)

Vous démontrerez que l'on peut dériver $\neg B \rightarrow C$ à partir des prémisses $\neg C \rightarrow \neg A$ et $\neg A \rightarrow B$.

1	$\neg C \rightarrow \neg A$	P
2	$\neg A \rightarrow B$	P
3	$\neg B$	A
4	$\neg C$	A
5	$\neg C \rightarrow \neg A$	R1
6	$\neg A$	\rightarrow E, 4, 5
7	$\neg A \rightarrow B$	R2
8	B	\rightarrow E, 6, 7
9	$\neg B$	R3
10	$\neg\neg C$	\neg I, 4-9
11	C	\neg E, 10
12	$\neg B \rightarrow C$	\rightarrow I, 4-10. CQFD

2.2 (2,5 pts)

Vous démontrerez que l'on peut dériver la formule $\neg A \leftrightarrow B$ des prémisses suivantes : $\neg(A \wedge B)$ et $(A \vee B)$.

1	$\neg(A \wedge B)$	P
2	$(A \vee B)$	P
3	$\neg A$	A
4	$A \vee B$	R2
5	B	\vee E, 3, 4
6	$\neg A \rightarrow B$	\rightarrow I, 3-5
7	B	A
8	A	A
9	B	R7
10	$(A \wedge B)$	\wedge I, 8, 9
11	$\neg(A \wedge B)$	R1
12	$\neg A$	\neg I, 8-11
13	$B \rightarrow \neg A$	\rightarrow I, 7-12.
14	$\neg A \leftrightarrow B$	\leftrightarrow I, 6, 13

2.3 (2,5 pts)

Vous démontrerez que l'on peut dériver la formule $[(A \wedge B) \rightarrow C] \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)]$ sans prémisses.

1			$[(A \wedge B) \rightarrow C]$		
2			$(A \rightarrow B)$		A
3				A	A
4				$(A \rightarrow B)$	R2
5				B	\rightarrow E, 3, 4
6				$(A \wedge B)$	\wedge I, 3, 5
7				$(A \wedge B) \rightarrow C$	R1
8				C	\rightarrow E, 6, 7
9				$(A \rightarrow C)$	\rightarrow I, 3-8
10				$(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$	\rightarrow I, 2-9
11				$[(A \wedge B) \rightarrow C] \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)]$	\rightarrow I, 1-10. CQFD

3 Vérifonctionnalité (2 pts)

Qu'est-ce qu'un connecteur vérifonctionnel? *Question de cours.*

4 Forme normale conjonctive (3 pts)

Vous mettez la formule suivante en *forme normale conjonctive*. Que pouvez-vous en conclure?

$$[(A \wedge \neg B) \rightarrow C] \rightarrow [\neg C \rightarrow (\neg A \vee B)]$$

Mettons cette formule en FNC :

1.

$$\neg[(A \wedge \neg B) \rightarrow C] \vee [\neg C \rightarrow (\neg A \vee B)]$$

Équivalences entre connecteurs : $(\phi \rightarrow \psi) \equiv (\neg\phi \vee \psi)$

2.

$$(A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (C \vee \neg A \vee B)$$

Équivalences : $\neg(\phi \rightarrow \psi) \equiv (\phi \wedge \neg\psi)$ et $(\phi \rightarrow \psi) \equiv (\neg\phi \vee \psi)$ et $\neg\neg\phi \equiv \phi$

3.

$$(\neg C \vee C \vee \neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee C \vee \neg A \vee B) \wedge (A \vee C \vee \neg A \vee B)$$

Distributivité : $(\phi \wedge \psi) \vee \theta \equiv (\psi \vee \theta) \wedge (\phi \vee \theta)$

On trouve dans chacun des conjoints une lettre de proposition et sa négation, ce qui veut dire que chacun des conjoints est tautologique, ce qui veut dire que la conjonction elle-même est tautologique (et que notre formule de départ, qui lui est équivalente, est tout aussi tautologique).