Logique modale - éléments

Première partie

Logique modale propositionnelle

Chapitre 1

Systèmes axiomatiques

1.1 Langage L pour la logique modale

1.1.1 Symboles de L

1. Un ensemble P infini dénombrable de lettres de propositions : $p_1, \dots p_n \dots$ (on utilisera en pratique les lettres p, q, r, etc.)
2. Les connecteurs propositionnels habituels : $\sim, \wedge (\vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$, introduits par df.).
3. Les opérateurs modaux : $\Box, \Diamond$ ($\Box$: nécessaire, $\Diamond$: possible).
4. Symboles impropres : (,), [,], {, }, etc.

1.1.2 Formules de L.

1. Une lettre de proposition est une formule bien formée.
2. si φ est une formule bien formée, $\sim\varphi, \Box\varphi, \Diamond\varphi$ sont des formules bien formées.
3. si φ et ψ sont des formules bien formées, $\varphi \wedge \psi$ est une formule bien formée.
4. Seules sont bien formées les formules engendrées par application des clauses 1.-3.

1.2 Caractéristiques communes à tous les systèmes axiomatiques étudiés

Depuis Gödel ("Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls", 1933), on admet que les systèmes modaux ne sont que des extensions de CP (= Calcul des

Propositions) ; on retrouve dans ces systèmes les thèses de CP ainsi que les deux règles d'inférence classique.

Les systèmes que Lewis avait élaborés dans les années 10-20 n'étaient pas dans ce cas : aucun axiome n'était une formule de CP et parmi les règles d'inférence on trouvait un MP "strict" (si $\vdash \varphi$ et $\vdash \varphi \prec \psi$ alors $\vdash \psi$ étant entendu que $\varphi \prec \psi =_{\text{df}} \Box(\varphi \Rightarrow \psi)$), mais pas la règle de Nécessitation. Il reste que l'on pouvait déduire des systèmes de Lewis les thèses de CP et établir à titre de règle dérivée le MP classique.

1.2.1 Interdéfinissabilité des opérateurs modaux

On a les définitions suivantes pour $\Box$ et $\Diamond$ [1] :

- $\Box p =_{\text{df}} \sim\Diamond \sim p$
- $\Diamond p =_{\text{df}} \sim\Box \sim p$

D'où les bi-implications suivantes qui valent comme thèses (cf. plus bas) dans tous les systèmes axiomatiques :

- $\Box p \Leftrightarrow \sim\Diamond \sim p$
- $\Diamond p \Leftrightarrow \sim\Box \sim p$, ainsi que :
- $\sim\Diamond p \Leftrightarrow \Box \sim p$
- $\sim\Box p \Leftrightarrow \Diamond \sim p$
- $\Box\Box p \Leftrightarrow \sim\Diamond \Diamond \sim p$
- $\Diamond\Diamond p \Leftrightarrow \sim\Box \Box \sim p$; etc.

1.2.2 Règles d'inférence

Tous les systèmes admettent les trois règles d'inférence suivantes :

- **Substitution** (Sub) : si, dans une thèse, on substitue uniformément une formule quelconque à une lettre de proposition, la formule résultante est une thèse.
- **Modus Ponens** (MP) : si $\varphi \Rightarrow \psi$ et φ sont des thèses, ψ est une thèse.
- **Nécessitation** (N)= si φ est une thèse, $\Box\varphi$ est une thèse.

Rappel : une déduction pour φ, dans un système de logique modale S, est une suite finie de formules de L, $\psi_1, \ldots, \psi_n$, telle que :

- $\varphi = \psi_n$

---

[1] Le jeu entre négation et opérateurs modaux est le même que celui qu'il y a entre la négation et les quantificateurs en premier ordre

- pour $1 \leq i \leq n, \psi_i$ est soit un axiome, soit est obtenue par Sub, MP ou N sur une ou deux formules d'indice $< i$.

Une formule φ pour laquelle existe une déduction dans un système de logique modale S, est appelée une *thèse* de S, ce que l'on note : $\vdash_{\mathrm{S}} \varphi$.

1.2.3 Axiomes

- On admet comme axiomes dans tous les systèmes de logique modale étudiés ici, toutes les thèses (tautologies) du calcul de CP.

- Les différents systèmes de logique modale se différencient par les axiomes modaux qu'ils incorporent. On se limitera ici aux six axiomes suivants :

  - **K** : $\Box(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\Box p \Rightarrow \Box q)$
  - **D** : $\Box p \Rightarrow \Diamond p$
  - **T** : $\Box p \Rightarrow p$
  - **4** : $\Box p \Rightarrow \Box\Box p$
  - **B** : $p \Rightarrow \Box\Diamond p$
  - **5** : $\Diamond p \Rightarrow \Box\Diamond p$

Les principaux systèmes de logique modale sont alors :

- le système K qui ne contient que **K**
- le système D qui contient **K** et **D**
- le système T qui contient **K** et **T**
- le système S4 qui contient **K**, **T** et **4**
- le système B qui contient **K**,**T** et **B**
- le système S5 qui contient **K**, **T** et **5**, ou bien **K**, **T**, **4** et **B**.

1.2.4 Règles dérivées et règle de remplacement

Dans les déductions, on utilisera les règles d'inférence dérivées des thèses de CP (tautologies) qui sont de la formes $\varphi \Rightarrow \psi$, ce qui revient à admettre que si φ est une thèse, alors ψ est une thèse. Parmi les plus fréquemment utilisées, on trouve :

- Syll. : si $\vdash \varphi \Rightarrow \psi$ et $\vdash \psi \Rightarrow \theta$ alors $\vdash \varphi \Rightarrow \theta$.
- Adj. : si $\vdash \varphi$ et $\vdash \psi$ alors $\vdash \varphi \wedge \psi$ et réciproquement.
- Contra. : si $\vdash \varphi \Rightarrow \psi$ alors $\vdash \sim\psi \Rightarrow \sim\varphi$ et réciproquement.
- Contrab. : si $\vdash \varphi \Leftrightarrow \psi$ alors $\vdash \sim\varphi \Leftrightarrow \sim\psi$ et réciproquement.
- Comp : si $\vdash \varphi \Rightarrow \psi$ et $\vdash \varphi \Rightarrow \theta$ alors $\vdash \varphi \Rightarrow (\psi \wedge \theta)$.
- Imp-exp : si $\vdash \varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \theta)$ alors $\vdash (\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \theta)$ et réciproquement.

On fera également usage du théorème de remplacement qui établit que si, dans une thèse, on remplace une sous-formule ψ par une formule ψ', telle que $\vdash \psi \Leftrightarrow \psi'$, alors la formule obtenue est également une thèse. On note la règle correspondante : *Remp* et "*Remp* dans (n)/ Contra.", par ex., indique que la formule qui remplace une sous-formule dans la formule (n) lui est équivalente par la règle dérivée "Contra".

1.3 Le système K

Ce premier système est le plus simple puisqu'il ne comporte qu'un axiome modal, à savoir l'axiome **K** (en l'honneur de **K**ripke !) : $\Box(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\Box p \Rightarrow \Box q)$.

On peut également écrire (grâce à Imp-exp) cet axiome sous la forme : $\Box[(p \Rightarrow q) \wedge \Box p] \Rightarrow \Box q$, ce qui met en évidence l'analogie avec la formule correspondant au MP en propositionnel. D'une certaine manière, si l'on accepte l'interprétation de Lewis de l'implication stricte, à savoir qu'elle code la relation d'inférence, cet axiome exprime ce qui est bien connu en CP, à savoir que d'une tautologie, on ne peut inférer qu'une tautologie. Bien entendu, cet axiome prend un sens plus large si l'on admet que peuvent être nécessaires des propositions qui ne sont pas des tautologies, ce qui est le présupposé (discutable ?) de la logique modale. Tous les systèmes que l'on étudiera incorporent cet axiome ; de tels systèmes sont dits «normaux».

1.3.1 Règles dérivées modales

– R_1 : si $\vdash_{\mathrm{K}} \varphi \Rightarrow \psi$, alors $\vdash_{\mathrm{K}} \Box\varphi \Rightarrow \Box\psi$: en effet :

$\vdash_{\mathrm{K}} \varphi \Rightarrow \psi$	(1)	supposé déjà déduit
$\vdash_{\mathrm{K}} \Box(\varphi \Rightarrow \psi)$	(2)	N sur (1)
$\vdash_{\mathrm{K}} \Box(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\Box\varphi \Rightarrow \Box\psi)$	(3)	*Sub* dans **K**
$\vdash_{\mathrm{K}} \Box\varphi \Rightarrow \Box\psi$		MP sur (2), (3)

Il n'est pas difficile de voir que si l'on suppose déjà déduit une formule de la forme $\varphi \Leftrightarrow \psi$, le schéma de déduction précédent permet avec Adj et la définition de $\Leftrightarrow$ de déduire $\Box\varphi \Leftrightarrow \Box\psi$; on a donc la règle dérivée plus forte suivante :

- R_1' : si $\vdash_{\mathrm{K}} \varphi \Leftrightarrow \psi$, alors $\vdash_{\mathrm{K}} \Box\varphi \Leftrightarrow \Box\psi$.

- R_2 : si $\vdash_{\mathrm{K}} \varphi \Rightarrow \psi$, alors $\vdash_{\mathrm{K}} \Diamond\varphi \Rightarrow \Diamond\psi$.

On déduit d'abord la thèse : $\Box(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\Diamond p \Rightarrow \Diamond q)$:

$\vdash_{\mathrm{K}} \Box({\sim} q \Rightarrow {\sim} p) \Rightarrow (\Box \sim q \Rightarrow \Box \sim p)$	(1)	*Sub* dans **K**
$\vdash_{\mathrm{K}} \Box(p \Rightarrow q) \Rightarrow ({\sim}\Box \sim p \Rightarrow {\sim}\Box \sim q)$	(2)	*Remp* dans (1)/ Contra.
$\vdash_{\mathrm{K}} \Box(\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{q}) \Rightarrow (\Diamond\mathbf{p} \Rightarrow \Diamond\mathbf{q})$		*Remp* dans (2)/ df. $\Diamond$.

On a alors :

$\vdash_{\mathrm{K}} \varphi \Rightarrow \psi$	(1)	supposé déjà déduit
$\vdash_{\mathrm{K}} \Box(\varphi \Rightarrow \psi)$	(2)	*N* sur (1)
$\vdash_{\mathrm{K}} \Box(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\Diamond\varphi \Rightarrow \Diamond\psi)$	(3)	*Sub* dans la thèse juste déduite
$\vdash_{\mathrm{K}} \Diamond\varphi \Rightarrow \Diamond\psi$,		*MP* sur (2), (3).

A titre de curiosité historique, on peut déduire, dès maintenant et très facilement dans K, la formule qui correspond à la deuxième prémisse du Dominateur ("l'impossible ne suit pas du possible")[2] et qui s'écrit :

$$\Box(p \Rightarrow q) \Rightarrow ({\sim}\Diamond q \Rightarrow {\sim}\Diamond p)$$

(i.e. si q suit de p alors si q est impossible, p l'est également[3]). On voit qu'il suffit de remplacer, dans la thèse déduite ci-dessus pour justifier la règle R_2, le conséquent de l'implication principale : $(\Diamond p \Rightarrow \Diamond q)$ par son contraposé : $({\sim}\Diamond q \Rightarrow {\sim}\Diamond p)$. De plus, il est aisé de voir que **K** est également déductible de la formule du Dominateur, supposée admise comme axiome, puisque l'on a la déduction suivante, qui, en quelque sorte, retourne la précédente :

$\vdash_{\mathrm{K}} \Box(p \Rightarrow q) \Rightarrow ({\sim}\Diamond q \Rightarrow {\sim}\Diamond p)$	(1)	Dominateur
$\vdash_{\mathrm{K}} \Box(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\Diamond p \Rightarrow \Diamond q)$	(2)	*Remp* dans (1) / Contra
$\vdash_{\mathrm{K}} \Box({\sim} q \Rightarrow {\sim} p) \Rightarrow (\Diamond \sim q \Rightarrow \Diamond \sim p)$	(3)	*Sub* dans (2)
$\vdash_{\mathrm{K}} \Box(p \Rightarrow q) \Rightarrow ({\sim}\Diamond \sim p \Rightarrow {\sim}\Diamond \sim q)$	(4)	*Remp* dans (3) / Contra × 2
$\vdash_{\mathrm{K}} \Box(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\Box p \Rightarrow \Box q)$		*Remp* dans (3) / df $\Box$

---

[2] Rappel : la première prémisse est : "Toute proposition vraie concernant le passé est nécessaire", et la troisième : "Est possible ce qui actuellement n'est pas et ne le sera pas".

[3] Si l'on contrapose cette formule cela donne : ${\sim}({\sim}\Diamond q \Rightarrow {\sim}\Diamond p) \Rightarrow {\sim}\Box(p \Rightarrow q)$, autrement dit : $({\sim}\Diamond q \wedge \Diamond p) \Rightarrow \Diamond \sim (p \Rightarrow q)$, ce qui peut se lire : si q est impossible et p possible, alors q ne suit pas logiquement de p.

On voit donc que si l'on prenait la formule du Dominateur pour axiome à la place de **K** on obtiendrait un système équivalent à K.

De manière générale, **K** affirme que si une implication est nécessaire ("stricte", au sens de Lewis, cf. plus bas, section 1.5.1, p. 16), alors :

- l'antécédent est non-nécessaire ou impossible, selon que le conséquent est lui-même non-nécessaire ou impossible respectivement, i.e.
$$\vdash_{\mathrm{K}} \Box(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim\Box q \Rightarrow\sim\Box p)$$
et
$$\vdash_{\mathrm{K}} \Box(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim\Diamond q \Rightarrow\sim\Diamond p)\,;$$

- le conséquent est nécessaire ou possible, selon que l'antécédent est nécessaire ou possible respectivement, i.e.
$$\vdash_{\mathrm{K}} \Box(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\Box p \Rightarrow \Box q)\ (\mathbf{K})$$
et
$$\vdash_{\mathrm{K}} \Box(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\Diamond p \Rightarrow \Diamond q).$$

Chacune des quatre formules correspondantes (dont **K**) pourrait être prise pour axiome ; les systèmes obtenus seraient équivalents.

1.3.2 Distributivité dans K

On peut déduire dans K les lois de distributivité $\Box/\wedge$ et $\Diamond/\vee$ ainsi que les implications pour $\Box/\vee$ et $\Diamond/\wedge$ [4].

- Distributivité $\Box/\wedge$:

---

[4] Il est facile de voir que ces thèses sont là encore les homologues de ce que l'on a en premier ordre pour les quantificateurs en relation avec $\wedge$ et $\vee$.

$\vdash_{\mathrm{K}} (p \wedge q) \Rightarrow p$ (1) Taut.
$\vdash_{\mathrm{K}} \Box(p \wedge q) \Rightarrow \Box p$ (2) R_1 sur (1)
$\vdash_{\mathrm{K}} (p \wedge q) \Rightarrow q$ (3) Taut.
$\vdash_{\mathrm{K}} \Box(p \wedge q) \Rightarrow \Box q$ (4) R_1 sur (3)
$\vdash_{\mathrm{K}} \Box(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \Rightarrow (\Box \mathbf{p} \wedge \Box \mathbf{q})$ (5) Comp. sur (2), (4).

$\vdash_{\mathrm{K}} p \Rightarrow [q \Rightarrow (p \wedge q)]$ (6) Taut.
$\vdash_{\mathrm{K}} \Box p \Rightarrow \Box[q \Rightarrow (p \wedge q)]$ (7) R_1 sur (6)
$\vdash_{\mathrm{K}} \Box[q \Rightarrow (p \wedge q)] \Rightarrow [\Box q \Rightarrow \Box(p \wedge q)]$ (8) *Sub* dans **K**
$\vdash_{\mathrm{K}} \Box p \Rightarrow [\Box q \Rightarrow \Box(p \wedge q)]$ (9) Syll. sur (7), (8)
$\vdash_{\mathrm{K}} (\Box \mathbf{p} \wedge \Box \mathbf{q}) \Rightarrow \Box(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q})$ (10) Imp-exp. sur (9)

$\vdash_{\mathrm{K}} [\Box(p \wedge q) \Rightarrow (\Box p \wedge \Box q)] \wedge [(\Box p \wedge \Box q) \Rightarrow \Box(p \wedge q)]$ (11) Adj. sur (5), (10)
$\vdash_{\mathrm{K}} \Box(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \Leftrightarrow (\Box \mathbf{p} \wedge \Box \mathbf{q})$ df. $\Leftrightarrow$ sur (11)

– Distributivité $\Diamond$ / $\vee$:

$\vdash_{\mathrm{K}} \Box(\sim p \wedge \sim q) \Leftrightarrow (\Box \sim p \wedge \Box \sim q)$ (1) *Sub* dans Distrib $\Box / \wedge$
$\vdash_{\mathrm{K}} \sim \Diamond \sim (\sim p \wedge \sim q) \Leftrightarrow (\sim \Diamond p \wedge \sim \Diamond q)$ (2) *Remp* dans (1) / df. opérateurs.
$\vdash_{\mathrm{K}} \sim \Diamond(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim \Diamond p \wedge \sim \Diamond q)$ (3) *Remp* dans (2) / de Morgan
$\vdash_{\mathrm{K}} \Diamond(p \vee q) \Leftrightarrow \sim(\sim \Diamond p \wedge \sim \Diamond q)$ (4) Contrab. sur (3)
$\vdash_{\mathrm{K}} \Diamond(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \Leftrightarrow (\Diamond \mathbf{p} \vee \Diamond \mathbf{q})$ *Remp* dans (4)/de Morgan

On peut déduire immédiatement de la distributivité $\Diamond/\vee$ la thèse :
$\Diamond(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\Box p \Rightarrow \Diamond q)$; en effet :

$\vdash_{\mathrm{K}} \Diamond(\sim p \vee q) \Leftrightarrow (\Diamond \sim p \vee \Diamond q)$ (1) *Sub* dans Distrib. $\Diamond/\vee$
$\vdash_{\mathrm{K}} \Diamond(\sim p \vee q) \Leftrightarrow (\sim \Box p \vee \Diamond q)$ (2) *Remp* dans (1)/df. $\Diamond$
$\vdash_{\mathrm{K}} \Diamond(\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{q}) \Leftrightarrow (\Box \mathbf{p} \Rightarrow \Diamond \mathbf{q})$ (2) *Remp* dans (2)/df. $\Rightarrow$

– Rapport $\Box$ / $\vee$.

On a seulement l'implication suivante : $(\Box p \vee \Box q) \Rightarrow \Box(p \vee q)$; en effet :

$\vdash_{\mathrm{K}} p \Rightarrow (p \vee q)$ (1) Taut.
$\vdash_{\mathrm{K}} \Box p \Rightarrow \Box(p \vee q)$ (2) R_1 sur (1)
$\vdash_{\mathrm{K}} q \Rightarrow (p \vee q)$ (3) Taut.
$\vdash_{\mathrm{K}} \Box q \Rightarrow \Box(p \vee q)$ (4) R_1 sur (3)
$\vdash_{\mathrm{K}} (p \Rightarrow r) \Rightarrow \{(q \Rightarrow r) \Rightarrow [(p \vee q) \Rightarrow r]\}$ (5) Taut
$\vdash_{\mathrm{K}} (\Box \mathbf{p} \vee \Box \mathbf{q}) \Rightarrow \Box(\mathbf{p} \vee \mathbf{q})$ Règle dérivée de (5) sur (2), (4).

– Rapports $\Diamond/\wedge$.

On a seulement l'implication suivante : $\Diamond(p \wedge q) \Rightarrow (\Diamond p \wedge \Diamond q)$; en effet :

$\vdash_{\mathrm{K}} (\Box \sim p \vee \Box \sim q) \Rightarrow \Box(\sim p \vee \sim q)$	(1)	*Sub* dans la thèse précédente
$\vdash_{\mathrm{K}} \sim\Box(\sim p \vee \sim q) \Rightarrow \sim(\Box \sim p \vee \Box \sim q)$	(2)	Contra. sur (1)
$\vdash_{\mathrm{K}} \Diamond \sim(\sim p \vee \sim q) \Rightarrow \sim(\sim \Diamond p \vee \sim \Diamond q)$	(3)	*Remp* dans (2) / df. opérateurs
$\vdash_{\mathrm{K}} \Diamond(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \Rightarrow (\Diamond \mathbf{p} \wedge \Diamond \mathbf{q})$		*Remp* dans (3) / de Morgan + double négation.

Ces lois de distributivité se généralisent aisément. Si l'on convient de noter $\Box^n$ une suite de n $\Box$ (même chose pour $\Diamond^n$), et $(p_1 \wedge \cdots \wedge p_m)$ une conjonction à m membres (même chose pour une disjonction), on a (pour $n, m \geqq 0$) :

- $\vdash_{\mathrm{K}} \Box^n(p_1 \wedge \cdots \wedge p_m) \Leftrightarrow (\Box^n p_1 \wedge \cdots \wedge \Box^n p_m)$
- $\vdash_{\mathrm{K}} \Diamond^n(p_1 \vee \cdots \vee p_m) \Leftrightarrow (\Diamond^n p_1 \vee \cdots \vee \Diamond^n p_m)$
- $\vdash_{\mathrm{K}} (\Box^n p_1 \vee \cdots \vee \Box^n p_m) \Rightarrow \Box^n(p_1 \vee \cdots \vee p_m)$
- $\vdash_{\mathrm{K}} \Diamond^n(p_1 \wedge \cdots \wedge p_m) \Rightarrow (\Diamond^n p_1 \wedge \cdots \wedge \Diamond^n p_m)$

On a du reste le même genre de généralisation pour l'axiome **K** et sa conséquence quasi-immédiate en terme de $\Diamond$:

- $\vdash_{\mathrm{K}} \Box^n(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\Box^n p \Rightarrow \Box^n q)$
- $\vdash_{\mathrm{K}} \Box^n(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\Diamond^n p \Rightarrow \Diamond^n q)$

1.3.3 Consistance de K.

On démontre facilement que l'on ne peut déduire dans K une formule et sa négation, i.e. on ne peut avoir à la fois, pour une formule φ, $\vdash_{\mathrm{K}} \varphi$ et $\vdash_{\mathrm{K}} \sim\varphi$.

On appelle « transformée propositionnelle » d'une formule de K, la formule obtenue en supprimant tous les opérateurs modaux qui y figurent : par ex. la transformée propositionnelle de la formule :

$$\Diamond(p \wedge q) \Rightarrow (\Diamond p \wedge \Diamond q)$$

est tout simplement la formule :

$$(p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge q)$$

On note φ' la transformée propositionnelle d'une formule φ.

On montre d'abord que toutes les transformées propositionnelles des thèses de K sont des thèses (tautologies) de CP :

- l'axiome K a pour transformée propositionnelle la formule : $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ qui est clairement tautologique ! ! !
- les règles d'inférence, appliquées à des thèses dont les transformées propositionnelles sont des thèses de CP, ne permettent de déduire que des thèses dont les transformées propositionnelles sont elles mêmes des thèses de CP. En effet :

  1. pour *Sub.* : soit φ une formule de **K**, θ une formule quelconque et ψ la formule obtenue à partir de φ par substitution de θ à une lettre de proposition p figurant dans φ. Il est aisé de se convaincre que ψ' est la même formule que celle qui aurait été obtenue à partir de φ' par substitution à p de θ'.

     Soit par ex. la formule : $(\Box p \vee \Box q) \Rightarrow \Box(p \vee q)$ dans laquelle on substitue $\Diamond(r \vee \Box s)$ à p. On obtient alors la formule :

     $$(\Box\Diamond(r \vee \Box s) \vee \Box q) \Rightarrow \Box(\Diamond(r \vee \Box s) \vee q)$$

     dont la transformée propositionnelle est

     $$((r \vee s) \vee q) \Rightarrow (r \vee s) \vee q)$$

     On obtient évidemment la même formule si l'on substitue $(r \vee s)$ (transformée prop. de $\Diamond(r \vee \Box s)$) à p dans : $(p \vee q) \Rightarrow (p \vee q)$ (transformée prop. de $(\Box p \vee \Box q) \Rightarrow \Box(p \vee q))$

     Si donc φ est une thèse de **K**, φ' est, par hypothèse, une thèse de CP et la formule ψ', étant obtenue par substitution de θ' dans φ', est également une thèse de CP.

  2. pour MP : $(\varphi \Rightarrow \psi)'$ est clairement identique à $\varphi' \Rightarrow \psi'$; alors : si $\varphi \Rightarrow \psi$ et φ sont des thèses de K, $\varphi' \Rightarrow \psi'$ et φ' sont, par hypothèse, des thèses de CP et ψ' obtenu par MP dans CP est une thèse de CP.

  3. pour N : évident, puisque la transformée prop. de $\Box\varphi$ est identique à celle de φ : puisque, par hypothèse, la seconde est une thèse de CP, la première l'est également.

Si donc on pouvait déduire dans K une formule φ et sa négation $\sim\varphi$, on pourrait déduire dans CP φ' et $\sim\varphi'$, ce que l'on sait impossible puisque CP est consistant.

K est donc consistant[5].

1.3.4 Incomplétude (syntaxique) de K

On vient de voir que toutes les transformées propositionnelles de thèses de K sont des thèses de CP. L'inverse n'est évidemment pas le cas : une formule de K dont la transformée propositionnelle est une thèse de CP n'est pas nécessairement une thèse de K. Il est clair qu'une formule comme $p \Rightarrow \Box p$ n'est pas une thèse de K (heureusement ! !), alors que sa transformée propositionnelle, $p \Rightarrow p$ est évidemment une thèse de CP. Supposons alors que l'on ajoute cette formule aux axiomes de K en formant ainsi le système $\overset{p\Rightarrow\Box p}{\text{K}}$; d'après la démonstration précédente, toutes les formules que l'on pourra déduire dans $\overset{p\Rightarrow\Box p}{\text{K}}$ auront pour transformées propositionnelles des thèses de CP. On ne pourra donc pas déduire une formule et sa négation dans $\overset{p\Rightarrow\Box p}{\text{K}}$, pour la même raison pour laquelle on ne peut déduire une formule et sa négation dans K.

$\overset{p\Rightarrow\Box p}{\text{K}}$ est donc consistant et n'est, en conséquence, pas complet au sens "syntaxique", au sens où un système d'axiomes est syntaxiquement complet ssi il devient inconsistant si l'on ajoute aux axiomes une formule qui n'est pas une thèse du système.

On verra plus tard qu'en un autre sens de "complétude" K est bien complet (ouf !).

Ces résultats valent également pour les autres systèmes de logique modale étudiés, puisque les nouveaux axiomes que l'on introduira ont tous pour transformée propositionnelle : $p \Rightarrow p$.

1.4 Le système D

Le système D est obtenu en ajoutant à K l'axiome **D** : $\Box p \Rightarrow \Diamond p$.

Cet axiome est appelé **D** comme "**D**éontique" : si l'on interprète $\Box p$ par "il est obligatoire que p" et $\Diamond p$ par "il est permis que p", cet axiome se lit : "ce qui est obligatoire est permis", ce qui semble raisonnable (?).

De **D** on déduit facilement : $\Diamond(p \Rightarrow p)$; en effet :

---

[5] Il résulte de ce qui précède que l'on ne peut avoir dans K des thèses de la forme $\Box p$ ou $\Diamond p$ puisque p n'est jamais une thèse de CP.

$\vdash_{\mathrm{D}} p \Rightarrow p$	(1)	Taut
$\vdash_{\mathrm{D}} \Box(p \Rightarrow p)$	(2)	*N* sur (1)
$\vdash_{\mathrm{D}} \Box(p \Rightarrow p) \Rightarrow \Diamond(p \Rightarrow p)$	(3)	*Sub* dans **D**
$\vdash_{\mathrm{D}} \Diamond(\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{p})$		*MP* sur (2), (3)

Mais si l'on prenait cette dernière thèse pour axiome à la place de **D**, on pourrait déduire **D** ; il suffit de se souvenir de la thèse déjà déduite dans K :
$\vdash_{\mathrm{D}} \Diamond(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\Box p \Rightarrow \Diamond q)$
et de substituer p à q. Le système obtenu serait équivalent à D.

Plus généralement, le système D permet d'avoir, pour toute thèse $\vdash_{\mathrm{D}} \varphi$, une nouvelle thèse de la forme $\vdash_{\mathrm{D}} \Diamond\varphi$, ce que ne permettait pas le système K[6].

Il suffit de passer de $\vdash_{\mathrm{D}} \varphi$ à $\vdash_{\mathrm{D}} \Box\varphi$ par N, de substituer, dans **D**, φ à p, puis d'appliquer*MP*.

1.5 Le système T

Le système T est obtenu en ajoutant à K l'axiome **T** : $\Box p \Rightarrow p$.

Ce système fut proposé par Feys en 1937 et peut-être considére comme le premier "vrai" système pour les modalités aléthiques. L'axiome **T** peut sembler très raisonnable lorsque l'on interprête les opérateurs par "nécessaire" et "possible" mais il ne l'est plus si l'on donne aux opérateurs une interprétation déontique, puisqu'il reviendrait à admettre que si p (être honnête, par ex.) est obligatoire, alors p est effectivement le cas, ce qui est malheureusement tout à fait faux (remarque empirique).

Plus philosophiquement, cet axiome peut être récusé : si l'on admet que seules sont "nécessaires" les propositions de la logique et des mathématiques, et qu'elles sont "nécessaires" précisément parce qu'elles n'affirment rien du monde (ce pourquoi elles sont soustraites au contrôle de l'expérience), il n'y a plus aucun sens à les tenir pour "vraies" puisqu'à proprement parler elles ne parlent de rien qui pourrait être le cas ; elles ne font qu'exprimer (de manière malencontreuse) des "règles de transformation"

---

[6] Si l'on avait une thèse de cette forme dans K, on pourrait déduire $\Diamond(p \Rightarrow p)$ qui n'est pas une thèse de K et est équivalent à **D** comme on vient de voir ; en effet :

$\vdash_{\mathrm{K}} \Diamond\varphi$	(1)	Thèse supposée déduite dans K
$\vdash_{\mathrm{K}} q \Rightarrow (p \Rightarrow p)$	(2)	Taut
$\vdash_{\mathrm{K}} \varphi \Rightarrow (p \Rightarrow p)$	(3)	*Sub* dans (2)
$\vdash_{\mathrm{K}} \Diamond\varphi \Rightarrow \Diamond(p \Rightarrow p)$	(4)	R_2 sur (3)
$\vdash_{\mathrm{K}} \Diamond(p \Rightarrow p)$		*MP* sur (1), (4).

intra-langagières[7].

Cet axiome n'est donc acceptable que si l'on admet qu'il puisse y avoir des vérités factuelles nécessaires, ce que toute une tradition philosophique (humienne ?) refuse ; ou bien qu'il y ait un domaine de réalités "platoniciennes" au regard duquel les propositions logiques et mathématiques sont vraies (ce que la même tradition refuse).

On déduit immédiatement de cet axiome la thèse $p \Rightarrow \Diamond p$; en effet :
$\vdash_{\mathrm{T}} \Box \sim p \Rightarrow \sim p$ (1) *Sub* dans **T**
$\vdash_{\mathrm{T}} p \Rightarrow \sim \Box \sim p$ (2) Contra. sur (1)
$\vdash_{\mathrm{T}} \mathbf{p} \Rightarrow \Diamond \mathbf{p}$ *Remp* dans (2) / df. $\Diamond$

Si l'on appelle **T**, l'*axiome de nécessité*, on peut appeler cette thèse (que l'on pourrait prendre pour axiome à la place de **T**) l'*axiome de possibilité*. Il exprime cette vieille maxime leibnizienne que tout ce qui est réel est *a fortiori* possible[8]

On montre alors facilement que **D** est déductible de **T** ; en effet :
$\vdash_{\mathrm{T}} \Box p \Rightarrow p$ (1) **T**
$\vdash_{\mathrm{T}} p \Rightarrow \Diamond p$ (2) "Ax. de possiblité"
$\vdash_{\mathrm{T}} \Box p \Rightarrow \Diamond p$ Syll. sur (1), (2)

De **T**, on tire la règle d'inférence dérivée évidente :
- R_3 : si $\vdash_{\mathrm{T}} \Box \varphi$ alors $\vdash_{\mathrm{T}} \varphi$;

1.5.1 Remarque historique.

On se souvient que C. I. Lewis avait réveillé l'intérêt pour les modalités à partir de sa critique de l'implication "matérielle" comme codant l'inférence dans les *Principia* de Whitehead et Russell. Il semblait à Lewis que si l'on interprétait ainsi l'implication "matérielle" on devrait faire face aux "paradoxes" suivants :

- une proposition fausse implique n'importe quelle proposition :
  $\vdash \sim p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
- une proposition vraie est impliquée par n'importe quelle proposition :
  $\vdash p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
- de deux propositions l'une implique l'autre ou réciproquement :
  $\vdash (p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$

---

[7] Ce qui était, par ex. la position de Wittgenstein suivi par les gens du Cercle de Vienne, dans les années trente

[8] cf. par ex. dans la lettre à Arnauld du 4/14 juillet 1686 (p. 120 de l'éd. Le Roy) : "Tout ce qui est actuel peut être conçu comme possible…".

Lewis ajoutait à ces trois lois "paradoxales", les suivantes :
$\vdash (p \wedge q) \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)$
$\vdash ({\sim} p \wedge {\sim} q) \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)$
$\vdash ({\sim} p \wedge q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

et l'ensemble des implications dont l'antécédent est la négation d'une implication :

$$\vdash {\sim}(p \Rightarrow q) \begin{cases} \Rightarrow & p \\ \Rightarrow & {\sim} q \\ \Rightarrow & p \Rightarrow {\sim} q \\ \Rightarrow & {\sim} p \Rightarrow q \\ \Rightarrow & {\sim} p \Rightarrow {\sim} q \\ \Rightarrow & q \Rightarrow p \\ \Rightarrow & q \Rightarrow {\sim} p \\ \Rightarrow & {\sim} q \Rightarrow \ p \end{cases}$$

Lewis introduisit ce qu'il appela l'implication "stricte", que l'on note : $p \prec q$ et qu'il définissait par : ${\sim}\Diamond(p \wedge {\sim} q)$ (ce qui revient donc à $\Box(p \Rightarrow q)$) ; cette implication devait être telle que " "p implique q" [soit] synonyme de "q est déductible de p" "[9]. La bi-implication stricte $p = q$ se définit classiquement par : $(p \prec q) \wedge (q \prec p)$.

Il peut être intéressant de voir comment se comporte l'implication stricte dans T.

Voilà ce que l'on obtient :

- Tout ce qui vaut de l'implication stricte vaut de l'implication matérielle dans T puisque **T** permet de passer de $\vdash \varphi \prec \psi$ (i.e. $\Box(\varphi \Rightarrow \psi)$) à $\vdash \varphi \Rightarrow \psi$, par R_3. De même, par *Sub* dans **T** puis N, on a toutes les thèses de la forme :
  $\vdash (\varphi \prec \psi) \prec (\varphi \Rightarrow \psi)$.

- L'inverse n'est évidement pas le cas puisque cela voudrait dire que l'on aurait $\vdash (\varphi \prec \psi) = (\varphi \Rightarrow \psi)$, l'implication "stricte" devenant alors strictement équivalente à l'implication "matérielle". Pour les mêmes raisons, si l'on a bien :

  $\vdash (p \prec q) \prec {\sim}(p \wedge {\sim} q)$, on n'a évidemment pas :

  $\vdash {\sim}(p \wedge {\sim} q) \prec (p \prec q))$; pas plus que l'on a :

  $\vdash (p \prec q) \vee (q \prec p)$.

- On retrouve cependant des thèses qui ressemblent un peu aux "paradoxes" de l'implication matérielle si l'on transforme l'implication matérielle principale des formules "paradoxales" en implication stricte. Par contre, les formule obtenues

---

[9] *Survey*, p. 122.

en remplaçant également les implications subordonnées en implications strictes, ne sont pas des thèses de T.

On peut résumer cela par le tableau suivant :

Formules qui sont des thèses de T	Formules qui ne sont pas des thèses de T
$\vdash \sim p \prec (p \Rightarrow q)$	$\sim p \prec (p \prec q)$
$\vdash p \prec (q \Rightarrow p)$	$p \prec (q \prec p)$
$\vdash \sim (p \Rightarrow q) \prec (p \Rightarrow \sim q)$	$\sim (p \prec q) \prec (p \prec \sim q)$
$\vdash \sim (p \Rightarrow q) \prec (\sim p \Rightarrow q)$	$\sim (p \prec q) \prec (\sim p \prec q)$
$\vdash \sim (p \Rightarrow q) \prec (\sim p \Rightarrow \sim q)$	$\sim (p \prec q) \prec (\sim p \prec \sim q)$
$\vdash \sim (p \Rightarrow q) \prec (q \Rightarrow p)$	$\sim (p \prec q) \prec (q \prec p)$
$\vdash \sim (p \Rightarrow q) \prec (q \Rightarrow \sim p)$	$\sim (p \prec q) \prec (q \prec \sim p)$

En réfléchissant un peu, on pourra se convaincre qu'il n'y a dans ce qui précède rien de paradoxal (les thèses de la colonne de gauche sont simplement obtenues par application de N aux thèses correspondantes de PC en se souvenant que $p \prec q$ est défini par $\Box(p \Rightarrow q)$).

Si les formules de droite ne sont pas des thèses, les formules suivantes, obtenues par application de R_1, de la définition de "$\prec$" et de N aux thèses correspondantes de CP, le sont :

- $\vdash \sim \Diamond p \prec (p \prec q)$
- $\vdash \Box p \prec (q \prec p)$
- $\vdash \sim \Diamond (p \Rightarrow q) \prec (p \prec \sim q)$
- $\vdash \sim \Diamond (p \Rightarrow q) \prec (\sim p \prec q)$
- $\vdash \sim \Diamond (p \Rightarrow q) \prec (\sim p \prec \sim q)$
- $\vdash \sim \Diamond (p \Rightarrow q) \prec (q \prec p)$
- $\vdash \sim \Diamond (p \Rightarrow q) \prec (q \prec \sim p)$

****

L'examen des autres systèmes, S4, B, S5, portera essentiellement sur la possibilité de "réduire" les modalités. Dans T, aucune suite d'opérateurs modaux n'est équivalente à une suite plus courte ; on a ainsi une immense variété de modalités : $\Box\Box\Diamond$ ou bien : $\Diamond\Box\Diamond$ ou encore : $\Diamond\Box\Box\Box\Box\Diamond$, etc. La seule chose que l'on a, ce sont les implications :

1. $\vdash_{\mathrm{T}} \Box\Diamond p \Rightarrow \Diamond p$ (par *Sub* dans **T** de $\Diamond p$ à p) ;

2. $\vdash_T \Box\Box p \Rightarrow \Box p$ (par *Sub* dans **T** de $\Box p$ à p) ;
3. $\vdash_T \Diamond p \Rightarrow \Diamond\Diamond p$ (par *Sub* dans l' "axiome de possibilité" de $\Diamond p$ à p) ;
4. $\vdash_T \Box p \Rightarrow \Diamond\Box p$ (par *Sub* dans l' "axiome de possibilité" de $\Box p$ à p).

L'introduction de nouveaux axiomes a pour effet de réduire le nombre de modalités, jusqu'à n'en avoir plus que quatre (si l'on ne compte pas le Vrai et le Faux parmi les modalités comme le faisaient les médiévaux) : $\Box$, $\Diamond$, $\sim\Box$ et $\sim\Diamond$, ce qui peut sembler plus raisonnable, mais ne va pas sans quelques prises de positions philosophiquement discutables.

1.6 Le système S4

Le système S4 est obtenu en ajoutant à T l'axiome **4** : $\Box p \Rightarrow \Box\Box p$.

Cet axiome exprime que ce qui est nécessaire l'est nécessairement, ce qui autorise une itération indéfinie de "nécessaire". Historiquement, cela va a l'encontre de la célèbre conception cartésienne de la création, par Dieu, des "vérités éternelles" [10], mais est en accord avec la thèse leibnizienne que ces mêmes vérités s'imposent à Dieu lui-même et donc qu'elles sont nécessairement nécessaires [11].

---

[10] Voir par ex. la fin de la lettre à Mersenne du 15 avril 1630 : "Mais je ne laisserai pas de toucher en ma physique plusieurs questions métaphysiques, et particulièrement celle-ci : Que les vérités mathématiques, lesquelles vous nommez éternelles, ont été établies par Dieu et en dépendent entièrement, aussi bien que tout le reste des créatures. C'est en effet parler de Dieu comme d'un Jupiter ou d'un Saturne, et l'assujettir au Styx et aux destinées, que de dire que ces vérités sont indépendantes de lui. [...] On vous dira que si Dieu avait établi ces vérités, il les pourrait changer comme un roi fait ses lois ; à quoi il faut répondre que oui, si sa volonté peut changer. — Mais je les comprends comme éternelles et immuables. — Et moi je juge le même de Dieu. — Mais sa volonté est libre. — Oui, mais sa puissance est incompréhensible ; et généralement nous pouvons bien assurer que Dieu peut faire tout ce que nous pouvons comprendre, mais non pas qu'il ne peut faire ce que nous ne pouvons pas comprendre ; car ce serait témérité que de penser que notre imagination a autant d'étendue que sa puissance." De la même manière, Descartes insiste dans la lettre à Arnauld du 29 juillet 1648 sur ce "...qu'on ne doit dire d'aucune chose qu'elle ne peut pas être faite par Dieu ; étant donné que toute espèce de vrai et de bien dépend de sa toute-puissance, je n'oserais même pas dire que Dieu ne peut pas faire qu'une montagne soit sans vallée, ou qu'un et deux ne fassent pas trois..."

[11] cf. par ex. *Monadologie* §46 : "Cependant, il ne faut point s'imaginer avec quelques-uns que les vérités éternelles, étant dépendantes de Dieu, sont arbitraires et dépendent de sa volonté, comme Descartes paraît l'avoir pris et puis Monsieur Poiret. Cela n'est véritable que des vérités contingentes dont le principe est la CONVENANCE ou le choix du MEILLEUR ; au lieu que les vérités éternelles dépendent uniquement de son entendement, et en sont l'objet interne." Il faut noter cependant que si ces vérités ne dépendent pas de la volonté divine, leur réalité (mais pas le fait qu'elles soient vraies) repose sur l'entendement divin : "...c'est, à mon avis, l'entendement divin qui fait la réalité

1.6.1 Lois de réduction de S4.

Préambule : on va déduire un certain nombre de thèses ayant la forme de bi-implications, qui auront pour effet de permettre de remplacer dans une formule quelconque une suite d'opérateurs par une suite plus courte en vertu de *Remp*. Ainsi par ex. si l'on a la thèse $\vdash \Box\Box p \Leftrightarrow \Box p$, on pourra remplacer dans une formule une suite de $\Box$ par un seul $\Box$.

Soit par ex. une formule comme : $p \Rightarrow (\underline{\Diamond\Box\Box\Box\Diamond\Box q} \wedge \Diamond\Box p)$. Dans la partie soulignée de cette formule, on a la sous-formule $\Box\Box\Box\Diamond\Box q$ que l'on peut considérer comme étant de la forme $\Box\Box\varphi$ et que l'on peut donc remplacer par la formule $\Box\varphi$ (c'est à dire : $\Box\Box\Diamond\Box q$) en vertu de l'équivalence ci-dessus supposée démontrée et dans laquelle on a remplacé p par $\Diamond\Box q$. On voit facilement que cette procédure peut maintenant être répétée dans la partie soulignée pour éliminer un deuxième $\Box$; on arrivera donc à la formule : $p \Rightarrow (\underline{\Diamond\Box\Diamond\Box q} \wedge \Diamond\Box p)$.

Si maintenant on a, par ex., déduit également la thèse : $\vdash \Diamond\Box\Diamond\Box p \Leftrightarrow \Diamond\Box p$, on pourra éliminer une des deux suites de $\Diamond\Box$ et obtenir en fin de compte la formule : $p \Rightarrow (\underline{\Diamond\Box q} \wedge \Diamond\Box p)$.

Il est facile de voir comment on peut faire usage de ces bi-implications.

Voilà ce que l'on peut obtenir comme bi-implications dans S4.

Si l'on conjoint l'axiome **4** à l'implication 2, p. 19, on obtient :

- LR_1 : $\vdash_{S4} \Box\Box p \Leftrightarrow \Box p$
  permettant ainsi de réduire les suites de $\Box$ à un seul.

  A partir de l'axiome **4**, par substitution de $\sim p$ à p puis Contra. et df. de $\Diamond$, on obtient :
  $\vdash_{S4} \Diamond\Diamond p \Rightarrow \Diamond p$
  ce qui avec l'implication 3, p 19, donne la thèse :
- LR_2 : $\vdash_{S4} \Diamond\Diamond p \Leftrightarrow \Diamond p$
  permettant ainsi de réduire les suites de $\Diamond$ à un seul.

  On déduit maintenant la bi-implication :

---

des vérités éternelles quoique sa volonté n'y ait point de part. Toute réalité doit être fondée dans quelque chose d'existant. [...] Mais s'il n'y avait point de Dieu il n'y aurait point d'objet de la géométrie ; et sans Dieu, non seulement il n'y aurait rien d'existant, mais il n'y aurait même rien de possible." (*Théodicée*, II, §184).

– LR_3 : $\vdash_{\mathrm{S4}} \Box\Diamond p \Leftrightarrow \Box\Diamond\Box\Diamond p$; en effet :

$\vdash_{\mathrm{S4}} \Box\Diamond p \Rightarrow \Diamond p$	(1)	*Sub* dans **T**
$\vdash_{\mathrm{S4}} \Diamond\Box\Diamond p \Rightarrow \Diamond\Diamond p$	(2)	par R_2 sur (1)
$\vdash_{\mathrm{S4}} \Diamond\Box\Diamond p \Rightarrow \Diamond p$	(3)	par la loi de réduction 2. ci-dessus sur (2)
$\vdash_{\mathrm{S4}} \Box\Diamond\Box\Diamond p \Rightarrow \Box\Diamond p$	(4)	par R_1 sur (2)
$\vdash_{\mathrm{S4}} \Box\Diamond p \Rightarrow \Diamond\Box\Diamond p$	(5)	*Sub* dans "Ax. de possiblité"
$\vdash_{\mathrm{S4}} \Box\Box\Diamond p \Rightarrow \Box\Diamond\Box\Diamond p$	(6)	par R_1sur (5)
$\vdash_{\mathrm{S4}} \Box\Diamond p \Rightarrow \Box\Diamond\Box\Diamond p$	(7)	par la loi de réduction 1. ci-dessus sur (6)
$\vdash_{\mathrm{S4}} \Box\Diamond p \Leftrightarrow \Box\Diamond\Box\Diamond p$		par Adj. sur (4), (7) et df. $\Leftrightarrow$, QED.

Enfin, par substitution de $\sim p$ à p dans LR_3. Contrab. et df. $\Diamond$ on obtient la nouvelle loi de réduction :

– LR_4 : $\vdash_{\mathrm{S4}} \Diamond\Box p \Leftrightarrow \Diamond\Box\Diamond\Box p$

1.6.2 Modalités dans S4

Il résulte des lois précédentes que, outre le Vrai et le Faux, on ne trouve plus que 6 × 2 modalités distinctes dans S4, à savoir :

1	$\Box$	$\sim\Box$	1'
2	$\Diamond$	$\sim\Diamond$	2'
3	$\Box\Diamond$	$\sim\Box\Diamond$	3'
4	$\Diamond\Box$	$\sim\Diamond\Box$	4'
5	$\Diamond\Box\Diamond$	$\sim\Diamond\Box\Diamond$	5'
6	$\Box\Diamond\Box$	$\sim\Box\Diamond\Box$	6'

On peut justifier cela de la manière suivante.

On part des deux modalités irréductibles : $\Box$ et $\Diamond$.

- si on leur préfixe le même opérateur, cela s'annule par les deux premières lois de réduction 1. et 2., ci-dessus.
- si on leur préfixe un opérateur différent, on obtient les modalités 3. et 4.
- si l'on préfixe à 3. et 4. le même opérateur que celui de gauche, cela s'annule par les lois de réduction 1. et 2. ci-dessus ;
- si l'on préfixe à 3. et 4. un opérateur différent de celui de gauche, on obtient les modalités 5. et 6.
- si l'on préfixe à 5. et 6. le même opérateur que celui de gauche, cela s'annule par les lois de réduction 1. et 2. ci-dessus ;

– si l'on préfixe à 5. et 6. un opérateur différent de celui de gauche, on en revient aux modalités 3. et 4. par les lois de réduction 3. et 4. ci-dessus.

On ne peut donc espérer découvrir de nouvelles modalités.

1.7 Le système B

Le système B est obtenu à partir de T en ajoutant l'axiome **B** : $p \Rightarrow \Box\Diamond p$.

Ce système est indépendant de S4 au sens où ni **4** n'est déductible de **B**, ni l'inverse. Il ne présente pas un intérêt particulier pour la question de la réduction des suites d'opérateurs.

Notons seulement que grâce à **B**, on a la règle d'inférence dérivée :

– R_4 : si $\vdash_{\mathrm{B}} \Diamond\varphi \Rightarrow \psi$ alors $\vdash_{\mathrm{B}} \varphi \Rightarrow \Box\psi$; en effet :

$\vdash_{\mathrm{B}} \Diamond\varphi \Rightarrow \psi$	(1)	thèse supposée déjà déduite
$\vdash_{\mathrm{B}} \Box\Diamond\varphi \Rightarrow \Box\psi$	(2)	R_1 sur (1)
$\vdash_{\mathrm{B}} \varphi \Rightarrow \Box\Diamond\varphi$	(3)	*Sub* dans **B**
$\vdash_{\mathrm{B}} \varphi \Rightarrow \Box\psi$		Syll. sur (2), (3)

1.8 Le système S5

Le système S5 est obtenu à partir de T en ajoutant l'axiome **5** : $\Diamond p \Rightarrow \Box\Diamond p$.

Ce système est *le* système de logique modale par excellence, celui qu'utilisent les philosophes d'esprit un peu métaphysicien (pas toujours de manière très correcte !) ; il est le plus proche de la conception leibnizienne des "mondes possibles", ce que l'on verra plus clairement lorsque l'on abordera la sémantique de ces systèmes. On peut cependant noter que cet axiome exprime que ce qui est possible l'est nécessairement, et fait donc pendant à l'axiome **4** qui exprime que ce qui est nécessaire l'est nécessairement. Pour Leibniz, le possible est seulement ce qui n'implique pas contradiction, ce qui relève de la pure logique et ne peut donc être dépendant de la volonté d'un dieu quelconque, ce qui fait parfois dire à Leibniz que l'entendement divin (mais pas la volonté, bien sûr) est le "pays des possibles" [12]. Ce qui est possible l'est donc de toute nécessité, et Dieu n'y peut rien.

On a, dans S5, la règle dérivée R_5, converse de la précédente (R_4), mais dont la justification est un peu plus laborieuse :

---

12. voir par ex. la lettre à Arnauld citée plus haut : "Pour appeler quelque chose de possible, ce m'est assez qu'on en puisse former une notion quand elle ne serait que dans l'entendement divin, qui est pour ainsi dire le pays des réalités possibles. Ainsi en parlant des possibles, je me contente qu'on en puisse former des propositions véritables."

– R_5 : si $\vdash_{S5} \varphi \Rightarrow \Box\psi$ alors $\vdash_{S5} \Diamond\varphi \Rightarrow \psi$; en effet :

$\vdash_{S5} \varphi \Rightarrow \Box\psi$	(1)	supposé démontré
$\vdash_{S5} \Box p \Rightarrow p$	(2)	Ax. **T**
$\vdash_{S5} \Box(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\Diamond p \Rightarrow \Diamond q)$	(3)	Diodore (cf. p. 9)
$\vdash_{S5} \Diamond p \Rightarrow \Box\Diamond p$	(4)	Ax. **5**
$\vdash_{S5} \Diamond \sim p \Rightarrow \Box\Diamond \sim p$	(5)	*Sub* dans (4)
$\vdash_{S5}\sim\Box p \Rightarrow\sim\Diamond\Box p$	(6)	*Remp* dans (5)/ df. opérateurs
$\vdash_{S5} \Diamond\Box p \Rightarrow \Box p$	(7)	Contra sur (6)
$\vdash_{S5} \Box(\varphi \Rightarrow \Box\psi)$	(8)	*N* sur (1)
$\vdash_{S5} \Box(\varphi \Rightarrow \Box\psi) \Rightarrow (\Diamond\varphi \Rightarrow \Diamond\Box\psi)$	(9)	*Sub.* dans (3)
$\vdash_{S5} \Diamond\varphi \Rightarrow \Diamond\Box\psi$	(10)	*M.P.* sur (8), (9)
$\vdash_{S5} \Diamond\Box\psi \Rightarrow \Box\psi$	(11)	*Sub.* dans (7)
$\vdash_{S5} \Diamond\varphi \Rightarrow \Box\psi$	(12)	Syll. sur (10), (11)
$\vdash_{S5} \Box\psi \Rightarrow \psi$	(13)	*Sub.* dans (2)
$\vdash_{S5} \Diamond\varphi \Rightarrow \psi$	(14)	Syll. sur (12), (13)

1.8.1 Les modalités dans S5

Dans S5, on ne trouve plus que les quatre modalités élémentaires : $\Box$, $\Diamond$, $\sim\Box$ et $\sim\Diamond$, ce que l'on va montrer.

On a vu que dans S4, il ne restait que 6 ×2 modalités distinctes, dont 4 × 2 suites alternées. Si l'on pouvait déduire **4** dans S5, il ne resterait qu'à déduire les lois de réductions :

– LR_5 : $\Diamond p \Leftrightarrow \Box\Diamond p$
– LR_6 : $\Box p \Leftrightarrow \Diamond\Box p$

pour que des suites de ce type se réduisent à l'une ou l'autre des modalités et que ne subsistent que les quatre modalités élémentaires.

Pour LR_5 :

$\vdash_{S5} \Box\Diamond p \Rightarrow \Diamond p$	(1)	*Sub* dans l'axiome **T**
$\vdash_{S5} \Diamond p \Rightarrow \Box\Diamond p$	(2)	Axiome **5**
$\vdash_{S5} \Diamond\mathbf{p} \Leftrightarrow \Box\Diamond\mathbf{p}$		Ajd. sur (1), (2), et df. $\Leftrightarrow$

Pour LR_6 :

$\vdash_{S5} \Diamond \sim p \Rightarrow \Box\Diamond \sim p$	(1)	*Sub* dans l'axiome **5**
$\vdash_{S5} \sim\Box\Diamond \sim p \Rightarrow \sim\Diamond \sim p$	(2)	Contra. sur (1)
$\vdash_{S5} \Diamond\Box p \Rightarrow \Box p$	(3)	*Remp* sur (2) / df. opérateurs
$\vdash_{S5} \Box p \Rightarrow \Diamond\Box p$	(4)	*Sub* dans l' "axiome de possibilité"
$\vdash_{S5} \Box \mathbf{p} \Leftrightarrow \Diamond\Box \mathbf{p}$	(5)	Adj. sur (3), (4) et df. $\Leftrightarrow$.

On peut alors prolonger cette déduction pour obtenir l'axiome **4** :

$\vdash_{S5} \Diamond\Box p \Leftrightarrow \Box\Diamond\Box p$	(6)	*Sub* dans LR_5. ci-dessus
$\vdash_{S5} \Box p \Rightarrow \Box\Diamond\Box p$	(7)	Syll. sur (4), (6)
$\vdash_{S5} \Box \mathbf{p} \Rightarrow \Box\Box \mathbf{p}$		*Remp* dans (7) / LR_6, ce qui revient à remplacer la sous-formule du conséquent :$\Diamond\Box p$, par $\Box p$.

Il résulte de ce qui précède, d'une part que S4 est un sous-système de S5 : tout ce qui est déductible dans S4 l'est dans S5 ; et d'autre part que des 6 × 2 modalités de S4, il n'en reste plus que 2 ×2 puisque toutes les suites "$\Box\Diamond$" se réduisent à "$\Diamond$" en vertu de LR_5. et toutes les suites "$\Diamond\Box$" se réduisent à "$\Box$", en vertu de LR_6. Ainsi disparaissent les modalité 3-3', 4-4', 5-5', 6-6' de S4. Il ne reste donc que $\Box$, $\sim\Box$, $\Diamond$ et $\sim\Diamond$.

1.8.2 Equivalence des systèmes S5 et KT4B

On peut enfin remarquer que l'axiome **B** est immédiatement déductible des axiomes **T** et **5** puisque l'on a :

$\vdash_{S5} p \Rightarrow \Diamond p$	(1)	"axiome de possibilité"
$\vdash_{S5} \Diamond p \Rightarrow \Box\Diamond p$	(2)	Axiome **5**
$\vdash_{S5} p \Rightarrow \Box\Diamond p$		Syll. sur (1), (2).

Il en résulte que le système B est également un sous-système de S5.

D'un autre côté, si l'on ajoute au système T les axiomes **B** et **4** (ce qui donne le système **KT4B**), on a une déduction pour l'axiome **5** ; en effet :

$\vdash_{\mathbf{KT4B}} \Diamond p \Rightarrow \Box\Diamond\Diamond p$	(1)	*Sub* dans l'axiome **B**
$\vdash_{\mathbf{KT4B}} \Diamond p \Rightarrow \Box\Diamond p$		réduction de la suite $\Diamond\Diamond$ dans (1) en vertu de LR_2 (déduite dans S4).

En conséquence, les systèmes S5 = **KT5**, et **KT4B**, sont équivalents.

Les relations entre les différents systèmes peuvent être ainsi figurées :

$$\begin{tikzcd}
 & & & \mathrm{S4} \arrow[dr] & \\
\mathrm{K} \arrow[r] & \mathrm{D} \arrow[r] & \mathrm{T} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathrm{S5} \\
 & & & \mathrm{B} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

La flèche "$\longrightarrow$" signifie que le système de gauche est inclus dans celui de droite, au sens, donc, où toutes les thèses du système de gauche sont des thèses du système de droite ; par ex ; si $\vdash_{\mathrm{T}} \varphi$ alors $\vdash_{\mathrm{S4}} \varphi$, etc. Cette relation est transitive. On remarquera qu'il n'y a pas de flèche reliant S4 et B.

Chapitre 2

La sémantique des "mondes possibles"

2.1 Remarques introductives

En logique des propositions standard, on se donne une interprétation des lettres de propositions et on calcule la valeur de vérité de la formule toute entière (= une ligne d'une table de vérité). On peut considérer métaphoriquement que chaque interprétation correspond à un "monde possible". Pour déterminer si une formule est vraie dans un "monde possible", nous n'avons à prendre en compte que la valeur de vérité des "propositions élémentaires" dans ce même monde ; la vérité ou la fausseté de la formule en question dans ce monde, ne dépend pas de ce qui est le cas dans les autres mondes (sur les autres lignes de la table de vérité).

Il n'en est pas de même si nous voulons déterminer si une formule φ est "neutre", tautologique ou contradictoire : à ce moment, il faut prendre en considération ce qui se passe dans tous les autres mondes ; et comme il est possible de faire le tour de tous les mondes (de toutes les interprétations possibles des lettres de propositions figurant dans φ), puisqu'ils sont en nombre fini, il est également possible de déterminer si φ est vraie pour au moins une (mais pas toute), pour toute ou pour aucune interprétation, et donc si elle est "neutre", tautologique ou contradictoire.

En reprenant une idée attribuée à Leibniz, on peut transcrire ce qui précède en disant qu'une formule qui est vraie dans tous les "mondes possibles" est *nécessairement vraie*, alors qu'une formule qui n'est vraie dans aucun "monde possible", est *contradictoire*, etc. Il y a deux composantes dans cette idée :

1. Pour établir qu'une proposition est nécessairement vraie, il ne suffit pas d'éta-

blir qu'elle est vraie dans un monde, car rien n'interdit qu'elle soit fausse dans un autre monde ; de la même manière, pour établir qu'une proposition est nécessairement fausse (contradictoire) dans un monde il ne suffit pas d'établir qu'elle est fausse dans un monde car rien n'interdit qu'elle soit vraie dans un autre monde. Autrement dit : il ne suffit pas de "connaître" la valeur de vérité, dans un monde, des propositions élémentaires qui figurent dans une proposition "moléculaire" de la forme "il est nécessaire que φ", ou "il est possible que φ" pour pouvoir établir qu'elle est vraie ou fausse dans ce même monde.

Il s'agit là d'une manière d'exprimer nos "intuitions" modales : si φ est vraie, alors φ est certainement "possible" ("possiblement vraie") mais si φ est simplement fausse, il ne s'ensuit pas que φ soit impossible : il est faux que Jospin soit Président de la République, mais on ne voit pas que cela soit impossible.

De la même manière, si φ est fausse alors φ est certainement non-nécessaire mais si φ est vraie, il ne s'ensuit pas que φ soit nécessaire : il est vrai que Sarkozy est Président de la République, mais on ne voit pas que cela soit nécessaire. Seul un fataliste extrémiste, dira-t-on, pourrait récuser ces points.

Les opérateurs modaux ne sont donc pas "vérifonctionnels" au sens ou les connecteurs propositionnel le sont ; mais la manière "leibnizienne" de présenter les choses permet de minorer la difficulté puisque dans chacun des mondes possibles, on peut admettre que les formules s'évaluent comme en propositionnelle standard.

2. Le deuxième point est plus délicat. Admettre sans plus de précisions, qu'une proposition est nécessaire si elle est vraie *simpliciter* dans tous les mondes possibles, c'est considérer que le vocabulaire modal n'est qu'une "façon de parler" sans réelle portée : il s'agit seulement d'une autre manière de dire qu'une formule est vraie pour toute interprétation (que c'est une "vérité logique", etc.), ou qu'elle n'est vraie pour aucune interprétation etc., ce qui seul importe. On réduit ainsi le nécessaire / contradictoire au logiquement vrai /faux. Mais cela suppose que l'on adopte un point de vue "divin" (ou jupitérien) à partir duquel on peut "voir" tous les "mondes possibles" ; certes, nous sommes en mesure de prendre un tel point de vue en logique propositionnelle, puisqu'il n'y a, en vertu d'un certain nombre de principes admis (en particulier celui de l'indépendance des propositions élémentaires), qu'un nombre fini de mondes possibles "à explorer".

Toutefois, cela ne va sans doute pas de soi : nous sommes situés dans un monde (disons le monde "actuel", si tant est que nous puissions prouver qu'il est bien actuel...) et c'est dans ce monde, avec les ressources qui sont les nôtres, que nous avons à établir qu'une proposition est, ou non, nécessaire (contradictoire, etc.). En termes de "mondes possibles" cela signifie que, peut-être, seuls certains mondes possibles nous sont envisageables : par ex. il est probable que nos ancêtres cromagnonesques, ne pouvaient "imaginer" que nous pourrions communiquer à grande distance quasi instantanément (via une ligne téléphonique, par ex.). Pour eux, donc, du point de vue de leur monde, notre monde n'est pas possible.

De manière plus générale, on ne voit pas qu'il soit "logiquement nécessaire" (!!) qu'un monde puisse avoir accès à tous les mondes et il convient donc de ménager la possibilité (!!) que lorsque l'on évalue, dans un monde, une formule de la forme "il est nécessaire que φ", ne soient "accessibles", de ce monde, que certains mondes mais pas d'autres. C'est ainsi que l'on peut éviter de confondre purement et simplement le nécessaire et le logiquement vrai, ou le possible et le logiquement non-contradictoire.

On peut mettre en forme les considérations précédentes, en spécifiant les trois données qui permettront d'évaluer une formule "modale" dans un monde :

1. quels mondes il y a, autrement dit, il faut se donner un ensemble M de "mondes".
2. quels mondes chaque monde peut "voir", i.e. les mondes qui sont accessibles à partir de chaque monde.
3. quelle valeur de vérité prennent les lettres de proposition dans chacun de ces mondes.

En d'autres termes, il nous faut la donnée d'un ensemble de mondes M, d'une relation R (dite d'"accessibilité") définie sur l'ensemble des mondes, et enfin d'une fonction d'interprétation i qui attribue une valeur de vérité aux lettres de proposition dans chacun des mondes. Ces trois données spécifient ce que l'on appellera un "modèle".

Avant de fournir une définition précise d'un modèle et de fournir les règles d'évaluation des formules, prenons un exemple informel.

Soit la formule : $\Box(p \vee q) \Rightarrow (\Box p \vee \Box q)$.

On considère un ensemble M de trois mondes : m_0, m_1, m_2, en convenant que : m_0 peut "voir" m_1, m_1 peut "voir" m_2, et que chacun de ces trois mondes peut se "voir" lui-même. Dans m_0, p et q sont vraies, dans m_1, p est fausse et q est vraie, et dans m_2, p et q sont fausses.

Dans m_0, $p \vee q$ est vraie, ainsi que dans m_1 mais pas dans m_2. Puisque de m_0, on ne voit que m_0 et m_1, on a donc : $\Box(p \vee q)$ vraie dans m_0. Dans m_1, on ne voit que $m_1$et m_2, et donc : $\Box(p \vee q)$ est fausse dans m_1. Enfin dans m_2, $\Box(p \vee q)$ est évidemment fausse.

Premier résultat : $\Box(p \vee q)$ est vraie dans m_0, fausse dans m_1 et m_2.

On en tire tout de suite que la formule toute entière est vraie dans ces deux derniers mondes. Qu'en est-il dans m_0 ?

p est vraie dans m_0 et fausse dans m_1 ; or de m_0, on “voit” m_1 et donc $\Box p$ est fausse dans m_0.

q est vraie dans m_0 et dans m_1 ; or on ne “voit” que m_0 et m_1 de m_0 et donc $\Box q$ est vraie dans m_0. Au bout du compte, donc, $\Box p \vee \Box q$ est vraie dans m_0 et donc la formule tout entière l'est également dans m_0.

Comme elle l'était également dans m_1 et m_2, elle est donc "valide" dans ce “modèle”, i.e. elle est vraie dans tous les mondes du "modèle".

Si, par contre, on avait eu les mêmes trois mondes mais avec dans m_2, p vraie et q fausse et une relation réflexive et telle que seul m_0 “voit” les deux autres mondes, alors la formule n'est plus valide dans ce modèle.

En effet : dans m_0, $p \vee q$ est vraie, tout comme dans les deux autres mondes, et donc $\Box(p \vee q)$ est vraie dans m_0. Dans m_0 toujours, p est vraie, mais p est fausse en m_1, et donc $\Box p$ est fausse en m_0. Même chose pour $\Box q$ et donc : $\Box p \vee \Box q$ est fause en m_0 et donc la formule tout entière est fausse en m_0. Elle n'est donc pas valide dans ce modèle.

2.2 Modèle et évaluation des formules

Un modèle $\mathcal{M}$ est un triplet : $< M, R, i >$, tel que :

- M est un ensemble de mondes,
- R est une relation à deux places définie sur M,
- $i : P \rightarrow \wp(M)$, est une fonction (interprétation) qui associe à chaque lettre de proposition de l'ensemble P, le sous-ensemble (de M) des mondes dans lesquels cette lettre de proposition est vraie ; $i(p)$ désigne donc l'ensemble des mondes dans lesquels p est vraie.

On définit récursivement “φ est vraie dans le monde m_i du modèle $\mathcal{M}$”, ce que l'on note : $\mathcal{M} \vDash_{m_i} \varphi$ ($\mathcal{M} \nvDash_{m_i} \varphi$: φ est fausse dans le monde m_i du modèle $\mathcal{M}$), par :

1. si φ est la lettre de proposition p, $\mathcal{M} \vDash_{m_i} \varphi$ ssi $m_i \in i(p)$.
2. si φ est de la forme $\sim \psi$, $\mathcal{M} \vDash_{m_i} \varphi$ ssi $\mathcal{M} \nvDash_{m_i} \psi$.
3. si φ est de la forme $\psi \wedge \theta$, $\mathcal{M} \vDash_{m_i} \varphi$ ssi $\mathcal{M} \vDash_{m_i} \psi$ et $\mathcal{M} \vDash_{m_i} \theta$.
4. si φ est de la forme $\Box\psi$, $\mathcal{M} \vDash_{m_i} \varphi$ ssi pour tout m_j tel que m_iRm_j, $\mathcal{M} \vDash_{m_j} \psi$.
5. si φ est de la forme $\Diamond\psi$, $\mathcal{M} \vDash_{m_i} \varphi$ ssi il existe au moins un monde m_j tel que m_iRm_j et $\mathcal{M} \vDash_{m_j} \psi$.

Remarque : si, d'un monde m_i, aucun monde, pas même m_i lui-même, n'est accessible (on dit en ce cas que m_i est un “cul de sac”), la règle 4. conduit à admettre que pour une formule φ quelconque, $\mathcal{M} \vDash_{m_i} \Box\varphi$, et la règle 5 que $\mathcal{M} \nvDash_{m_i} \Diamond\varphi$.

En effet, par contraposition, la règle 4 s'énonce :

4'. : si φ est de la forme $\Box\psi$, $\mathcal{M} \nvDash_{m_i} \Box\varphi$ ssi il existe au moins un monde m_j tel que m_iRm_j et $\mathcal{M} \nvDash_{m_j} \psi$.

Il en résulte que si m_i est un "cul de sac", m_i ne voit aucun monde et donc en particulier aucune monde m_j tel que $\mathcal{M} \nvDash_{m_j} \psi$; d'où : quelle que soit φ, $\Box\varphi$ ne peut être fausse dans m_i.

De la même manière, puisque m_i ne voit aucun monde, m_i ne voit aucun monde m_j tel que $\mathcal{M} \vDash_{m_j} \psi$; d'où : quelle que soit φ, $\Diamond\varphi$ ne peut être vraie dans m_i.

Autrement dit, dans un cul de sac, tout est nécessaire et rien n'est possible !

2.2.1 Exemples d'évaluation

On peut présenter les deux exemples ci-dessus sous forme de tableau.

1. Soit $\mathcal{M}_1 =< M, R, i >$ tel que :

   $M : \{m_0, m_1, m_2\}$,
   $R : \{< m_0, m_0 >, < m_0, m_1 >, < m_1, m_1 >, < m_1, m_2 >, < m_2, m_2 >\}$,
   $i(p) = \{m_0\}$, $i(q) = \{m_0, m_1\}$.

   Tableau pour $\Box(p \vee q) \Rightarrow (\Box p \vee \Box q)$:

	p	q	$\Box p$	$\Box q$	$p \vee q$	$\Box(p \vee q)$	$\Box p \vee \Box q$	$\Box(p \vee q) \Rightarrow (\Box p \vee \Box q)$
m_0	V	V	F	V	V	V	V	V
m_1	F	V	F	F	V	F	F	V
m_2	F	F	F	F	F	F	F	V

$\Box(p \vee q) \Rightarrow (\Box p \vee \Box q)$ est donc valide dans $\mathcal{M}_1$

2. Soit $\mathcal{M}_2 =< M, R, i >$ tel que :

   $M : \{m_0, m_1, m_2\}$,
   $R : \{< m_0, m_0 >, < m_0, m_1 >, < m_0, m_2 >, < m_1, m_1 >, < m_2, m_2 >\}$,
   $i(p) = \{m_0, m_2\}, \quad i(q) = \{m_0, m_1\}$.

   Tableau pour $\Box(p \vee q) \Rightarrow (\Box p \vee \Box q)$:

	p	q	$\Box p$	$\Box q$	$p \vee q$	$\Box(p \vee q)$	$\Box p \vee \Box q$	$\Box(p \vee q) \Rightarrow (\Box p \vee \Box q)$
m_0	V	V	F	F	V	V	F	F
m_1	F	V	F	V	V	V	V	V
m_2	V	F	V	F	V	V	V	V

   $\Box(p \vee q) \Rightarrow (\Box p \vee \Box q)$ n'est donc pas valide dans $\mathcal{M}_2$.

   Par contre, on voit aisément que la réciproque : $(\Box p \vee \Box q) \Rightarrow \Box(p \vee q)$, est valide dans ce même modèle.

3. Soit $\mathcal{M}_3 =< M, R, i >$ tel que :

   $M : \{m_0, m_1, m_2\}$,
   $R : \{< m_0, m_0 >, < m_0, m_1 >, < m_0, m_2 >, < m_1, m_1 >, < m_2, m_2 >\}$,
   $i(p) = \{m_0, m_2\}, \quad i(q) = \{m_1\}$.

   Tableau pour $(\Diamond p \wedge \Diamond q) \Rightarrow \Diamond(p \wedge q)$:

	p	q	$\Diamond p$	$\Diamond q$	$p \wedge q$	$\Diamond p \wedge \Diamond q$	$\Diamond(p \wedge q)$	$(\Diamond p \wedge \Diamond q) \Rightarrow \Diamond(p \wedge q)$
m_0	V	F	V	V	F	V	F	F
m_1	F	V	F	V	F	F	F	V
m_2	V	F	V	F	F	F	F	V

4. On peut illustrer la bizarrerie introduite par les mondes “culs de sac” par la formule dite “de Grzegorczyk” : $\Box[\Box(p \Rightarrow \Box p) \Rightarrow p] \Rightarrow p$.

   Soit $\mathcal{M}_4$ avec : $M = \{m_1\}$, $R = \varnothing$ et $i(p) = \varnothing$.
   Dans ce modèle cette formule n’est pas valide : elle est fausse dans l’unique monde m_1, puisque dans m_1, p est faux et comme m_1 est un cul de sac, l’antécédent de la forme $\Box\varphi$ y est vrai ; le tout est donc faux.

2.2.2 Modèles, cadres et validité

On définit la validité d’une formule φ dans un modèle $\mathcal{M}$ par :
- φ est valide dans $\mathcal{M}$ ssi φ est vraie dans tous les mondes appartenant à M ; ce que l’on note : $\mathcal{M} \vDash \varphi$.
La définition peut ainsi s’écrire : $\mathcal{M} \vDash \varphi$ ssi pour tout $m_i \in M$, $\mathcal{M} \vDash_{m_i} \varphi$

Un ensemble de mondes étant donné, ainsi qu’une relation d’accessibilité sur cet ensemble, il y a autant de modèles différents que de fonctions d’interprétation i. On appelle "cadre" une paire $F =< M, R >$, avec M, ensemble de mondes et R, relation d’accessibilité sur M, et on dit qu’un modèle est *fondé* sur $F =< M, R >$ s’il est de la forme $< M, R, i >$. On peut alors définir la validité d’une formule φ dans un cadre F par :

- φ est valide dans F ssi φ est valide dans tous les modèles fondés sur F ; ce que l’on note : $F \vDash \varphi$.

On peut cependant aller plus avant en généralité et considérer des classes de cadres. En particulier, on peut définir une classe de cadres par la , ou les, propriété(s) formelle(s) de R : la classe des cadres réflexifs est par ex. la classe des cadres dont la relation d’accessibilité R est réflexive, aussi différents que soient par ailleurs les ensembles M des mondes de ces cadres, ainsi que les autres caractéristiques de R. Même chose pour la transitivité, la symétrie, etc. On verra dans un instant l’intérêt de ces notions. On définit alors la validité d’une formule φ dans une classe de cadres $\mathcal{C}$ par :

- φ est valide dans $\mathcal{C}$ ssi φ est valide dans tous les cadres $F \in \mathcal{C}$; ce que l’on note : $\mathcal{C} \vDash \varphi$.

On a ainsi trois niveaux de validité : (1) validité dans un modèle, (2) validité dans un cadre, et (3) validité dans une classe de cadres.

Systèmes de logique modale et classes de cadres

Une des grandes avancées permises par la sémantique des mondes possibles est la caractérisation des différents systèmes de logique modale par les propriétés formelles de la relation d'accessibilité des modèles dans lesquelles les thèses de ces systèmes sont valides. Ce qui revient à caractériser les systèmes de logique modale par les classes de cadres dans lesquelles les thèses de ces systèmes sont valides, ce qui donne :

- φ est une thèse de K ssi φ est valide dans la classe des cadres quelconques.
- φ est une thèse de D ssi φ est valide dans la classe des cadres sériels [1].
- φ est une thèse de T ssi φ est valide dans la classe des cadres réflexifs.
- φ est une thèse de S4 ssi φ est valide dans la classe des cadres réflexifs et transitifs.
- φ est une thèse de B ssi φ est valide dans la classe des cadres réflexifs et symétriques.
- φ est une thèse de S5 ssi φ est valide dans la classe des cadres réflexifs, symétriques et transitifs.

On verra plus loin comment démontrer le sens "$\leftarrow$" des "ssi" précédents (complétude). On se contentera pour l'instant de démontrer le sens "$\rightarrow$", autrement dit, de démontrer la consistance (correction) des différents systèmes d'axiomes relativement à certaines classes de cadres.

---

[1] Rappel : une relation est sérielle si elle satisfait la formule : $\forall x \exists y\ xRy$.

2.2.3 Consistance des différents systèmes d'axiomes pour la logique modale.

Classiquement, on montre d'abord que les différents axiomes sont valides dans telle ou telle classe de cadres, puis on montre que les règle d'inférence, *Sub*, *MP* et *N* préserve la validité.

1. Les différents axiomes sont valides dans certaines classes de cadres.

   - L'Ax.**K** est valide dans la classe des cadres quelconques ; autrement dit : si $F = \langle M, R\rangle$ est un cadre quelconque, alors $F \vDash \Box(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\Box p \Rightarrow \Box q)$

     Supposons que $F = \langle M, R\rangle$ soit un cadre quelconque, mais que $F \nvDash \Box(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\Box p \Rightarrow \Box q)$. Alors il existe un modèle $\mathcal{M} = \langle M, R, i\rangle$ fondé sur F et un monde $m_i \in M$, tels que $\mathcal{M} \nvDash_{m_i} \Box(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\Box p \Rightarrow \Box q)$; ce qui signifie que l'on a : $\mathcal{M} \vDash_{m_i} \Box(p \Rightarrow q)$ et $\mathcal{M} \nvDash_{m_i} \Box p \Rightarrow \Box q$, et cela signifie à son tour que l'on a : $\mathcal{M} \vDash_{m_i} \Box p$ et $\mathcal{M} \nvDash_{m_i} \Box q$.
     Donc il existe un monde m_j tel que $m_i R m_j$ et $\boxed{\mathcal{M} \nvDash_{m_j} q}$; et comme $\mathcal{M} \vDash_{m_i} \Box p$, on a : $\boxed{\mathcal{M} \vDash_{m_j} p}$.
     De plus, comme $\mathcal{M} \vDash_{m_i} \Box(p \Rightarrow q)$, on a : $\mathcal{M} \vDash_{m_j} p \Rightarrow q$ et donc $\boxed{\mathcal{M} \nvDash_{m_j} p}$ ou $\boxed{\mathcal{M} \vDash_{m_j} q}$, ce qui contredit ce qui précède.

   - L'Ax. **D** est valide dans la classe des cadres sériels ; autrement dit : si $F = \langle M, R\rangle$ est un cadre sériel, alors $F \vDash \Box p \Rightarrow \Diamond p$.

     On démontre la contraposée : quel que soit F, si $F \nvDash \Box p \Rightarrow \Diamond p$ alors F n'est pas sériel. En effet :
     puisque $F \nvDash \Box p \Rightarrow \Diamond p$, alors il existe un modèle $\mathcal{M} = \langle M, R, i\rangle$ fondé sur F et un monde $m_i \in M$ tels que $\mathcal{M} \nvDash_{m_i} \Box p \Rightarrow \Diamond p$; ce qui signifie que l'on a : $\mathcal{M} \vDash_{m_i} \Box p$ et $\mathcal{M} \nvDash_{m_i} \Diamond p$.
     Comme $\mathcal{M} \vDash_{m_i} \Box p$, m_i ne "voit" aucun monde dans lequel p est faux, et comme $\mathcal{M} \nvDash_{m_i} \Diamond p$, m_i ne "voit" aucun monde dans lequel p est vrai. Donc m_i ne voit aucun monde et R n'est pas sérielle, pas plus que F[2].

---

[2] Autre formulation, peut-être plus intuitive :
Supposons que $F = \langle M, R\rangle$ soit un cadre sériel, mais que $F \nvDash \Box p \Rightarrow \Diamond p$. Alors il existe un

La réciproque, si $F \models \Box p \Rightarrow \Diamond p$ alors F est sériel, vaut également : supposons que F ne soit pas sériel ; alors il existe un modèle $\mathcal{M} = \langle M, R, i \rangle$ fondé sur F et un monde $m_i \in M$, tels que, pour tout monde $m_j \in M$, il n'est pas le cas que $m_i R m_j$. m_i est donc un "cul de sac", et on sait (cf. plus haut section 2.2) que dans un cul de sac tout est nécessaire et rien n'est possible, d'où : $\mathcal{M} \not\models_{m_i} \Box p \Rightarrow \Diamond p$.

- L'Ax. **T** est valide dans la classe des cadres réflexifs ; autrement dit : si $F = \langle M, R \rangle$ est un cadre réflexif, alors $F \models \Box p \Rightarrow p$.

  On démontre la contraposée : quel que soit F, si $F \not\models \Box p \Rightarrow p$ alors F n'est pas réflexif. En effet :
  puisque $F \not\models \Box p \Rightarrow p$, alors il existe un modèle $\mathcal{M} = \langle M, R, i \rangle$ fondé sur F et un monde $m_i \in M$, tels que $\mathcal{M} \not\models_{m_i} \Box p \Rightarrow p$; ce qui signifie que l'on a : $\mathcal{M} \models_{m_i} \Box p$ et $\mathcal{M} \not\models_{m_i} p$.
  Comme $\mathcal{M} \models_{m_i} \Box p$, m_i ne "voit" aucun monde dans lequel p est faux. Or $\mathcal{M} \not\models_{m_i} p$, donc m_i ne "voit" pas m_i. R n'est donc pas réflexive, pas plus que F[3].

  La réciproque, si $F \models \Box p \Rightarrow p$ alors F est réflexif, vaut également : supposons que F ne soit pas réflexif ; alors il existe un modèle $\mathcal{M} = \langle M, R, i \rangle$ et un monde $m_i \in M$, tel qu'il n'est pas le cas que $m_i R m_i$. On définit $i(p)$ par $i(p) = M - \{m_i\}$ (autrement dit p est vrai dans tous les mondes de M sauf m_i). Dans ce cas, on a : $\mathcal{M} \models_{m_i} \Box p$ et $\mathcal{M} \not\models_{m_i} p$, d'où $\mathcal{M} \not\models_{m_i} \Box p \Rightarrow p$.

---

modèle $\mathcal{M} = \langle M, R, i \rangle$ fondé sur F et un monde $m_i \in M$, tels que $\mathcal{M} \not\models_{m_i} \Box p \Rightarrow \Diamond p$; ce qui signifie que l'on a : $\mathcal{M} \models_{m_i} \Box p$ et $\mathcal{M} \not\models_{m_i} \Diamond p$. Comme F est sériel, il existe $m_j \in M$ tel que $m_i R m_j$ et comme $\mathcal{M} \models_{m_i} \Box p$, $\underline{\mathcal{M} \models_{m_j} p}$. Mais comme $\mathcal{M} \not\models_{m_i} \Diamond p$, $\underline{\mathcal{M} \not\models_{m_j} p}$; d'où contradiction.

[3] Autre formulation, peut-être plus intuitive :

Supposons que $F = \langle M, R \rangle$ soit un cadre réflexif, mais que $F \not\models \Box p \Rightarrow p$. Alors il existe un modèle $\mathcal{M} = \langle M, R, i \rangle$ fondé sur F et un monde $m_i \in M$, tels que $\mathcal{M} \not\models_{m_i} \Box p \Rightarrow p$; ce qui signifie que l'on a : $\mathcal{M} \models_{m_i} \Box p$ et $\underline{\mathcal{M} \not\models_{m_i} p}$. Mais comme F est réflexif, $m_i R m_i$ et comme $\mathcal{M} \models_{m_i} \Box p$, on a : $\underline{\mathcal{M} \models_{m_i} p}$; d'où contradiction.

- L'Ax. **4** est valide dans la classe des cadres transitifs ; autrement dit : si $F = \langle M, R \rangle$ est un cadre transitif, alors $F \vDash \Box p \Rightarrow \Box\Box p$.

  On démontre la contraposée : quel que soit F, si $F \nvDash \Box p \Rightarrow \Box\Box p$, alors F n'est pas transitif. En effet :
  puisque $F \nvDash \Box p \Rightarrow \Box\Box p$, il existe un modèle $\mathcal{M} = \langle M, R, i \rangle$ fondé sur F et un monde $m_i \in M$, tels que $\mathcal{M} \nvDash_{m_i} \Box p \Rightarrow \Box\Box p$. Ce qui signifie que l'on a $\mathcal{M} \vDash_{m_i} \Box p$ et $\mathcal{M} \nvDash_{m_i} \Box\Box p$. Puisque $\mathcal{M} \nvDash_{m_i} \Box\Box p$, il existe un monde m_j, tel que $m_i R m_j$ et $\mathcal{M} \nvDash_{m_j} \Box p$, ce qui à son tour signifie qu'il existe un monde m_k, tel que $m_j R m_k$ et $\mathcal{M} \nvDash_{m_k} p$.
  Comme $M \vDash_{m_i} \Box p$, m_i ne "voit" aucun monde dans lequel p est faux, et donc il n'est pas le cas que $m_i R m_k$. On a donc : $m_i R m_j$ et $m_j R m_k$, mais pas $m_i R m_k$; R n'est donc pas transitive, pas plus que F[4].

  > La réciproque, si $F \vDash \Box p \Rightarrow \Box\Box p$ alors F est transitif, vaut également : supposons que F ne soit pas transitif ; alors il existe un modèle $\mathcal{M} = \langle M, R, i \rangle$ fondé sur F et trois mondes $m_i, m_j, m_k \in M$, tels que : $m_i R m_j$ et $m_j R m_k$ mais pas : $m_i R m_k$.
  >
  > On définit $i(p)$ par $i(p) = M - \{m_k\}$ (autrement dit p est vrai dans tous les mondes sauf m_k). Dans ce cas, on a : $\underline{\mathcal{M} \vDash_{m_i} \Box p}$ (puisque m_i ne "voit" pas m_k, seul monde de M dans lequel p est faux) et $\mathcal{M} \nvDash_{m_j} \Box p$ (puisque $\mathcal{M} \nvDash_{m_k} p$ et $m_j R m_k$). Or $m_i R m_j$ et donc $\underline{\mathcal{M} \nvDash_{m_i} \Box\Box p}$. Il en résulte : $\mathcal{M} \nvDash_{m_i} \Box p \Rightarrow \Box\Box p$, et donc : $F \nvDash \Box p \Rightarrow \Box\Box p$

- L'Ax. **B** est valide dans la classe des cadres symétriques ; autrement dit : si $F = \langle M, R \rangle$ est un cadre symétrique quelconque, alors $F \vDash p \Rightarrow \Box\Diamond p$.

  On démontre la contraposée : quel que soit F, si $F \nvDash p \Rightarrow \Box\Diamond p$, alors F n'est pas symétrique. En effet :
  puisque $F \nvDash p \Rightarrow \Box\Diamond p$, il existe un modèle $\mathcal{M} = \langle M, R, i \rangle$ fondé sur F et

---

[4] Autre formulation, peut-être plus intuitive :
Supposons que $F = \langle M, R \rangle$ soit un cadre transitif mais que $F \nvDash \Box p \Rightarrow \Box\Box p$. Alors il existe un modèle $\mathcal{M} = \langle M, R, i \rangle$ fondé sur F et un monde $m_i \in M$, tels que $\mathcal{M} \nvDash_{m_i} \Box p \Rightarrow \Box\Box p$. Ce qui signifie que l'on a $\mathcal{M} \vDash_{m_i} \Box p$ et $\mathcal{M} \nvDash_{m_i} \Box\Box p$. Puisque $\mathcal{M} \nvDash_{m_i} \Box\Box p$, il existe un monde m_j, tel que $m_i R m_j$ et $\mathcal{M} \nvDash_{m_j} \Box p$, ce qui à son tour signifie qu'il existe un monde m_k, tel que $m_j R m_k$ et $\underline{\mathcal{M} \nvDash_{m_k} p}$. Or R est transitive et l'on a : $m_i R m_j$ et $m_j R m_k$, d'où il résulte : $m_i R m_k$; mais $\mathcal{M} \vDash_{m_i} \Box p$, donc : $\underline{\mathcal{M} \vDash_{m_k} p}$; d'où contradiction.

un monde $m_i \in M$, tels que $\mathcal{M} \nvDash_{m_i} p \Rightarrow \Box\Diamond p$. Ce qui signifie que l'on a $\mathcal{M} \vDash_{m_i} p$ et $\mathcal{M} \nvDash_{m_i} \Box\Diamond p$. Puisque $\mathcal{M} \nvDash_{m_i} \Box\Diamond p$, il existe un monde m_j, tel que $m_i R m_j$ et $\mathcal{M} \nvDash_{m_j} \Diamond p$.
Comme $M \nvDash_{m_j} \Diamond p$, m_j ne "voit" aucun monde dans lequel p est vrai, et donc il n'est pas le cas que $m_j R m_i$. On a donc : $m_i R m_j$, mais pas $m_j R m_i$; R n'est donc pas symétrique, pas plus que F[5].

> La réciproque, si $F \vDash p \Rightarrow \Box\Diamond p$ alors F est symétrique, vaut également : supposons que $F = \langle M, R\rangle$ ne soit pas symétrique ; alors il existe un modèle $\mathcal{M} = \langle M, R, i\rangle$ fondé sur F et deux mondes $m_i, m_j \in M$, tels que : $m_i R m_j$ mais pas $m_j R m_i$.
> On définit $i(p)$ par $i(p) = \{m_i\}$ (autrement dit, p n'est vrai que dans m_i). Dans ce cas, on a : $\underline{\mathcal{M} \vDash_{m_i} p}$ et $\mathcal{M} \nvDash_{m_j} \Diamond p$ (puisque m_j ne "voit" pas m_i, seul monde dans lequel p est vrai). Or $m_i R m_j$ et donc $\underline{\mathcal{M} \nvDash_{m_i} \Box\Diamond p}$. Il en résulte : $\mathcal{M} \nvDash_{m_i} p \Rightarrow \Box\Diamond p$ et donc $F \nvDash p \Rightarrow \Box\Diamond p$.

- L'Ax. **5** est valide dans la classe des cadres euclidiens[6] ; autrement dit : si $F = \langle M, R\rangle$ est un cadre euclidien quelconque, alors $F \vDash \Diamond p \Rightarrow \Box\Diamond p$.

  On démontre la contraposée : quel que soit F, si $F \nvDash \Diamond p \Rightarrow \Box\Diamond p$, alors F n'est pas euclidien. En effet :
  puisque $F \nvDash \Diamond p \Rightarrow \Box\Diamond p$, il existe un modèle $\mathcal{M} = \langle M, R, i\rangle$ fondé sur F et un monde $m_i \in M$, tels que $\mathcal{M} \nvDash_{m_i} \Diamond p \Rightarrow \Box\Diamond p$; ce qui signifie que l'on a : (1) $\mathcal{M} \vDash_{m_i} \Diamond p$ et (2) $\mathcal{M} \nvDash_{m_i} \Box\Diamond p$. Donc, par (1) : il existe m_k tel que $m_i R m_k$ et $\mathcal{M} \vDash_{m_k} p$; et, par (2) : il existe m_j tel que $m_i R m_j$ et $\mathcal{M} \nvDash_{m_j} \Diamond p$.
  Comme $\mathcal{M} \nvDash_{m_j} \Diamond p$, m_j ne "voit" aucun monde dans lequel p est vrai et donc il n'est pas le cas que $m_j R m_k$. On a donc : $m_i R m_j$, $m_i R m_k$, mais pas $m_j R m_k$; R n'est donc pas euclidienne, pas plus que F[7].

---

[5] Autre formulation, peut-être plus intuitive :
Supposons que $F = \langle M, R\rangle$ soit un cadre symétrique mais que $F \nvDash p \Rightarrow \Box\Diamond p$. Alors il existe un modèle $\mathcal{M} = \langle M, R, i\rangle$ fondé sur F et un monde $m_i \in M$, tels que $\mathcal{M} \nvDash_{m_i} p \Rightarrow \Box\Diamond p$. Ce qui signifie que l'on a $\underline{\mathcal{M} \vDash_{m_i} p}$ et $\mathcal{M} \nvDash_{m_i} \Box\Diamond p$. Puisque $\mathcal{M} \nvDash_{m_i} \Box\Diamond p$, il existe un monde m_j, tel que $m_i R m_j$ et $\mathcal{M} \nvDash_{m_j} \Diamond p$. Or R est symétrique et l'on a : $m_i R m_j$ d'où il résulte : $m_j R m_i$; mais $\mathcal{M} \nvDash_{m_j} \Diamond p$, donc : $\underline{\mathcal{M} \nvDash_{m_i} p}$; d'où contradiction.

[6] Rappel : une relation est euclidienne si elle satisfait la formule : $\forall x, \forall y, \forall z[(xRy \wedge xRz) \Rightarrow yRz]$.

[7] Autre formulation, peut être plus intuitive :
Supposons que $F = \langle M, R\rangle$ soit un cadre euclidien, mais que $F \nvDash \Diamond p \Rightarrow \Box\Diamond p$. Alors il existe un modèle $\mathcal{M} = \langle M, R, i\rangle$ fondé sur F et un monde $m_i \in M$, tels que $\mathcal{M} \nvDash_{m_i} \Diamond p \Rightarrow \Box\Diamond p$; ce qui

> La réciproque, si $F \models \Diamond p \Rightarrow \Box\Diamond p$ alors F est euclidien, vaut également : supposons que $F = \langle M, R\rangle$ ne soit pas euclidien ; alors il existe un modèle $\mathcal{M} = \langle M, R, i\rangle$ fondé sur F et trois mondes $m_i, m_j, m_k \in M$, tels que m_iRm_j, m_iRm_k mais pas : m_jRm_k. On définit $i(p)$ par $i(p) = \{m_k\}$. Dans ce cas, on a : $\mathcal{M} \models_{m_i} \Diamond p$ (puisque m_iRm_k et $\mathcal{M} \models_{m_k}\models p$) et $\mathcal{M} \not\models_{m_j} \Diamond p$ (puisque m_j ne "voit" pas m_k, seul monde dans lequel p est vrai), d'où $\mathcal{M} \not\models_{m_i} \Box\Diamond p$ et donc $\mathcal{M} \not\models_{m_i} \Diamond p \Rightarrow \Box\Diamond p$.

Les formules de Geach

On considère dans ce qui suit une classe de formules particulièrement remarquables qui permet de mieux comprendre les résultats qui précèdent.

Soit d'abord la formule simple, dite "formule de Geach" : $\Diamond\Box p \Rightarrow \Box\Diamond p$.

On montre que cette formule est valide dans la classe des cadres "incestueux" (ou "convergents")[8] ; autrement dit : si $F = \langle M, R\rangle$ est un cadre incestueux quelconque, alors $F \models \Diamond\Box p \Rightarrow \Box\Diamond p$.

On démontre la contraposée : quel que soit F, si $F \not\models \Diamond\Box p \Rightarrow \Box\Diamond p$, alors F n'est pas incestueux. En effet :

puisque $F \not\models \Diamond\Box p \Rightarrow \Box\Diamond p$, il existe un modèle $\mathcal{M} = \langle M, R, i\rangle$ fondé sur F et un monde $m_i \in M$, tels que $\mathcal{M} \not\models_{m_i} \Diamond\Box p \Rightarrow \Box\Diamond p$; ce qui signifie que l'on a : $\mathcal{M} \models_{m_i} \Diamond\Box p$ et $\mathcal{M} \not\models_{m_i} \Box\Diamond p$. Donc, (1) : il existe $m_j \in M$ tel que m_iRm_j et $\mathcal{M} \models_{m_j} \Box p$; et (2) : il existe $m_k \in M$ tel que m_iRm_k et $\mathcal{M} \not\models_{m_k} \Diamond p$.

Comme $\mathcal{M} \models_{m_j} \Box p$, m_j ne "voit" aucun monde dans lequel p est faux ; et comme $\mathcal{M} \not\models_{m_k} \Diamond p$, m_k ne "voit" aucun monde dans lequel p est vrai. Donc quel que soit $m \in M$, il n'est pas le cas qu'à la fois m_jRm et m_kRm. R n'est

---

signifie que l'on a : (1) $\mathcal{M} \models_{m_i} \Diamond p$ et (2) $\mathcal{M} \not\models_{m_i} \Box\Diamond p$. Donc, par (1) : il existe $m_k \in M$ tel que m_iRm_k et $\underline{\mathcal{M} \models_{m_k} p}$; et, par (2) : il existe $m_j \in M$ tel que m_iRm_j et $\mathcal{M} \not\models_{m_j} \Diamond p$. Comme R est euclidienne et que l'on a m_iRm_j et m_iRm_k, on a : m_jRm_k et donc comme $\mathcal{M} \not\models_{m_j} \Diamond p$: $\underline{\mathcal{M} \not\models_{m_k} p}$; d'où contradiction.

[8] On dit qu'une relation est "incestueuse" (ou "convergente") si elle satisfait la formule : $\forall x, \forall y, \forall z\{(xRy \wedge xRz) \Rightarrow \exists t(yRt \wedge zRt)\}$; "incestueuse" car si l'on interprète xRy par y est en enfant de x, la formule signifie que si deux éléments sont les "enfants" d'un même élément, alors ils ont eux-mêmes un "enfant" (! ! !)

donc pas incesteuse, pas plus que F[9].

> La réciproque, si $F \vDash \Diamond\Box p \Rightarrow \Box\Diamond p$ alors F est incestueux, vaut également : supposons que F ne soit pas incestueux ; alors il existe un modèle $\mathcal{M} = \langle M, R, i\rangle$ fondé sur F et trois mondes $m_i, m_j, m_k \in M$, tels que m_iRm_j, m_iRm_k et, pour tout $m \in M$, il n'est le cas qu'à la fois m_jRm et m_kRm.
> On définit $i(p)$ par : pour tout $m \in M$, $m \in i(p)$ ssi m_jRm.
> Dans ce cas, on a : $\mathcal{M} \vDash_{m_j} \Box p$ et donc $\mathcal{M} \vDash_{m_i} \Diamond\Box p$; d'un autre côté, puisque m_k ne "voit" aucun monde que "voit" m_j, donc aucun monde dans lequel p soit vrai, on a : $\mathcal{M} \nvDash_{m_k} \Diamond p$ et donc $\mathcal{M} \nvDash_{m_i} \Box\Diamond p$. En conséquence : $\mathcal{M} \nvDash_{m_i} \Diamond\Box p \Rightarrow \Box\Diamond p$.

On peut généraliser l'axiome **G** sous la forme : $\Diamond^k\Box^l p \Rightarrow \Box^m\Diamond^n p$, $\Diamond^k$ ou $\Box^l$ désignant une suite de k "$\Diamond$" ou de l "$\Box$". Dans le cas ci-dessus, on avait $k = l = m = n = 1$. On dira qu'une relation est $klmn$-incestueuse ssi, pour k, l, m, n, entiers naturels donnés, elle satisfait la formule : $\forall x, \forall y, \forall z\{(xR^ky \wedge xR^mz) \Rightarrow \exists t(yR^lt \wedge zR^nt)\}$.
"xR^ny" signifie qu'il existe $n-1$ éléments $z_1, \ldots, z_{n-1}$ tels que l'on a xRz_1, z_1Rz_2,. . .,$z_{n-1}Ry$. Pour $n = 0$, "xR^0y" signifie $x = y$.

Il est facile de voir que si dans un monde m d'un modèle quelconque, on a $m \vDash \Diamond^n\varphi$ cela signifie qu'il y a au moins un monde m' tel que mR^nm' et $m' \vDash \varphi$; de la même manière, si l'on a $m \vDash \Box^n\varphi$, cela signifie que pour tout monde m' tel que mR^nm', $m' \vDash \varphi$.

En généralisant les petites démonstrations ci-dessus, on a alors :

-A. si $F = \langle M, R\rangle$ est un cadre $klmn$-incestueux quelconque, alors $F \vDash \Diamond^k\Box^l p \Rightarrow \Box^m\Diamond^n p$.

---

[9] Autre formulation, peut-être plus intuitive :
Supposons que $F = \langle M, R\rangle$ soit incestueux, mais que $F \nvDash \Diamond\Box p \Rightarrow \Box\Diamond p$. Alors il existe un modèle $\mathcal{M} = \langle M, R, i\rangle$ fondé sur F et un monde $m_i \in M$, tels que $\mathcal{M} \nvDash_{m_i} \Diamond\Box p \Rightarrow \Box\Diamond p$; ce qui signifie que l'on a : $\mathcal{M} \vDash_{m_i} \Diamond\Box p$ et $\mathcal{M} \nvDash_{m_i} \Box\Diamond p$. Donc, (1) : il existe $m_j \in M$ tel que m_iRm_j et $\mathcal{M} \vDash_{m_j} \Box p$; et (2) : il existe $m_k \in M$ tel que m_iRm_k et $\mathcal{M} \nvDash_{m_k} \Diamond p$. Comme R est incestueuse et que m_iRm_k et m_iRm_j, il existe m_h tel que m_jRm_h et m_kRm_h et donc, par (1) : $\underline{\mathcal{M} \vDash_{m_h} p}$, et par (2) : $\underline{\mathcal{M} \nvDash_{m_h} p}$; d'où contradiction.

-B. si $F \vDash \Diamond^k\Box^l p \Rightarrow \Box^m\Diamond^n p$ alors F est $klmn$-incestueux.

Par ex., pour A : Supposons que $F = \langle M, R\rangle$ soit $klmn$-incestueux, mais que $F \nvDash \Diamond^k\Box^l p \Rightarrow \Box^m\Diamond^n p$. Alors il existe un modèle $\mathcal{M} = \langle M, R, i\rangle$ fondé sur F et un monde $m_i \in M$, tel que $\mathcal{M} \nvDash_{m_i} \Diamond^k\Box^l p \Rightarrow \Box^m\Diamond^n p$; ce qui signifie que l'on a : $\mathcal{M} \vDash_{m_i} \Diamond^k\Box^l p$ et $\mathcal{M} \nvDash_{m_i} \Box^m\Diamond^n p$. Donc, (1) : il existe $m_j \in M$ tel que $m_i R^k m_j$ et $\mathcal{M} \vDash_{m_j} \Box^l p$; et (2) : il existe $m_h \in M$ tel que $m_i R^m m_h$ et $\mathcal{M} \nvDash_{m_h} \Diamond^n p$. Comme R est $klmn$-incestueuse et que $m_i R^k m_j$ et $m_i R^m m_h$, il existe m_k tel que $m_j R^l m_k$ et $m_h R^n m_k$ et donc, par (1) : $\underline{\mathcal{M} \vDash_{m_k} p}$, et par (2) : $\underline{\mathcal{M} \nvDash_{m_k} p}$; d'où contradiction. Même transcription pour B.

On remarque que tous les axiomes, sauf **K**, sont de la forme $\Diamond^k\Box^l p \Rightarrow \Box^m\Diamond^n p$ avec des valeurs diverses pour k, l, m, n :

pour **D** :	–	$\Box p$	$\Rightarrow$	–	$\Diamond p$
d'où :	$k = 0,$	$l = 1,$		$m = 0,$	$n = 1$
pour **T** :	–	$\Box p$	$\Rightarrow$	–	p
d'où :	$k = 0,$	$l = 1,$		$m = 0$	$n = 0$
pour **4** :	–	$\Box p$	$\Rightarrow$	$\Box\Box p$	–
d'où :	$k = 0,$	$l = 1,$		$m = 2,$	$n = 0$
pour **B** :	–	p	$\Rightarrow$	$\Box$	$\Diamond p$
d'où :	$k = 0,$	$l = 0,$		$m = 1,$	$n = 1$
pour **5** :	$\Diamond p$	–	$\Rightarrow$	$\Box$	$\Diamond p$
d'où :	$k = 1,$	$l = 0,$		$m = 1$	$n = 1$

On peut alors montrer que :
– une relation est 0101-incesteuse ssi elle est sérielle
– une relation est 0100-incesteuse ssi elle est réflexive
– une relation est 0121-incesteuse ssi elle est transitive
– une relation est 0011-incesteuse ssi elle est symétrique
– une relation est 1011-incesteuse ssi elle est euclidienne
On trouvera les démonstrations (par la méthode des arbres) dans l'Annexe A, à la fin de ce fascicule.

Il résulte de ces résultats que ce n'est pas tout à fait un "hasard" si l'on a les correspondances indiquées entre axiomes et classes de cadres : il s'agit à chaque fois d'un cas particulier du théorème général selon lequel, - k, l, m et n étant des entiers donnés -, si $F = \langle M, R\rangle$ est un cadre $klmn$-incestueux, la $klmn$-formule de Geach est valide dans F (et réciproquement : si la $klmn$-formule de Geach est valide dans un cadre, ce cadre est $klmn$-incestueux).

2. On montre maintenant que les trois règles Sub, MP et N préservent la validité dans un cadre.

   – Sub préserve la validité dans un cadre[10].

     Soit une formule φ dans laquelle figure les lettres de proposition $p_{i_1}, \ldots, p_{i_n}$ et $\theta = \varphi({}^{\psi_1}/_{p_{i_1}}, \ldots, {}^{\psi_n}/_{p_{i_n}})$ le résultat de la substitution uniforme dans φ des formules $\psi_1, ., \psi_n$, aux lettres de proposition $p_{i_1}, \ldots, p_{i_n}$, respectivement. On montre que si θ n'est pas valide dans un cadre F, alors φ ne l'est pas non plus.

     Soit un modèle $\mathcal{M} = \langle M, R, i\rangle$ fondé sur le cadre $F = \langle M, R\rangle$ et $m_j \in M$ tel que $\mathcal{M} \nvDash_{m_j} \theta$. On définit un autre modèle $\mathcal{M}' = \langle M, R, i'\rangle$ fondé sur F par les clauses suivantes :
     – si $\mathcal{M} \vDash_{m_j} \psi_h$, $(1 \leqq h \leqq n)$, alors $m_j \in i'(p_{i_h})$, et
     – si $\mathcal{M} \nvDash_{m_j} \psi_h$, $(1 \leqq h \leqq n)$, alors $m_j \notin i'(p_{i_h})$.
     – si p_{i_k} n 'apparaît pas dans $p_{i_1}, \ldots, p_{i_n}$, $m_j \in i(p_{i_k})$ ou $m_j \notin i(p_{i_k})$, au choix.

     On a alors évidemment : $\mathcal{M}' \nvDash_{m_j} \varphi$, i.e. φ n'est pas valide dans F. Par contraposition : si φ est valide dans F, θ est valide dans F.

   – MP préserve la validité dans un cadre.
     Trivial !

   – N préserve la validité dans un cadre.

---

[10] Attention, pas dans un modèle ! Pour s'en convaincre, il suffit de considérer l'exemple 1, p. 31 ci-dessus : supposons que, sans toucher aux définitions de M et de R, on ait caractérisé plus avant l'interprétation i de telle sorte que l'on a maintenant, non seulement : $i(p) : \{m_0\}$, $i(q) = \{m_0, m_1\}$, mais, en plus : $i(r) = \{m_1\}$. La substitution de r à q dans la formule $\Box(p \vee q) \Rightarrow (\Box p \vee \Box q)$ fera passer cette formule de valide à non-valide dans $\mathcal{M}$ puisqu'elle devient, après substitution, fausse dans m_0.

Soit φ valide dans le cadre $F = \langle M, R \rangle$ et soit $\mathcal{M}$ un modèle quelconque fondé sur F ; φ est donc vraie dans tous les mondes $m \in M$. Supposons $\mathcal{M} \nvDash \Box\varphi$; il existe alors un monde $m_i \in M$ tel que $\mathcal{M} \nvDash_{m_i} \Box\varphi$, et, en conséquence, il existe un autre monde $m_j \in M$ tel que mRm_j et $\mathcal{M} \nvDash_{m_j} \varphi$, contrairement à l'hypothèse.

3. On vient donc de démontrer que l'Ax. **T**, par ex., est valide dans la classe des cadres réflexifs et que les trois règles d'inférence préservent la validité dans un cadre. Il en résulte donc que tout ce que l'on pourra déduire de **T** sera également valide dans la classe des cadres réflexifs. Comme de plus l'Ax. **K** est valide dans la classe des cadres quelconques, tout ce que l'on pourra en déduire sera valide dans la classe des cadres quelconques. Ainsi tout ce que l'on pourra déduire de ces deux axiomes pris conjointement (donc dans le système T) sera valide dans la classe des cadres réflexifs. Ce même petit raisonnement s'applique aux différents systèmes de logique modale et donc, en vertu de leur définition, il ressort de ce qui précède que :

- Si φ est une thèse de K, φ est valide dans la classe des cadres quelconques.
- Si φ est une thèse de D, φ est valide dans la classe des cadres sériels.
- Si φ est une thèse de T, φ est valide dans la classe des cadres réflexifs[11].
- Si φ est une thèse de S4, φ est valide dans la classe des cadres réflexifs (puisque **T** est un axiome de S4) et transitifs.
- Si φ est une thèse de B, φ est valide dans la classe des cadres réflexifs (puisque **T** est un axiome de B) et symétriques.
- Si φ est une thèse de S5, φ est valide dans la classe des cadres réflexifs (puisque **T** est un axiome de S5), symétriques et transitifs (puisqu'une relation euclidienne et réflexive est symétrique et transitive).

Avant de démontrer la complétude des différents systèmes relativement à certaines classes de cadres, on introduit la méthode des arbres pour la logique

---

[11] Comme une relation réflexive est évidemment sérielle, φ est également valide dans la classe des cadres sériels ; cette remarque vaut pour les systèmes suivants.

modale qui permet de disposer d’une procédure simple et intuitive pour démontrer qu’une formule est une thèse d’un système.

Chapitre 3

Arbres pour la logique modale propositionnelle.

3.1 Règles pour les arbres

La méthode des arbres pour la logique modale ne fait qu'étendre astucieusement la méthode classique (dont on rappelle les règles ci-dessous), à la différence près que l'on ne cherche pas seulement à déterminer si une formule (négation de la formule pour laquelle on fait l'arbre) peut être vraie pour une interprétation des lettres de propositions, mais si une formule peut être vraie pour une interprétation des lettres de proposition *dans un monde d'un modèle.* Il s'agit donc d'essayer de construire un modèle et une interprétation de la formule initiale dans un monde de ce modèle qui la rende vraie dans ce même monde. Pour ce faire, on ajoute aux formules résultant d'un traitement, le "monde" dans lequel elles devraient être vraies ou fausses pour que la formule initiale de l'arbre soit elle-même vraie dans ce qui apparaît comme un "premier" monde (!), à savoir celui dans lequel on évaluera la formule pour laquelle on fait l'arbre.

Les formules sont donc préfixées par des suites de nombres que l'on symbolise par $n.$ ou par $n.x.$, “x” étant le dernier nombre du préfixe ; par ex. : "1.1.", ou encore : "1.2.1.. On représente par là également la relation d'accessibilité en convenant qu'un “monde” de préfixe $n.$ ne peut voir qu'un "monde" de préfixe $n.x.$ ou $n.y.$ mais pas un "monde" $n.x.y.$, ni un “monde” dont le préfixe serait un segment initial de la suite $n.$

Ces conventions étant admises, une branche est dite *fermée* si apparaissent sur elle une formule élémentaire et sa négation, *chacune de ces deux formules étant* *précédée du même préfixe.* Ainsi, par ex. si figurent sur une branche une formule p dont le préfixe est 1.2. et une autre $\sim p$, dont le préfixe est 1.3., cela n'entraîne pas la fermeture de la branche.

3.1.1 Règles pour les connecteurs propositionnels

règle $\wedge$

$$\frac{\varphi \wedge \psi}{\begin{array}{c} \varphi \\ \psi \end{array}}$$

règle $\vee$

$$\frac{\varphi \vee \psi}{\begin{array}{cc} \swarrow & \searrow \\ \varphi & \psi \end{array}}$$

règle $\Rightarrow$

$$\frac{\varphi \Rightarrow \psi}{\begin{array}{cc} \swarrow & \searrow \\ \sim\varphi & \psi \end{array}}$$

règle $\sim\ \wedge$

$$\frac{\sim(\varphi \wedge \psi)}{\begin{array}{cc} \swarrow & \searrow \\ \sim\varphi & \sim\psi \end{array}}$$

règle $\sim\ \vee$

$$\frac{\sim(\varphi \vee \psi)}{\begin{array}{c} \sim\varphi \\ \sim\psi \end{array}}$$

règle $\sim\Rightarrow$

$$\frac{\sim(\varphi \Rightarrow \psi)}{\begin{array}{c} \varphi \\ \sim\psi \end{array}}$$

règle $\sim\sim\varphi$

$$\frac{\sim\sim\varphi}{\varphi}$$

3.1.2 Règles valant pour tout système normal.

- Règles $\Box$:

$$\frac{n.\Box\varphi}{n.x.\varphi} \qquad \frac{n.\sim\Diamond\varphi}{n.x.\sim\varphi} \qquad \text{pour tout } n.x. \text{ apparaissant sur la branche}$$

- Règles $\Diamond$:

$$\frac{n.\Diamond\varphi}{n.x.\varphi} \qquad \frac{n.\sim\Box\varphi}{n.x.\sim\varphi} \qquad \text{avec } n.x. \text{ nouveau sur la branche}$$

3.1.3 Règles spécifiques aux différents systèmes de logique modale

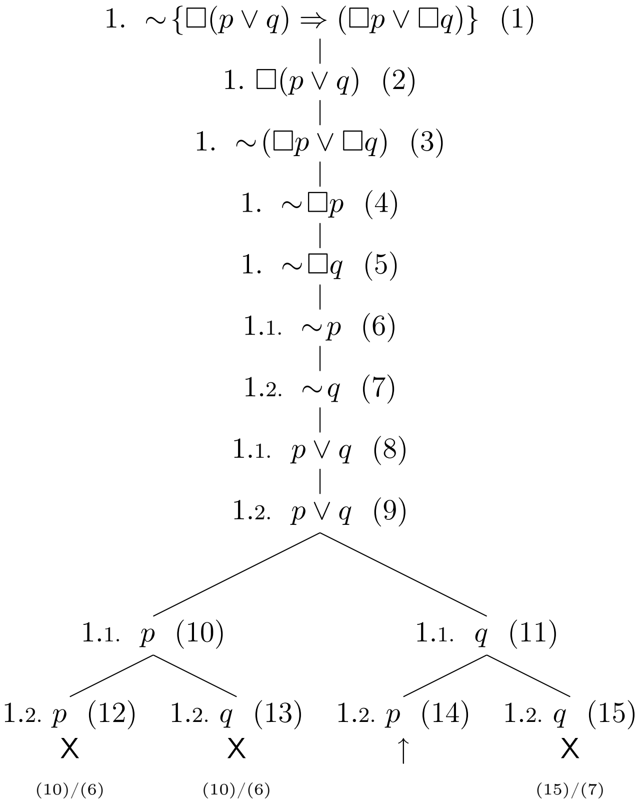
Outre les quatre règles précédentes qui valent pour tout système normal, on applique les règles suivantes selon les systèmes dans lesquels on cherche à établir si une formule est valide ou non.

			Systèmes	
			Axiomes	Règles
T :	$\dfrac{n.\Box\varphi}{n.\varphi}$	$\dfrac{n.\sim\Diamond\varphi}{n.\sim\varphi}$	T = **K** +**T**	T
D :	$\dfrac{n.\Box\varphi}{n.\Diamond\varphi}$	$\dfrac{n.\sim\Diamond\varphi}{n.\sim\Box\varphi}$	D = **K** + **D**	D
B	$\dfrac{n.x.\Box\varphi}{n.\ \varphi}$	$\dfrac{n.x.\sim\Diamond\varphi}{n.\sim\varphi}$	B = **K** + **T**+ **B**	$B + 4$
4	$\dfrac{n.\Box\varphi}{n.x.\Box\ \varphi}$	$\dfrac{n.\sim\Diamond\varphi}{n.x\sim\Diamond\varphi}$	S4 = **K** + **T**+ **4**	$T + 4$
5	$\dfrac{n.x.\Box\varphi}{n.\ \Box\varphi}$	$\dfrac{n.x.\sim\Diamond\varphi}{n.\sim\Diamond\varphi}$	S5 = **K** + **T**+ **5**	$T + 4 + 5$

Il convient d'appliquer les règles dans l'ordre suivant : (1) les règles habituelles pour les connecteurs, (2) les règles pour les possibles ("$\Diamond$" et "$\sim\Box$"), et enfin (3) les règles pour les nécessaires ("$\Box$" et "$\sim\Diamond$").

3.2 Exemples d'arbres

Arbre pour : $\Box(p \vee q) \Rightarrow (\Box p \vee \Box q)$.



Explications : (2), (3) de (1) par la règle "$\sim\Rightarrow$" ; (4), (5) de (3) par la règle "$\sim \vee$" ; (6) de (4) et (7) de (5), par la règle "$\sim\Box$" ; (8) et (9) de (2) par la règle "$\Box$" ; (10), (11) de (8) par la règle "$\wedge$" ; (12), (13) et (14), (15) de (9), par la règle "$\vee$".

On remarque que la règle "$\sim\Box$" (tout comme la règle "$\Diamond$") oblige à "ouvrir" deux mondes "1.1." et "1.2.", le principe étant qu'il n'y a aucune raison pour que les mondes dans lesquels p et q sont faux (pour que $\Box p$ et $\Box q$ soit faux dans le "monde" "1.", soient identiques (se souvenir du traitement des existentiels en premier ordre).

On remarque également que la règle "$\Box$" oblige à traiter deux fois la formule (2) : puisque $p \vee q$ est nécessaire dans le monde "1.", il faut que cette formule soit vraie dans les deux mondes accessibles de "1.".

Enfin, la branche qui se termine par la formule (14) ne ferme pas car, même si p et $\sim p$ apparaissent sur cette branche ((6) et (14)), ce n'est pas avec le *même* préfixe.

Comme en propositionnel standard, on peut extraire des branches ouvertes des modèles dans lesquels la formule initiale est vraie et donc la formule pour laquelle on a fait l'arbre fausse.

On définit un modèle $\mathcal{M} : \langle M, R, i \rangle$ à partir de la branche ouverte de la manière suivante :

$M = \{1., 1.\text{1.}, 1.\text{2.}\}$,

$R = \{< 1., 1.\text{1.} >, < 1., 1.\text{2.} >\}$,

$i(p) = \{1.\text{2.}\}$ et $i(q) = \{1.\text{1.}\}$.

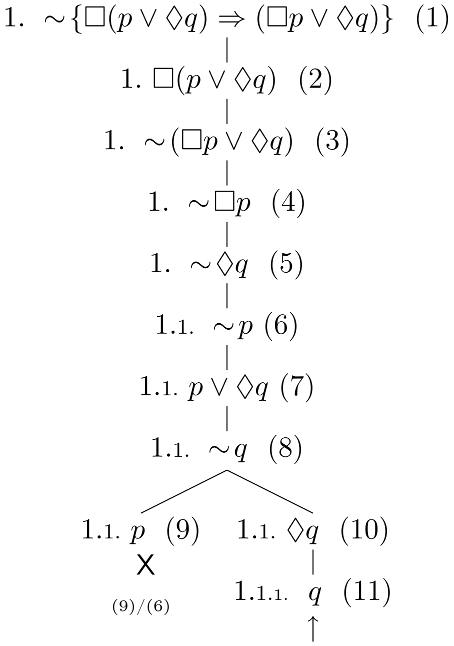
On peut montrer de la manière suivante que dans ce modèle $\Box(p \vee q) \Rightarrow (\Box p \vee \Box q)$ est fausse dans le monde "1.", (d'où il suit que cette formule n'est pas K-valide) :

	p	q	$\Box p$	$\Box q$	$p \vee q$	$\Box(p \vee q)$	$\Box p \vee \Box q$	$\Box(p \vee q) \Rightarrow (\Box p \vee \Box q)$
1.			F	F		V	F	F
1.1.	F	V			V			
1.2.	V	F			V			

On s'est limité à reporter dans ce tableau les seules informations explicitement fournies par la branche. Les cases vides correspondent à des valeurs indifférentes qui n'affecteraient en rien le fait que la formule soit fausse en "1.". On remarque, par ex., que, puisque "1.1. et 1.2." sont des culs de sac, $\Box p$ et $\Box q$, y sont vraies et qu'en conséquence leur disjonction l'est également. D'où il suit que la formule est vraie dans ces deux mondes. mais cela n'a aucune incidence sur la fausseté de la formule dans le monde "1.".

Arbre pour $\Box(p \vee \Diamond q) \Rightarrow (\Box p \vee \Diamond q)$

- Dans K :



Explications : (2), (3) de (1) par la règle "$\sim\Rightarrow$" ; (4), (5) de (3) par la règle "$\sim\vee$" ; (6) de (4) par la règle "$\sim\Box$" ; (7) de (2) par la règle "$\Box$" ; (8) de (5) par la règle "$\sim\Diamond$" ; (9), (10) de (7) par la règle "$\vee$" et enfin (11) de (10) par la règle "$\Diamond$".

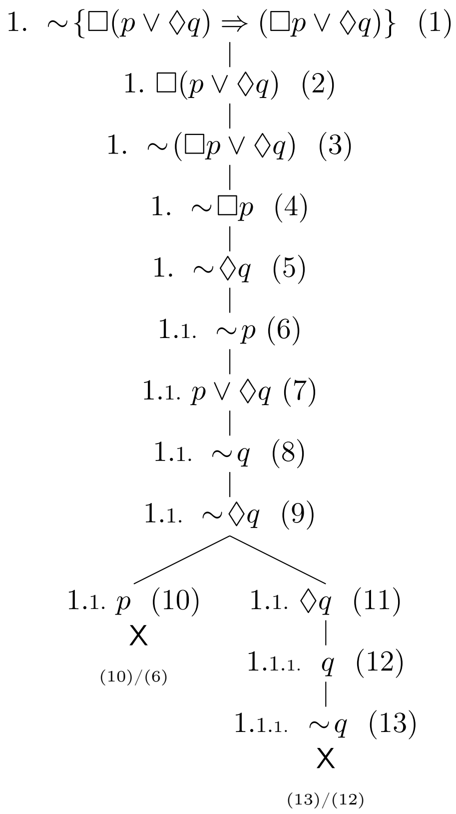
On définit un modèle $\mathcal{M} : < M, R, i >$ à partir de la branche ouverte :

- $M = \{1., 1.1., 1.1.1.\}$
- $R = \{< 1., 1.1. >, < 1.1., 1.1.1. >\}$
- $i(p) = \emptyset$, $i(q) = \{1.1.1.\}$

Calcul de la valeur de vérité de $\Box(p \vee \Diamond q) \Rightarrow (\Box p \vee \Diamond q)$ dans 1. .

	p	q	$\Box p$	$\Diamond q$	$p \vee \Diamond q$	$\Box(p \vee \Diamond q)$	$\Box p \vee \Diamond q$	$\Box(p \vee \Diamond q) \Rightarrow (\Box p \vee \Diamond q)$
1.			F	F		V	F	F
1.1.	F	F		V	V			
1.1.1.		V						

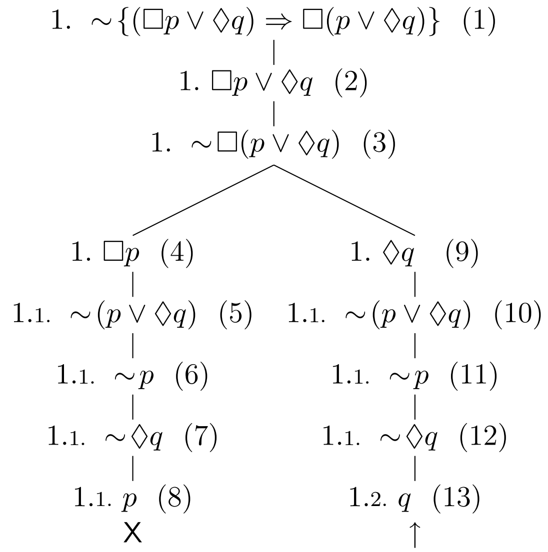
– Dans S4, on arrive à un autre résultat ! ! :



Si l'arbre ferme cette fois-ci, c'est que l'application de la règle **4** à (5) (i.e. : 1. $\sim\Diamond q$) oblige à reporter $\sim\Diamond q$ dans 1.1. (d'où (9)) et donc, $\sim q$ dans 1.1.1. (d'où (13)) ; ce qui conduit à la contradiction (13)/(12).

Arbre pour $(\Box p \vee \Diamond q) \Rightarrow \Box(p \vee \Diamond q)$

- Dans K :

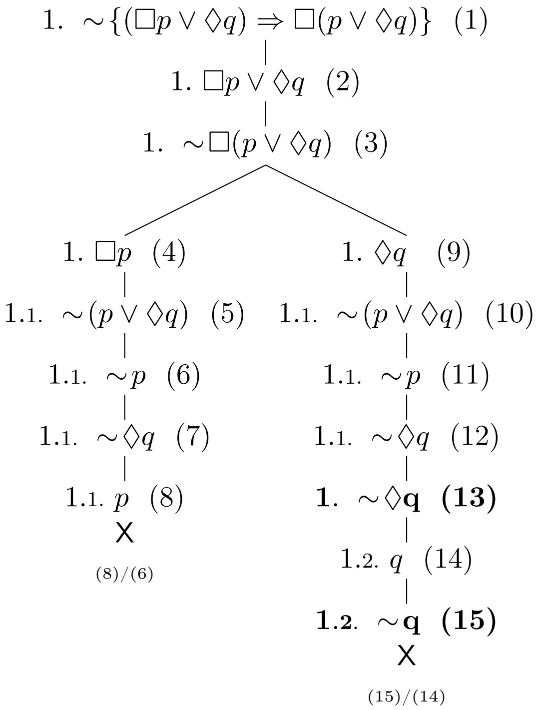


Explications : (2), (3) de (1) par la règle "$\sim\Rightarrow$" ; (4), (9) de (2) par la règle "$\vee$" ; (5), (10) de (3) par la règle "$\sim\Box$" ; (6), (7) de (5), (11), (12) de (10), par la règle"$\sim\vee$" ; (8) de (4) par la règle "$\Box$" et enfin (13) de (9) par la règle "$\Diamond$".
Remarque : en violation de la règle qui impose de traiter les opérateurs modaux après les connecteurs propositionnels, on aurait pu traiter d'abord (3), ce qui aurait conduit à économiser le redoublement des formules (5), (6), (7) de la branche de gauche, par les formules (10), (11), (12) de la branche de droite.

On laisse dorénavant au lecteur le soin d'extraire d'une branche ouverte, un modèle et de vérifier, en faisant un petit tableau, que la formule pour laquelle on a fait l'arbre est fausse dans le monde 1. .

A l'inspection de l'arbre que l'on vient de faire, il apparaît que l'on pourrait fermer la branche de droite, si l'on appliquait la règle **5**, qui oblige à "remonter" les nécessaires dans les mondes précédant celui dans lequel elles apparaissent. Ainsi, ici, puisque l'on a $\sim\Diamond q$ dans 1.1., il faut reporter cette formule dans 1., ce qui conduira à avoir $\sim q$ dans 1.2. d'où il résultera une contradiction avec (13). Cela donne l'arbre suivant (les changements sont indiqués en gras) :

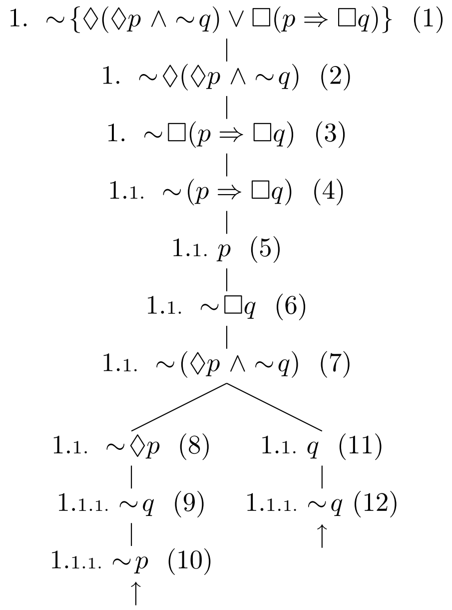
- Dans S5 :



Enfin un dernier exemple qui conduit à des arbres plus tropicaux.

Arbre pour $\Diamond(\Diamond p \wedge \sim q) \vee \Box(p \Rightarrow \Box q)$

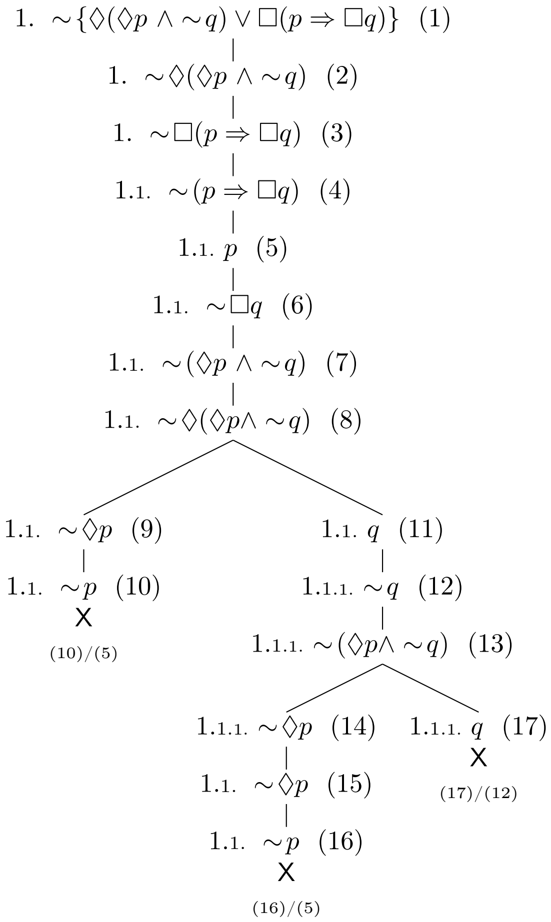
– Dans K :



Explications : (2), (3) de (1) par la règle "$\sim\Rightarrow$" ; (4) de (3) par la règle "$\sim\Box$" ; (5), (6) de (4) par la règle "$\sim\Rightarrow$" ; (7) de (2) par la règle "$\sim\Diamond$" ; (8), (11) de (7) par la règle "$\sim\wedge$" ; (9), (12) de (6) par la règle "$\sim\Box$" et enfin (10) de (8) par la règle "$\sim\Diamond$".

Aucune des deux branches ne ferme si l'on se contente d'appliquer les règles communes à tous les systèmes. On va voir que si l'on se met dans S5, l'arbre se complique mais ferme.

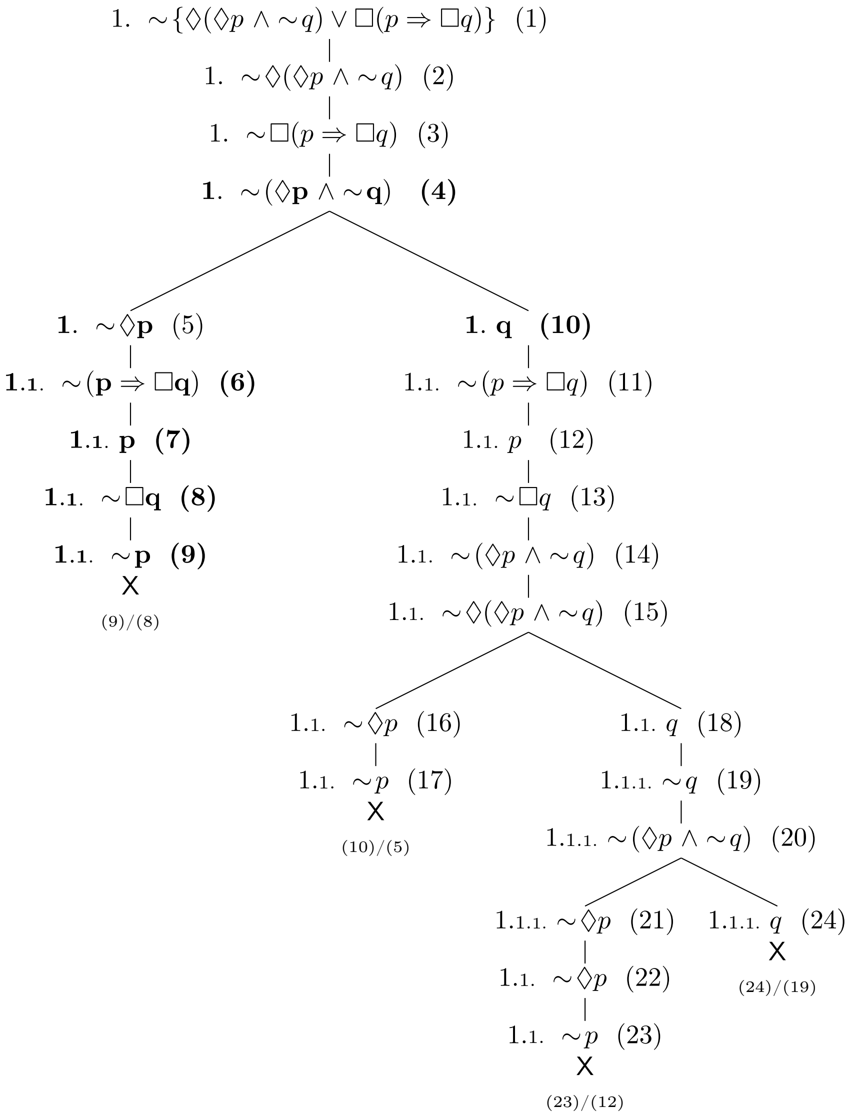
– Dans S5 :



Explications : outre les explications données pour l'arbre dans K, on a : (8) de (2) par la règle **4** ; puis sur la branche de gauche : (10) de (9) par la règle **T**, d'où fermeture de cette branche avec (5). Puisque l'on a (8) (obtenu par la règle **4**), on a maintenant (13) par la règle "$\sim\Diamond$" et donc : (14), (17) de (13) par la règle "$\sim\wedge$" ; (15) de (14) par la règle **5** et (16) de (15) par la règle **T**.

Remarque : on constatera que certaines règles n'ont pas été appliquées alors qu'elles auraient pu l'être : règle **T** sur (2), règle **4** sur (8), règle **5** sur (9), ou même règle "$\sim\wedge$" sur (6) (branche de gauche).
Par principe, un arbre qui ferme sans qu'on ait appliqué des règles lorsqu'elles étaient applicables, aurait *a fortiori* fermé si on les avait appliquées (en vertu de la maxime : plus on utilise de règles, plus on se donne de chance de fermer un arbre !). L'embarras est évidemment que plus on utilise de règles, plus l'arbre

devient encombrant ; il est donc préférable de faire preuve d'astuce. Voici, par exemple, ce qu'aurait donné l'arbre précédent si on avait appliqué la règle **T** à la formule (2) (le surplus inutile est mis en gras) :



Explications : on voit que la partie droite de l'arbre à partir de (11) reprend exactement l'arbre précédent à partir de la formule qui y était numérotée (4). Le seul changement se situe à gauche mais en l'examinant, on verra que cette partie était déjà présente dans l'arbre précédent, si l'on y considère les formules qui y étaient numérotées (4), (5), (6), (9), (10) et que l'on retrouve ici avec les formules : (11), (12), (13), (16), (17) ; la raison en étant que l'on pouvait déjà avoir 1. $\sim p$ à partir de (7), sans avoir besoin d'utiliser la règle **T** sur (2). Ce sont là des circonstances qu'il faut pouvoir repérer pour ne pas s'égarer dans des arbres trop proliférants.

Notons que l'on peut raisonner de manière plus informelle, mais parfois plus rapide, pour établir qu'une formule est S-valide, S étant un système de logique modale normale. Soit notre formule $\Diamond(\Diamond p \wedge \sim q) \vee \Box(p \Rightarrow \Box q)$; montrons qu'elle est S5-valide, i.e. qu'elle est valide dans tout S5-modèle (i.e. dans tout modèle fondé sur un cadre reflexif, symétrique et transitif).

Rappelons qu'en général, dans un S5-modèle, R étant une relation d'équivalence, l'ensemble des mondes accessibles d'un monde m, constitue la classe d'équivalence de m pour R (que l'on peut noter m_R) ; ce qui revient à dire que, pour tout $m', m'' \in m_R$, $m'Rm''$, et pour tout $m'' \notin m_R$, et tout $m' \in m_R$, $\sim (m'Rm'')$. Il en résulte que si $\Box\varphi$ est vraie (fausse) dans l'un des mondes appartenant à m_R, $\Box\varphi$ est vraie (fausse) dans tous les mondes appartenant à m_R. Même chose pour $\Diamond\varphi$. De la même manière, si φ est vraie (fausse) dans un monde $m' \in m_R$, $\Diamond\varphi$ ($\sim\Box\varphi$) est vraie dans tous les mondes appartenant à m_R.

Il suffit de montrer que si l'un des membres de la disjonction $\Diamond(\Diamond p \wedge \sim q) \vee \Box(p \Rightarrow \Box q)$ est faux dans un monde m quelconque d'un S5-modèle quelconque (dont on omettra la mention dans les formules ci-dessous), l'autre est vrai dans ce même monde m.

1. Supposons $\nvDash_m \Diamond(\Diamond p \wedge \sim q)$. Cela implique que pour tout $m' \in m_R$, $\nvDash_{m'} \Diamond p \wedge \sim q$; i.e. pour tout $m' \in m_R$, $\nvDash_{m'} \Diamond p$ ou bien $\nvDash_{m'} \sim q$.

   (a) Supposons $m'' \in m_R$ tel que $\nvDash_{m''} \Diamond p$, alors (S5-modèle) pour tout $m' \in m_R$, $\nvDash_{m'} p$ et donc pour tout $m' \in m_R$, $\vDash_{m'} p \Rightarrow \Box q$ (puisque l'antécédent est partout faux) ; d'où il résulte : $\vDash_m \Box(p \Rightarrow \Box q)$.

   (b) Supposons $m'' \in m_R$ tel que $\nvDash_{m''} \sim q$. Si, également $\nvDash_{m''} p$, on retombe dans le cas précédent.

   Si $\vDash_{m''} \Diamond p$, alors (S5-modèle) pour tout $m' \in m_R$, $\vDash_{m'} \Diamond p$. Or, par hypothèse, pour tout $m' \in m_R$, $\nvDash_{m'} \Diamond p \wedge \sim q$, donc pour tout $m' \in m_R$, $\nvDash_{m'} \sim q$, i.e. $\vDash_{m'} q$. Il en résulte que pour tout $m' \in m_R$, $\vDash_{m'} \Box q$ et donc

$\vDash_{m'} p \Rightarrow \Box q$. D'où $\vDash_m \Box(p \Rightarrow \Box q)$.

2. Supposons $\nvDash_m \Box(p \Rightarrow \Box q)$. Cela implique pour au moins un $m' \in m_R$, $\nvDash_{m'} p \Rightarrow \Box q$, i.e. : $\vDash_{m'} p$ et $\nvDash_{m'} \Box q$. Donc (S5-modèle) pour tout $m'' \in m_R$, $\vDash_{m''} \Diamond p$ et pour au moins un $m''' \in m_R$, $\nvDash_{m'''} q$ (i.e. $\vDash_{m'''} \sim q$). Donc $\vDash_{m'''} \Diamond p \wedge \sim q$. D'où $\vDash_m \Diamond(\Diamond p \wedge \sim q)$.

Comme m et le S5-modèle étaient quelconques, on en conclut que cela vaut pour n'importe quel monde de n'importe quel S5-modèle. C.q.f.d.

Ce raisonnement peut sembler un peu compliqué, mais dans d'autres cas les choses sont très simples. Soit par exemple la formule $(\Box p \vee \Diamond q) \Rightarrow \Box(p \vee \Diamond q)$ (cf. ci-dessus).

Soit un S5-modèle quelconque et m un monde quelconque de ce modèle.

Posons $\vDash_m \Box p \vee \Diamond q$. Alors $\vDash_m \Box p$ ou bien $\vDash_m \Diamond q$.

- Supposons $\vDash_m \Box p$; alors pour tout $m' \in m_R$, $\vDash_{m'} p$ et donc $\vDash_{m'} p \vee \Diamond q$. D'où $\vDash_m \Box(p \vee \Diamond q)$.
- Supposons $\vDash_m \Diamond q$; alors (S5-modèle) pour tout $m' \in m_R$, $\vDash_{m'} \Diamond q$, et en conséquence $\vDash_{m'} p \vee \Diamond q$. D'où $\vDash_m \Box(p \vee \Diamond q)$.

3.3 K-complétude de la méthode des arbres.

Les démonstrations de consistance ("correction") et de complétude de la méthode des arbres en modale suivent de très près les même démonstrations concernant la méthode des arbres en propositionnelle standard. Nous nous contenterons ci-après de ne présenter que la démonstration de la complétude pour le système K, en indiquant comment l'étendre aux autres systèmes.

Il s'agit donc de démontrer : si une formule φ est K-valide (i.e. valide dans la classe des cadres quelconques), alors le K-arbre pour φ ferme[1].

On procède par contraposition : si le K-arbre pour φ ne ferme pas (i.e. s'il comporte une branche ouverte), alors φ n'est pas K-valide.

---

[1] Par "K-arbre", on entend un arbre pour la construction duquel seules les règles communes à tous les arbres sont utilisées.

Il suffit de montrer que l'on peut formellement définir, à partir d'une branche ouverte, un modèle dans lequel il existe un monde dans lequel φ est faux[2].

Soit la procédure suivante : sur une branche encore ouverte, on traite d'abord les formules qui ne sont pas des nécessaires. S'il s'agit d'une négation, conjonction, disjonction, implication, appliquer simplement la règle correspondante. S'il s'agit d'une possible $\Diamond\varphi$ de préfixe disons, $n.$, écrire à l'extrémité de la branche, $n.x.\varphi$, puis, s'il y a sur la même branche une nécessaire $\Box\psi$, prolonger la branche avec $n.x.\psi$. Lorsqu'il n'y a plus de formule à traiter selon cette procédure, la branche est complète.

Soit une branche Br complète et ouverte. On construit un modèle $\mathcal{M}$ à partir de cette branche de la manière suivante (dans ce qui suit "n" est un préfixe quelconque et "m" une métavariable de préfixe) :

- Définition de l'ensemble des mondes M : $M = \{m : m.\ \varphi \in Br\}$
- Définition de la relation R : mRm' ssi m est de la forme $n.$ et m' de la forme $n.x.$
- Définition de l'interprétation i :
  - si $m.\ p \in Br$ alors $m \in i(p)$;
  - si $m.\ \sim p \in Br$ alors $m \notin i(p)$.

A démontrer : pour tout φ et pour tout $n.$, si $n.\ \varphi \in Br$ alors $\mathcal{M} \models_{n.} \varphi$.

Par récurrence sur le degré des formules :

1. Soit φ, de degré 0 et de la forme p : si $n.\ p \in Br$ alors $n. \in i(p)$ (par df.) et donc $\mathcal{M} \models_{n.} p$, i.e. $\mathcal{M} \models_{n.} \varphi$.
2. Soit φ, de degré 1 et de la forme $\sim p$: si $n.\ \sim p \in Br$ alors $n. \notin i(p)$ (par df.) et donc $\mathcal{M} \not\models_{n.} p$, d'où $\mathcal{M} \models_{n.} \sim p$, i.e. $\mathcal{M} \models_{n.} \varphi$.

   Hypothèse de récurrence : si φ est de degré $< k$, et si $n.\ \varphi \in Br$ alors $\mathcal{M} \models_{n.} \varphi$.

   A démontrer pour les diverses formes $\sim\sim\psi$, $\psi \wedge \theta$; $\psi \vee\ \theta$, $\psi \Rightarrow \theta$, $\sim(\psi \wedge \theta)$; $\sim(\psi \vee\ \theta)$, $\sim(\psi \Rightarrow \theta)$.

---

[2] Ce qui suit n'est qu'une façon d'expliciter ce que l'on a fait "naïvement" à la suite des premiers exemples d'arbre donnés ci-dessus.

3. On se contente d'un exemple : soit φ de degré k et de la forme $\sim(\psi \wedge \theta)$; si $n.\ \sim(\psi \wedge \theta) \in Br$ alors $n.\ \sim\psi \in Br$ ou $n.\ \sim\theta \in Br$ (en vertu des règles pour les K-arbres), donc $\mathcal{M} \vDash_{n.} \sim\psi$ ou $\mathcal{M} \vDash_{n.} \sim\theta$ (en vertu de l'hyp. de rec.). Il en résulte $\mathcal{M} \vDash_{n.} \sim(\psi \wedge \theta)$, en vertu de l'évaluation d'une négation de conjonction.

   Même genre de choses pour les autres formes.

4. Pour φ de degré k et de la forme $\Diamond\psi$: si $n.\ \Diamond\psi \in Br$ alors il existe $n.x.\ \psi \in Br$ (en vertu de la règle pour les possibles) et donc $\mathcal{M} \vDash_{n.x.} \psi$ (en vertu de l'hyp. de rec.). Or $n.Rn.x.$ (en vertu de la définition de R) et donc il existe un monde (à savoir $n.x.$) accessible de $n.$ dans lequel ψ est vraie ; il en résulte : $\mathcal{M} \vDash_{n.} \Diamond\psi$.
5. Pour φ de degré k et de la forme $\Box\psi$: si $n.\ \Box\psi \in Br$ alors $n.x.\ \psi \in Br$ pour tout $n.x.$ apparaissant sur la branche Br (en vertu de la règle pour les nécessaires) et donc, pour tout $n.x.$, $\mathcal{M} \vDash_{n.x.} \psi$ (en vertu de l'hyp. de rec.). Or, pour tout $n.x.$, et seulement pour eux, $n.Rn.x.$ (en vertu de la définition de R) et donc dans tous les mondes accessibles de $n.$, ψ est vraie ; il en résulte : $\mathcal{M} \vDash_{n.} \Box\psi$.

   Même genre de chose pour les négations.

Achèvement de la démonstration de complétude.

De ce qui précède, il suit que si un K-arbre pour une formule φ comporte une branche complète et ouverte, alors, puisque $\sim\varphi$ appartient à cette branche, il existe, dans un modèle, un monde dans lequel $\sim\varphi$ est vraie et donc dans lequel φ est faux. φ n'est donc pas K-valide.

Par contraposition, si φ est K-valide, alors le K-arbre pour φ ne comporte pas de branche ouverte, i.e. le K-tableau pour φ ferme.

Le même genre de démonstration peut être fait pour les formules T-valides, B-valides, S4-valides ou S5-valides. Il suffit de définir R comme ci-dessus en ajoutant qu'elle est réflexive, ou réflexive et symétrique, ou réflexive et transitive, ou enfin réflexive, symétrique et transitive.

Par exemple, pour S4 : mRm' ssi m est de la forme $n.$ et m' de la forme $n.$ ou $n.x.$ ou $n.x.y.$

Chapitre 4

Complétude des différents systèmes normaux

4.1 Déduction à partir d'un ensemble Σ de formules

On aura besoin pour la démonstration du théorème de complétude des notions de "déduction dans un système S d'une formule à partir d'un ensemble Σ de formules" ($\Sigma \vdash_{\mathrm{S}} \varphi$) ainsi que de la notion de "consistance", relativement à un système S, d'un ensemble de formules (S-consistance). La première idée qui vient à l'esprit est d'étendre simplement la définition classique de "déduction" en admettant que parmi les formules qui figurent dans une déduction (suite de formules) on peut trouver des formules appartenant à Σ, ce qui donnerait :

une déduction dans S de φ à partir de Σ est une suite finie de formules, $\psi_1, \ldots, \psi_n$, telle que :

- $\varphi = \psi_n$
- pour $1 \leq i \leq n, \psi_i$ est soit un axiome de S, soit une formule appartenant à Σ, soit est obtenue par Sub, MP ou N sur une ou deux formules d'indice $< i$.

L'apparente simplicité de cette définition, qui ne fait, semble-t-il, que reprendre celle que l'on trouve en propositionnelle standard, cache en réalité des difficultés qui se révèlent dès lors que l'on considère le classique théorème de la déduction. Après quelques rappels concernant la portée de ce théorème en propositionnelle standard, on verra quelles précautions la règle N oblige à prendre et comment re-formuler le théorème de la déduction pour des systèmes de logique modale normaux.

Puis on définira une autre notion de "déduction à partir d'un ensemble de formules" et, en conséquence, une autre notion de "consistance" (relativement à un système S) ; ces autres notions sont un peu plus faibles que les précédentes, mais font parfaitement l'affaire pour ce qui suivra.

4.1.1 Quelques rappels sur le théorème de la déduction en logique des propositions

Rappelons quelques points concernant le théorème de la déduction dans le cadre de la logique des propositions. Il s'énonce en toute généralité (Σ, ensemble quelconque de formules, φ et ψ, formules quelconques) :

$$\Sigma \cup \{\psi\} \vdash \varphi \text{ ssi } \Sigma \vdash \psi \Rightarrow \varphi.$$

Le cas type d'application de ce théorème est du genre suivant : supposons que seulement deux formules appartiennent à Σ, autrement dit : $\Sigma = \{\psi_1, \psi_2\}$ et que l'on ait : $\{\psi_1, \psi_2\} \cup \{\psi\} \vdash \varphi$. Une première application du théorème, dans le sens $\rightarrow$, donne :

$\{\psi_1, \psi_2\} = \{\psi_1\} \cup \{\psi_2\} \vdash \psi \Rightarrow \varphi$, puis une seconde donne :

$\emptyset \cup \{\psi_1\} \vdash \psi_2 \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$, et enfin une troisième donne :

$\emptyset \vdash \psi_1 \Rightarrow [\psi_2 \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)]$; autrement dit :

$\vdash \psi_1 \Rightarrow [\psi_2 \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)]$, et comme la formule : $\psi_1 \Rightarrow [\psi_2 \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)]$ est équivalente à : $(\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \psi) \Rightarrow \varphi$, cela signifie que cette dernière formule est une thèse du système (tautologie).

Par exemple, on peut démontrer très facilement que la formule du syllogisme est une thèse de la manière suivante :

$\vdash \varphi \Rightarrow \psi$	(1)	thèse admise
$\vdash \psi \Rightarrow \theta$	(2)	thèse admise
$\vdash \varphi$	(3)	thèse admise
$\vdash \psi$	(4)	*MP* sur (1), (3)
$\vdash \theta$	(5)	*MP* sur (2), (4)

On a donc : $\varphi \Rightarrow \psi, \psi \Rightarrow \theta, \varphi \vdash \theta$; d'où par 3 applications du théorème de la déduction : $\vdash (\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow [(\psi \Rightarrow \theta) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \theta)]$, i.e. : $\vdash [(\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \theta)] \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \theta)$.

Inversement, si, par ex., une formule de la forme $(\psi_1 \wedge \psi_2) \Rightarrow \varphi$ est une thèse, on sait qu'il y a une déduction de φ à partir des deux formules ψ_1 et ψ_2 (i.e. $\psi_1, \psi_2 \vdash \varphi$)

C'est ainsi que l'on peut transformer toutes les implications qui sont des thèses en "règles dérivées", comme on l'a fait plus haut (voir section 1.2.4, p. 7).

En ce qui concerne la méthode des arbres, il résulte de ce qui précède que, comme on le sait bien, on peut "tester" directement la validité d'une inférence (déduction), sans qu'il soit nécessaire de faire l'arbre pour l'implication correspondante, dont l'antécédent est la conjonction des prémisses de l'inférence et le conséquent, la conclusion de la même inférence. Autrement dit, dans le cas général, on peut tout aussi bien débuter avec : $\sim\{(\psi_1\wedge, \ldots, \wedge\psi_n) \Rightarrow \varphi\}$, qu'avec la suite :

$$\begin{array}{c} \psi_1 \\ | \\ \vdots \\ | \\ \psi_n \\ | \\ \sim\varphi \\ | \\ \text{etc.} \end{array}$$

Il faut cependant prendre garde à un point. Si, dans un système axiomatique pour la logique des propositions, on écrit les axiomes dans le langage officiel (c'est à dire, par ex., sous la forme : $(p \wedge q) \Rightarrow p$), il faut nécessairement introduire la règle de substitution en plus du *MP*. Mais alors pour définir la notion de "déduction à partir d'un ensemble Σ de formules" (elles-mêmes écrites dans le langage officiel), il faut prendre soin de préciser que la règle de substitution ne peut s'appliquer qu'à des axiomes de CP mais pas à l'une des formules de Σ : en effet, si l'on s'autorisait à substituer dans les formules de Σ, on pourrait avoir, par ex. la déduction :

$\vdash p$	(1)	prémisse admise
$\vdash q \wedge \sim q$	(2)	*Sub* $^{q\wedge\sim q}/_{p}$, dans (1)

d'où : $p \vdash q \wedge \sim q$.

Mais on n'a évidemment pas :

$\vdash p \Rightarrow (q \wedge \sim q)$[1].

Comme, par ailleurs, on peut montrer que toute déduction à partir de l'ensemble vide ($\Sigma = \emptyset$, seuls les axiomes de CP peuvent donc entrer dans la déduction), peut être ré-écrite de telle sorte que l'on n'applique la règle de substitution qu'à des axiomes, on ne perd aucune "loi logique". Notons (ou rappelons ?) incidemment, que c'est cette dernière propriété des déductions à partir de l'ensemble vide, qui permet de formuler les axiomes de CP sous forme de schémas d'axiome, et donc de faire l'économie de la règle de substitution (c'est ainsi que l'on procédait dans les cours sur la logique des propositions).

La même chose vaut pour les systèmes normaux, par ex. K : toute déduction dans K à partir de l'ensemble vide ($\Sigma = \emptyset$, seuls les axiomes de K peuvent donc entrer dans la déduction), peut être ré-écrite de telle sorte que l'on n'applique la règle de substitution qu'à des axiomes ; on ne perd donc, là encore, aucune loi logique modale. On définit alors une déduction à partir d'un ensemble Σ d'hypothèses comme en propositionnelle, en précisant également que la règle de substitution ne peut s'appliquer qu'à des axiomes mais pas à des formules appartenant à Σ.

4.1.2 Problèmes posés par la règle *N*

Les choses sont cependant plus compliquées en modale propositionnelle[2]. D'après la définition que nous avons donné au début de cette section, on admet que la règle N s'applique sans restriction, et donc, en particulier, que dans une déduction à partir d'un ensemble d'hypothèses, cette règle peut s'appliquer à l'une ou l'autre des hypothèses ; Mais alors, par ex., en vertu de la règle N on aurait : $\{\varphi\} \vdash_{\mathrm{K}} \Box\varphi$, alors qu'il est évident que l'on n'a pas ce à quoi conduirait un "théorème de la déduction"

---

[1] On sait du reste, qu'appliquée à des formules qui ne sont pas des thèses de CP (qui ne sont pas des "tautologies"), la règle de substitution pourrait conduire à obtenir soit des contradictions soit des tautologies.

[2] Les difficultés qui surgissent en modale propositionnelle ne concerne que le sens "→" du théorème. Dans l'autre sens, comme en propositionnelle, il n'y a pas problème : si une formule de la forme $\varphi \Rightarrow \psi$ est déduite, dans un système de logique modale S, à partir de l'ensemble Σ (i.e. $\Sigma \vdash_{\mathrm{S}} \varphi \Rightarrow \psi$), on a immédiatement $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash_{\mathrm{S}} \psi$, puisqu'il y a toujours une déduction :

$\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash_{\mathrm{S}} \varphi$	(1)	par df. de "déduction"
$\Sigma \vdash_{\mathrm{S}} \varphi \Rightarrow \psi$	(2)	par hypothèse
$\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash_{\mathrm{S}} \varphi \Rightarrow \psi$	(3)	affaiblissement à gauche dans (2)
$\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash_{\mathrm{S}} \psi$	(4)	*MP* sur (1), (3).

sauvage (!), à savoir : $\vdash_{\mathrm{K}} \varphi \Rightarrow \Box\varphi$.

En termes sémantiques, on peut facilement comprendre la situation. On peut justifiez N de la manière suivante :

Soit, par ex., φ telle que $\models_K \varphi$ (i.e. φ est K-valide) et soit un modèle $\mathcal{M} =< M, R, i >$, fondé sur un cadre quelconque. Comme $\models_K \varphi$, on a, en particulier, $\mathcal{M} \models \varphi$, i.e. pour tout $m \in M$, on a : $\mathcal{M} \models_m \varphi$ (φ est valide dans $\mathcal{M}$). On montre facilement que dans ce cas, $\Box\varphi$ est également vraie dans tous les mondes de M.

Soit en effet un monde quelconque $m_i \in M$. Supposons $\mathcal{M} \not\models_{m_i} \Box\varphi$. Cela signifie qu'il existe un monde $m_j \in M$ tel que $m_i R m_j$ et que : $\mathcal{M} \not\models_{m_i} \varphi$, ce qui contredit l'hypothèse que pour tout monde $m \in M$ (et donc en particulier pour m_j) on a $\mathcal{M} \models_m \varphi$. Donc : $\mathcal{M} \models_{m_i} \Box\varphi$.

Comme m_i était quelconque, cela vaut pour tous les mondes $m \in M$; donc : $\mathcal{M} \models \varphi$. Et comme $\mathcal{M}$ est également quelconque cela vaut pour tout modèle fondé sur un cadre quelconque et donc : $\models_K \Box\varphi$. Le même genre de raisonnement vaut pour les formules T-valides, S4-valides, etc.

Par contre, $\models_K \varphi \Rightarrow \Box\varphi$ dit tout autre chose, à savoir que si, dans un monde quelconque d'un modèle quelconque fondé sur un cadre quelconque, φ est vraie, alors φ est vraie dans tous les mondes accessibles de ce monde ; ce qui n'est nullement nécessaire (!!), rien n'interdisant que dans un monde m d'un modèle $\mathcal{M}$, φ ne soit vraie, et que, dans un monde accessible de m, la même formule soit fausse.

> La situation est très semblable à celle que l'on trouve en premier ordre standard. La règle de généralisation, que l'on peut formuler : si $\vdash \varphi$ alors $\vdash \forall x\varphi$, "dit" que si l'on a une déduction pour une formule φ dans laquelle figure éventuellement la variable libre x, alors la clôture universelle (sur x) de φ est également une thèse.
>
> En termes sémantiques, cela revient à admettre que puisque $\varphi[x]$ est vraie pour une interprétation quelconque de x (dans un domaine quelconque donné et pour une interprétation quelconque donnée des lettres de prédicats), $\varphi[x]$ est vraie pour toute interprétation. Cette règle ne fait que traduire une manière habituelle de raisonner (que l'on utilise ici sans cesse !), à savoir que lorsque l'on veut démontrer qu'une formule vaut de tous les éléments d'un domaine, il suffit de démontrer qu'elle vaut d'un élément quelconque de ce domaine (ie. sur lequel on ne fait aucune hypothèse additionnelle).
>
> Si maintenant, on considère le cas des déductions à partir d' ensembles de formules (admises à titre d'hypothèses, ou d'axiomes d'une théorie, par ex.), l'application de cette règle conduit a avoir, pour une formule quelconque, une déduction de la forme : $\varphi[x] \vdash \forall x\varphi[x]$. Mais, bien évidemment, on n'a pas

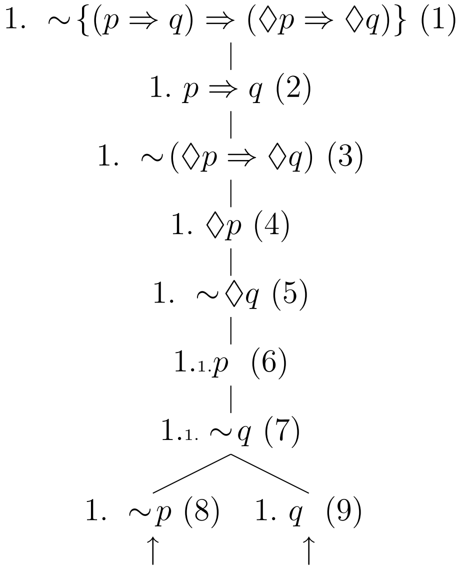
> $\vdash \varphi[x] \ \Rightarrow \forall x \varphi[x]$, ce qui reviendrait, en termes sémantiques, à affirmer que puisque il existe <u>une</u> interprétation de x pour laquelle $\varphi[x]$ est vraie, alors $\varphi[x]$ est vraie pour toute interprétation de x ; autrement dit, à affirmer que ce qui vaut d'un cas particulier, vaut de tous (l'anglais et les filles rousses de Calais).
>
> C'est pourquoi dans l'énoncé du théorème de la déduction en premier ordre, il faut préciser, d'une manière ou d'une autre, que cette règle ne s'applique pas aux "hypothèses", le plus simple étant d'admettre que les hypothèses sont des formules closes (phrases).

Les remarques qui précèdent s'étendent à toutes les déductions à partir d' "hypothèses" (i.e. à partir d'un ensemble Σ de formules), dans lesquelles on applique la règle N à une des hypothèses.

Considérons par ex. la déduction suivante de $\Diamond p \Rightarrow \Diamond q$ à partir de $p \Rightarrow q$ (sur le modèle de la justification de la règles R_2 et en admettant $\vdash_{\mathrm{K}} \Box(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\Diamond p \Rightarrow \Diamond q)$). On considère donc ici que $p \Rightarrow q$ est une "hypothèse", i.e. $\Sigma = \{p \Rightarrow q\}$:

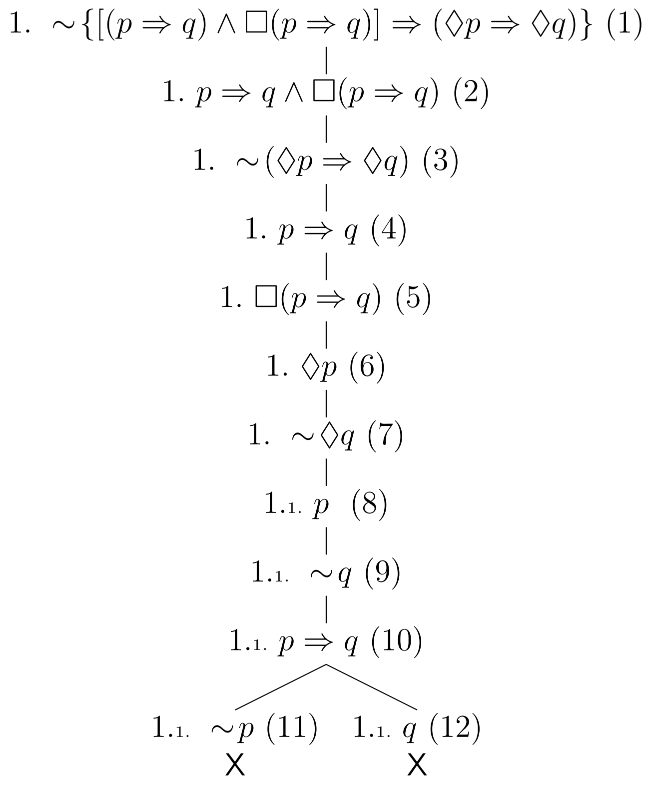
$p \Rightarrow q$	(1)	hypothèse
$\Box(p \Rightarrow q)$	(2)	N sur (1)
$\Box(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\Diamond p \Rightarrow \Diamond q)$	(3)	thèse admise
$\Diamond \mathbf{p} \Rightarrow \Diamond \mathbf{q}$,		MP sur (2), (3).

Pour vérifier que $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\Diamond p \Rightarrow \Diamond q)$ n'est pas une thèse de K, on peut faire l'arbre pour cette implication :



Explications : (2) et (3) sur (1) par la règle $\sim\Rightarrow$; (4), (5) sur (3) par la même règle ; (6) sur (4) par la règle $\Diamond$; (7) sur (5) par la règle $\sim\Diamond$ et enfin (8), (9) sur (2) par la règle $\Rightarrow$.

On voit que si l'arbre ne ferme pas, c'est que la fausseté de "$\Diamond p \Rightarrow \Diamond q$" dans "1." suppose seulement que dans "1.1." on ait "p" vraie et "q" fausse, ce qui n'est en rien incompatible avec le fait que "$p \Rightarrow q$" soit vraie en "1.". Par contre il est clair que cela serait incompatible si "$p \Rightarrow q$" devait être également vraie dans "1.1.". Or, en termes d'arbres, cela serait le cas si au lieu d'avoir seulement "$p \Rightarrow q$" dans l'antécédent de l'implication pour laquelle on a fait l'arbre, on avait également "$\Box(p \Rightarrow q)$, ce qui obligerait à écrire "1.1.$p \Rightarrow q$". A ce moment, l'arbre ferme comme on va le voir immédiatement :



Explications : (2) et (3) sur (1) par la règle $\sim\Rightarrow$; (4), (5) sur (3) par la règle $\wedge$; (6), (7) sur (3) par la règle $\sim\Rightarrow$; (8) sur (6) par la règle $\Diamond$; (9) sur (7) par la règle $\sim\Diamond$; (10) sur (5) par la règle $\Box$ et enfin (11), (12) sur (10) par la règle $\Rightarrow$. On n'a pas traité (4), puisque cela n'aurait conduit à rien d'intéressant.

Il est aisé de voir que l'adjonction de $\Box(p \Rightarrow q)$ correspond précisément au fait que dans la déduction de $\Diamond p \Rightarrow \Diamond q$ à partir de $p \Rightarrow q$, on a fait usage de la règle N sur "$p \Rightarrow q$" (qui n'est évidemment pas un axiome), ce qui revient donc à ajouter la prémisse : $\Box(p \Rightarrow q)$.

Si l'on en reste à K et en généralisant (mais en simplifiant encore beaucoup), on voit que la situation est, en gros, la suivante : lorsque dans une déduction à partir de $\Sigma \cup \{\psi\}$ (dans l'ex. précédent, Σ est vide), on fait usage une fois de la règle N sur ψ, on admet, en termes d'"arbres", que ψ, est non seulement "vraie" dans le "monde" de son préfixe, disons "$n.$", mais qu'elle l'est également dans tous les "mondes" de préfixe de la forme "$n.x.$" (i.e. les mondes accessibles de $n.$) ; ce qu'aucune règle pour les arbres ne prévoit. C'est pourquoi, dans l'arbre correspondant à la déduction, on devra, pour fermer, ajouter "$n.\ \Box\psi$", pour avoir "$n.x.\ \psi$".

4.1.3 Démonstration du théorème de la déduction pour K

On en arrive donc au théorème de la déduction pour le système K de modale propositionnelle. Pour le formuler, on définit préalablement la notion de "dépendance déductive" d'une formule ψ_j par rapport à une formule ψ_i, dans une déduction à partir d'hypothèses :

- ψ_j dépend déductivement de ψ_i si, soit $\psi_j = \psi_i$, soit ψ_j est obtenue, par *MP* ou par N à partir de formules dont au moins une dépend déductivement de ψ_i.

Théorème de la déduction : Si $\Sigma \cup \{\psi\} \vdash_{\mathrm{K}} \varphi$ et si dans la déduction de φ à partir de $\Sigma \cup \{\psi\}$ on a appliqué m fois la règle N à des formules dépendant déductivement de ψ, alors[3] :

$$\Sigma \vdash_{\mathrm{K}} (\Box^0\psi \wedge \Box^1\psi\wedge, \ldots, \wedge\ \Box^m\psi) \Rightarrow \varphi$$

Démonstration[4] :

Soit donc la déduction $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ de φ $(= \varphi_n)$ à partir de $\Sigma \cup \{\psi\}$ dans laquelle on a appliqué m fois N à des formules qui dépendent déductivement de ψ.

On démontre, par induction sur i $(1 \leq i \leq n)$ que, pour tout i, on a $\Sigma \vdash_{\mathrm{K}}$ $(\Box^0\psi\wedge, \ldots \wedge \Box^l\psi) \Rightarrow \varphi_i$, avec $l =$ nombre de fois que l'on a appliqué N à une formule

---

[3] "$\Box^k\psi$" signifie que "ψ" est précédé d'une suite de k symboles "$\Box$".

[4] Dans ses grandes lignes cette démonstration suit celle du théorème de la déduction pour la logique propositionnelle standard.

dépendant déductivement de ψ dans la déduction $\varphi_1, \ldots, \varphi_i$.

- Soit $i = 1$; alors φ_1 est soit un axiome, soit un élément de Σ, soit $\{\psi\}$.
  - φ_1 est un axiome ou un élément de Σ. On a alors la déduction suivante :

$$\begin{array}{lll}
\Sigma \vdash_{\mathrm{K}} \varphi_i & (1) & \text{axiome ou élément de } \Sigma \\
\Sigma \vdash_{\mathrm{K}} p \Rightarrow (q \Rightarrow p) & (2) & \text{loi dite "de simplification"} \\
\Sigma \vdash_{\mathrm{K}} \varphi_i \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi_i) & (3) & \textit{Sub} \text{ dans } (2) \\
\Sigma \vdash_{\mathrm{K}} \psi \Rightarrow \varphi_i & (4) & \textit{MP} \text{ sur } (1), (3)
\end{array}$$

  - $\varphi_i = \psi$. Par la loi d'identité on a : $\vdash_{\mathrm{K}} \psi (= \varphi_i) \Rightarrow \varphi_i$ et donc trivialement : $\Sigma \vdash_{\mathrm{K}} \psi \Rightarrow \varphi_i$[5].

- Hypothèse de récurrence : pour tout $j \leq i$, $\Sigma \vdash_{\mathrm{K}} (\Box^0 \psi \wedge, \ldots \wedge \Box^l \psi) \Rightarrow \varphi_j$, avec "$l$" $=$ nombre de fois que l'on a appliqué N à une formule dépendant déductivement de ψ dans la déduction $\varphi_1, \ldots, \varphi_j$.

- φ_i est obtenu par *MP* sur $\varphi_h (= \varphi_k \Rightarrow \varphi_i)$ et φ_k, avec $h, k < i$, et on suppose que N a été appliquée l^1 fois à des formules dépendant déductivement de ψ dans la déduction de φ_h, et l^2 fois etc. dans la déduction de φ_k. Il en résulte que φ_i est obtenu au terme de $l \geq l^1, l^2$ applications de N à une formule dépendant déductivement de ψ.

  Par hyp. de rec., on a donc :

  - (a) $\Sigma \vdash_{\mathrm{K}} (\Box^0 \psi \wedge, \ldots, \wedge \Box^{l^1} \psi) \Rightarrow \varphi_h$, et :
  - (b) $\Sigma \vdash_{\mathrm{K}} (\Box^0 \psi \wedge, \ldots, \wedge \Box^{l^2} \psi) \Rightarrow \varphi_k$

  On suppose $l^1 > l^2$ (indifférent) et donc on a[6] :

  - (b') $\Sigma \vdash_{\mathrm{K}} (\Box^0 \psi \wedge, \ldots, \wedge \Box^{l^1} \psi) \Rightarrow \varphi_k$

  Pour simplifier l'écriture on abrège $\Box^0 \psi \wedge, \ldots, \wedge \Box^{l^1} \psi$ en : $\overset{0-l^1}{\Box} \psi$.

---

[5] Dans ces deux cas, on voit que l'on est exactement dans la même situation qu'en propositionnelle standard, puisque l'on n'a pas pu encore utiliser la règle *N*.

[6] Par la "loi" en propositionnelle : $\vdash (p_1 \wedge, \ldots, \wedge p_n) \Rightarrow (p_1 \wedge, \ldots, \wedge p_m)$ si $n > m$ et par transitivité.

On a alors la déduction suivante[7] :

$\Sigma \vdash_{\mathrm{K}} \overset{0-l^1}{\Box}\,\psi \Rightarrow (\varphi_k \Rightarrow \varphi_i)$	(1)	(a) en remplaçant φ_h par sa df.
$\Sigma \vdash_{\mathrm{K}} \overset{0-l^1}{\Box}\,\psi \Rightarrow \varphi_k$	(2)	(b')
$\Sigma \vdash_{\mathrm{K}} [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \ \Rightarrow r)]$	(3)	loi dite "de Frege"
$\Sigma \vdash_{\mathrm{K}} [\overset{0-l^1}{\Box}\,\psi \Rightarrow (\varphi_k \Rightarrow \varphi_i)] \Rightarrow [(\overset{0-l^1}{\Box}\,\psi \Rightarrow \varphi_k) \Rightarrow (\overset{0-l^1}{\Box}\,\psi \ \Rightarrow \varphi_i)]$	(4)	*Sub* dans (3)
$\Sigma \vdash_{\mathrm{K}} [(\overset{0-l^1}{\Box}\,\psi \Rightarrow \varphi_k) \Rightarrow (\overset{0-l^1}{\Box}\,\psi \ \Rightarrow \varphi_i)]$	(5)	*MP* sur (1), (4)
$\Sigma \vdash_{\mathrm{K}} \overset{0-l^1}{\Box}\,\psi \ \Rightarrow \varphi_i$	(5)	*MP* sur (2), (5)

Or $l > l^1$, donc on a[8] : $\Sigma \vdash_{\mathrm{K}} (\Box^0\psi\wedge, \ldots, \wedge\Box^l\psi) \Rightarrow \varphi_i$.

- φ_i est obtenu par N sur φ_j avec $j < i$. Deux cas à considérer :
  - φ_j ne dépend pas déductivement de ψ ; on a la déduction suivante :

$\Sigma \vdash_{\mathrm{K}} \varphi_j$	(1)	puisque φ_j ne dépend pas de ψ
$\Sigma \vdash_{\mathrm{K}} \Box\varphi_j$	(2)	*N* sur (1)
$\Sigma \vdash_{\mathrm{K}} p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$	(3)	loi prop.
$\Sigma \vdash_{\mathrm{K}} \Box\varphi_j \Rightarrow (\psi \Rightarrow \Box\varphi_j)$	(4)	*Sub* dans (3)
$\Sigma \vdash_{\mathrm{K}} \psi \Rightarrow \Box\varphi_j$	(5)	*MP* sur (2), (4)
$\Sigma \vdash_{\mathrm{K}} \psi \Rightarrow \varphi_i$	(6)	puisque $\Box\varphi_j = \varphi_i$

  - φ_j dépend déductivement de ψ, et N a été appliquée l^1 fois à des formules dépendant déductivement de ψ ; d'où il résulte que dans la déduction de φ_i, N a été appliquée $l = l^1 + 1$ fois à des formules dépendant déductivement de ψ ; on a alors la déduction suivante :

$\Sigma \vdash_{\mathrm{K}} (\Box^0\psi\wedge, \ldots, \wedge\Box^{l^1}\psi) \Rightarrow \varphi_j$	(1)	par hyp. de rec.
$\Sigma \vdash_{\mathrm{K}} \Box(\Box^0\psi\wedge, \ldots, \wedge\Box^{l^1}\psi) \Rightarrow \Box\varphi_j$	(2)	*R1* sur (1).
$\Sigma \vdash_{\mathrm{K}} (\Box^1\psi\wedge, \ldots, \wedge\Box^{l^1+1}\psi) \Rightarrow \Box\varphi_j$	(3)	*Remp* dans (2)/Distrib.
$\Sigma \vdash_{\mathrm{K}} (\Box^1\psi\wedge, \ldots, \wedge\Box^{l^1+1}\psi) \Rightarrow \varphi_i$	(4)	puisque $\varphi_i = \Box\varphi_j$
$\Sigma \vdash_{\mathrm{K}} (\Box^0\psi \wedge \Box^1\psi, \ldots, \wedge\Box^{l^1+1}\psi) \Rightarrow \varphi_i$	(5)	affaiblissement à gauche.

---

[7] Il ne s'agit, là encore, que d'une adaptation de ce que l'on a fait pour démontrer le théorème dans la logique propositionnelle standard.

[8] Toujours en vertu de la loi évoquée note 6 et par transitivité.

Puisque la démonstration précédente vaut pour tout i $(1 \leq i \leq n)$, elle vaut pour $i = n$ et donc :

Si $\Sigma \cup \{\psi\} \vdash_{\mathrm{K}} \varphi$ et si, dans la déduction de φ à partir de $\Sigma \cup \{\psi\}$, N a été appliquée m fois à des formules dépendant déductivement de ψ, alors :

$$\Sigma \vdash_{\mathrm{K}} (\Box^0\psi\wedge, \ldots, \wedge\Box^m\psi) \Rightarrow \varphi.$$

Corollaire immédiat de ce théorème :

Si $\Sigma \cup \{\psi\} \vdash_{\mathrm{K}} \varphi$ et si, dans la déduction de φ à partir de $\Sigma \cup \{\psi\}$, N n'a pas été appliquée à des formules dépendant déductivement de ψ, alors :

$$\Sigma \vdash_{\mathrm{K}} \psi \Rightarrow \varphi.$$

Théorème de la déduction pour S4.

Le théorème précédent vaut pour tous les systèmes normaux et vaut donc en particulier pour S4 (et S5). Il se trouve cependant que l'Ax. **4** permet de le simplifier. En effet, supposons que l'on ait $\Sigma \cup \psi \vdash_{\mathrm{S4}} \varphi$ et que l'on ait appliqué, disons 3 fois, la règle N à des formules dépendant déductivement de ψ. Le théorème de la déduction établit qu'alors on a une déduction à partir de Σ de $(\psi \wedge \Box\psi \wedge \Box\Box\psi \wedge \Box\Box\Box\psi) \Rightarrow \varphi$, autrement dit que l'on a :

$$\Sigma \vdash_{\mathrm{S4}} (\psi \wedge \Box\psi \wedge \Box\Box\psi \wedge \Box\Box\Box\psi) \Rightarrow \varphi.$$

Il est aisé de voir que l'on aurait pu éviter d'utiliser la règle N les deux dernières fois, puisque si l'on a obtenu $\Box\psi$ par la première application de N (à ψ), il suffit ensuite de substituer dans l'Ax. **4**, pour avoir $\Box\psi \Rightarrow \Box\Box\psi$, puis de couper avec $\Box\psi$; on a alors $\Box\Box\psi$. La même manœuvre conduirait à déduire $\Box\Box\Box\psi$.

On peut donc d'ores et déjà reformuler le théorème de la déduction pour S4 de la manière suivante :

Si $\Sigma \cup \{\psi\} \vdash_{\mathrm{S4}} \varphi$ et si dans la déduction de φ à partir de $\Sigma \cup \{\psi\}$ on a appliqué au moins une fois la règle N à des formules dépendant déductivement de ψ, alors :

$$\Sigma \vdash_{\mathrm{S4}} (\psi \wedge \Box\psi) \Rightarrow \varphi$$

On peut cependant encore simplifier. Puisque **T** est un axiome de S4, si, dans les mêmes conditions que précédemment, on a appliqué une première fois la règle N à ψ, on a donc obtenu $\Box\psi$ et il est alors possible de retrouver ψ grâce à **T**. Si donc, dans la déduction originale de φ, certaines formules dépendaient de ψ, mais pas de $\Box\psi$, il suffirait de déduire la première de la deuxième, pour avoir une déduction équivalente. Le théorème de la déduction pour S4 (et donc pour S5) s'énonce donc :

Si $\Sigma \cup \{\psi\} \vdash_{\text{S4}} \varphi$ et si dans la déduction de φ à partir de $\Sigma \cup \{\psi\}$ on a appliqué au moins une fois la règle N à des formules dépendant déductivement de ψ, alors :

$$\Sigma \vdash_{\text{S4}} \Box\psi \Rightarrow \varphi$$

Dans l'exemple pris plus haut (p. 66, dans lequel $\Sigma = \{p \Rightarrow q\}$), on voit que la déduction "véritable" ne commence qu'à la ligne (2), c'est à dire avec "$\Box(p \Rightarrow q)$". Il se trouve, dans cet ex., que le seul usage de "$p \Rightarrow q$" est de permettre d'obtenir (2) grâce à N ; mais si cette hypothèse avait figuré dans la déduction d'autres formules (sans usage de N) alors on aurait pu retrouver ces déductions en substituant (1) à p dans **T** et en coupant avec (2).

4.1.4 Redéfinition de $\Sigma \vdash_{\text{S}} \varphi$; S-consistance.

Les difficultés que présente le théorème de la déduction en modale propositionnelle invite à définir d'une autre manière, plus commode, et dont on fera usage plus loin, ce que l'on entend par "φ est déductible dans S de l'ensemble d'hypothèses Σ ($\Sigma \vdash_{\text{S}} \varphi$), ainsi que ce que l'on entend par "ensemble S-consistant de formules", "S" désignant un système normal quelconque de logique modale.

S-déductibilité

Il s'agit simplement de contourner la difficulté posée par la règle N et de définir la S-déductibilité d'une formule φ à partir d'un ensemble Σ directement en terme de thèse de S de telle sorte que :
$\Sigma \vdash_{\text{S}} \varphi$ ssi

- soit $\Sigma = \emptyset$ et $\vdash_{\text{S}} \varphi$,
- soit il existe $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \Sigma$ et $\vdash_{\text{S}} (\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n) \Rightarrow \varphi$[9].

---

[9] En vertu de l'associativité de "$\wedge$" , on se permettra d'écrire une conjonction à plus de deux membres sans parenthéser. Par ailleurs, en vertu de la commutativité de "$\wedge$", l'ordre des conjoints dans une conjonction est indifférent.

On constate alors immédiatement qu'avec une telle définition la déduction dans K de $\Diamond p \Rightarrow \Diamond q$ à partir de l'ensemble $\{(p \Rightarrow q)\}$ (cf. p. 66) n'est plus admissible puisque $\nvdash_{\mathrm{K}} (p \Rightarrow q) \Rightarrow (\Diamond p \Rightarrow \Diamond q)$. Par contre la déduction de $\Diamond p \Rightarrow \Diamond q$ à partir de $\{\Box(p \Rightarrow q)\}$ est, elle, tout à fait admissible puisque $\vdash_{\mathrm{K}} \Box(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\Diamond p \Rightarrow \Diamond q)$.

Il est facile de constater que cela revient à interdire, dans une S-déduction à partir d'hypothèses, d'appliquer la règle N sur une des hypothèses ; en effet, par df., $\Sigma \vdash_{\mathrm{S}} \varphi$, ssi il existe $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \Sigma$ telles que $\vdash_{\mathrm{S}} (\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n) \Rightarrow \varphi$. Or dans la S-déduction $\theta_1, \ldots, \theta_m$ de l'implication $\theta_m = (\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n) \Rightarrow \varphi$ seuls figurent des axiomes de S, des formules obtenues par *Sub* sur un axiome ou des formules obtenues par N ou MP sur une ou deux formules précédents dans la suite. Aucune formule appartenant à Σ ne figure, en tant qu'hypothèse, dans cette déduction.

On montre que cette définition de $\Sigma \vdash_{\mathrm{S}} \varphi$ a toutes les propriétés attendues et, en particulier, que le théorème de la déduction, dans sa version classique, retrouve toute sa validité. Rappelons, au préalable, que puisque toutes les tautologies de CP sont des axiomes de tout système normal, on a, pour φ tautologique : $\vdash_{\mathrm{S}} \varphi$ et on peut faire usage des règles d'inférence dérivées (cf. p. 7).

Réflexivité : si $\varphi \in \Sigma$, alors $\Sigma \vdash_{\mathrm{S}} \varphi$. Immédiat : $\varphi \in \Sigma$ et $\vdash_{\mathrm{S}} \varphi \Rightarrow \varphi$ et donc par la définition ci-dessus, $\Sigma \vdash_{\mathrm{S}} \varphi$.

Transitivité : si $\Sigma \vdash_{\mathrm{S}} \psi$ et $\{\psi\} \vdash_{\mathrm{S}} \varphi$ alors $\Sigma \vdash_{\mathrm{S}} \varphi$. En effet : puisque $\Sigma \vdash_{\mathrm{S}} \psi$, il existe $\theta_1, \ldots, \theta_n \in \Sigma$ telles que : $\vdash_{\mathrm{S}} (\theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_n) \Rightarrow \psi$; et puisque $\{\psi\} \vdash_{\mathrm{S}} \varphi$, $\vdash_{\mathrm{S}} \psi \Rightarrow \varphi$; donc par Syll. : $\vdash_{\mathrm{S}} (\theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_n) \Rightarrow \varphi$, d'où : $\Sigma \vdash_{\mathrm{S}} \varphi$.

Affaiblissement à gauche : si $\Sigma \vdash \varphi$ et $\Sigma \subseteq \Gamma$, alors $\Gamma \vdash \varphi$. En effet : puisque $\Sigma \vdash \varphi$, il existe $\theta_1, \ldots, \theta_n \in \Sigma$ telles que : $\vdash_{\mathrm{S}} (\theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_n) \Rightarrow \varphi$ et comme $\Sigma \subseteq \Gamma$, $\theta_1, \ldots, \theta_n \in \Gamma$. Il existe donc $\theta_1, \ldots, \theta_n \in \Gamma$ telles que $\vdash_{\mathrm{S}} (\theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_n) \Rightarrow \varphi$, d'où : $\Gamma \vdash_{\mathrm{S}} \varphi$.

Théorème de la déduction : $\Sigma \cup \{\psi\} \vdash_{\mathrm{S}} \varphi$ ssi $\Sigma \vdash_{\mathrm{S}} \psi \Rightarrow \varphi$. Seul le sens → est intéressant. Deux cas à considérer :

1. Il existe $\theta_1, \ldots, \theta_n \in \Sigma$ telles que : $\vdash_{\mathrm{S}} (\theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_n) \Rightarrow \varphi$ et, pour tout i $(1 \leq i \leq n)$, $\psi \neq \theta_i$. On a alors la micro déduction suivante :

   (1) $\vdash_{\mathrm{S}} (\theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_n) \Rightarrow \varphi$

(2) $\vdash_{\mathrm{S}} \varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$ (*Sub.* dans taut.)

(3) $\vdash_{\mathrm{S}} (\theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_n) \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$ (Syll. sur (1), (2)).

Donc, puisque $\theta_1, \ldots, \theta_n \in \Sigma$, $\Sigma \vdash_{\mathrm{S}} \psi \Rightarrow \varphi$.

2. Il existe $\theta_1, \ldots, \theta_n \in \Sigma$ telles que : $\vdash_{\mathrm{S}} (\theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_n) \Rightarrow \varphi$ et, pour un i $(1 \leq i \leq n)$, $\psi = \theta_i$. On a alors la micro déduction suivante :

   (1) $\vdash_{\mathrm{S}} (\theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_{i-1} \wedge \psi \wedge \theta_{i+1} \wedge \ldots \wedge \theta_n) \Rightarrow \varphi$

   (2) $\vdash_{\mathrm{S}} [(\theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_{i-1} \wedge \ \theta_{i+1} \wedge \ldots \wedge \theta_n) \wedge \psi] \Rightarrow \varphi$ (*Remp*/associativité + commutativité de "$\wedge$" sur (1))

   (3) $\vdash_{\mathrm{S}} (\theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_{i-1} \wedge \ \theta_{i+1} \wedge \ldots \wedge \theta_n) \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$ (Imp-exp sur (2))

   Or $\theta_1, \ldots \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \ldots, \theta_n \in \Sigma$; donc : $\Sigma \vdash_{\mathrm{S}} \psi \Rightarrow \varphi$.

Ensemble de formules S-consistant

En terme de déductibilité, on peut alors définir ce que l'on entend par : " ensemble de formules S-inconsistant" : Σ est S-inconsistant ssi il existe $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \Sigma$ telles que $\vdash_{\mathrm{S}} \sim(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n)$. Un ensemble est S-consistant ssi il n'est pas S-inconsistant.

On montre que cette définition est tout à fait raisonnable.

1. Σ est S-consistant ssi il n'existe pas φ telle que $\Sigma \vdash_{\mathrm{S}} \varphi$ et $\Sigma \vdash_{\mathrm{S}} \sim\varphi$.

   Dans le sens $\rightarrow$, par contraposition. Supposons qu'il existe φ telle que $\Sigma \vdash_{\mathrm{S}} \varphi$ et $\Sigma \vdash_{\mathrm{S}} \sim\varphi$. Il existe donc $\psi_1, \ldots, \psi_m \in \Sigma$ et $\theta_1, \ldots, \theta_n \in \Sigma$, telles que l'on a la déduction suivante (pour simplifier on fait $\Psi = \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_m$ et $\Theta = \theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_n$:

(1)	$\vdash_{\mathrm{S}} \Psi \Rightarrow \varphi$	par hypothèse
(2)	$\vdash_{\mathrm{S}} \Theta \Rightarrow \sim\varphi$	par hypothèse
(3)	$\vdash_{\mathrm{S}} (\Psi \Rightarrow \varphi) \wedge (\Theta \Rightarrow \sim\varphi)$	Adj. sur (1), (2)
(4)	$\vdash_{\mathrm{S}} [(\Psi \Rightarrow \varphi) \wedge (\Theta \Rightarrow \sim\varphi)] \Rightarrow [(\Psi \wedge \Theta) \Rightarrow (\varphi \wedge \sim\varphi)]$	*Sub* dans la taut. : $[(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow s)] \Rightarrow [(p \wedge q) \Rightarrow (r \wedge s)]$
(5)	$\vdash_{\mathrm{S}} (\Psi \wedge \Theta) \Rightarrow (\varphi \wedge \sim\varphi)$	MP sur (3), (4)
(6)	$\vdash_{\mathrm{S}} [(\Psi \wedge \Theta) \Rightarrow (\varphi \wedge \sim\varphi)] \Rightarrow \sim(\Psi \wedge \Theta)$	*Sub.* dans la taut. : $[p \Rightarrow (q \wedge \sim q)] \Rightarrow \sim p$
(7)	$\vdash_{\mathrm{S}} \sim(\Psi \wedge \Theta)$	MP sur (5), (6))

Or $\sim(\Psi \wedge \Theta) = \sim(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_m \wedge \theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_n)$ et $\psi_1, \ldots, \psi_m, \theta_1, \ldots, \theta_n \in \Sigma$; donc Σ est S-inconsistant.

Dans le sens ←, par contraposition. Supposons Σ S-inconsistant. Alors il existe $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \Sigma$ telles que $\vdash_{\mathrm{S}} \sim(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n)$. On a alors les déductions suivantes (en faisant $\Psi = \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n$) :

(1)	$\vdash_{\mathrm{S}} \sim\Psi$	par hypothèse
(2)	$\vdash_{\mathrm{S}} \sim\Psi \Rightarrow (\Psi \Rightarrow \varphi)$	*Sub* dans la taut. : $\sim p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
(3)	$\vdash_{\mathrm{S}} \Psi \Rightarrow \varphi$	MP sur (1), (2)

Ainsi que :

(1')	$\vdash_{\mathrm{S}} \sim\Psi$	par hypothèse
(2')	$\vdash_{\mathrm{S}} \sim\Psi \Rightarrow (\Psi \Rightarrow \sim\varphi)$	*Sub* dans la taut. : $\sim p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
(3')	$\vdash_{\mathrm{S}} \Psi \Rightarrow \sim\varphi$	MP sur (1), (2)

Or $\Psi = \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n$ et $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \Sigma$; donc, à la fois : $\Sigma \vdash \varphi$ (par (3)) et $\Sigma \vdash \sim\varphi$ (par (3')).

2. Σ est S-inconsistant ssi pour une formule φ, $\Sigma \vdash_{\mathrm{S}} \varphi \wedge \sim\varphi$. En effet :

   Dans le sens → : puisque Σ est S-inconsistant, il existe $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \Sigma$ telles que : $\vdash_{\mathrm{S}} \sim(\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n)$. On fait $\Psi = \psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n$. On a la déduction suivante en partant de (3) et (3') déjà déduits ci-dessus à partir de $\sim\Psi$:

(1)	$\vdash_{\mathrm{S}} \Psi \Rightarrow \varphi$	= (3) ci-dessus
(2)	$\vdash_{\mathrm{S}} \Psi \Rightarrow \sim\varphi$	= (3') ci-dessus
(3)	$\vdash_{\mathrm{S}} \Psi \Rightarrow (\varphi \wedge \sim\varphi)$	Comp. sur (1), (2)

Or $\Psi = \psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n$ et $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \Sigma$, donc : $\Sigma \vdash_S \varphi \wedge {\sim}\varphi$.

Dans le sens ← : puisque $\Sigma \vdash_S \varphi \wedge {\sim}\varphi$, il existe $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \Sigma$ telles que : $\vdash_S (\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n) \Rightarrow (\varphi \wedge {\sim}\varphi)$. On fait $\Psi = \psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n$. On a la déduction suivante :

(1)	$\vdash_S \Psi \Rightarrow (\varphi \wedge {\sim}\varphi)$	par hypothèse
(2)	$\vdash_S [\Psi \Rightarrow (\varphi \wedge {\sim}\varphi)] \Rightarrow {\sim}\Psi$	*Sub* dans la taut. : $[p \Rightarrow (q \wedge {\sim}q)] \Rightarrow {\sim}p$
(3)	$\vdash_S {\sim}\Psi$	MP sur (1), (2)

Or $\Psi = \psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n$ et $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \Sigma$, donc : Σ est inconsistant.

3. Σ est S-consistant ssi il existe au moins une formule φ telle que $\Sigma \nvdash_S \varphi$.En effet :

   Dans le sens → : si Σ est S-consistant alors, par ce qui précède, il n'existe pas de formule φ telle que $\Sigma \vdash \varphi$ et $\Sigma \vdash {\sim}\varphi$. On est donc assuré qu'il existe au moins une formule, φ ou ${\sim}\varphi$, qui n'est pas déductible de Σ (éventuellement, ni l'une ni l'autre ne l'est).

   Ou bien, par contraposition : si pour tout φ, $\Sigma \vdash \varphi$, alors évidemment aussi bien ψ que ${\sim}\psi$ sont déductibles de Σ, et donc, par le lemme précédent, Σ est S-inconsistant.

   Dans le sens ← Immédiat par contraposition : si Σ est S-inconsistant, alors par 2. ci-dessus, $\Sigma \vdash \varphi \wedge {\sim}\varphi$ pour au moins une formule φ ; et donc pour toute formule ψ, on a la nano-déduction suivante :
   $\Sigma \vdash \varphi \wedge {\sim}\varphi$
   $\Sigma \vdash (\varphi \wedge {\sim}\varphi) \Rightarrow \psi$, substitution dans la tautologie : $(p \wedge {\sim}p) \Rightarrow q$
   $\Sigma \vdash \psi$, *M.P.* sur ce qui précède.

4. $\Sigma \vdash_S \varphi$ ssi $\Sigma \cup \{{\sim}\varphi\}$ est S-inconsistant .
   La démonstration est très proche de celle du théorème correspondant en propositionnelle (cf. théorème 4. 3. 3., p. 10 du fascicule). On la redonne, simplifiée, pour mémoire :

Dans le sens $\rightarrow$:

(1)	$\Sigma \vdash_{\mathrm{S}} \varphi$	par hypothèse
(2)	$\Sigma \cup \{\sim\varphi\} \vdash_{\mathrm{S}} \varphi$	affaiblissement à gauche
(3)	$\Sigma \cup \{\sim\varphi\} \vdash_{\mathrm{S}} \sim\varphi$	réflexivité de "$\vdash_{\mathrm{S}}$"
(4)	$\Sigma \cup \{\sim\varphi\} \vdash_{\mathrm{S}} (\varphi \wedge \sim\varphi)$	Comp. sur (2) (3)

Donc par 2. ci-dessus, $\Sigma \cup \{\sim\varphi\}$ est S-inconsistant.

Dans le sens $\leftarrow$: puisque $\Sigma \cup \{\sim\varphi\}$ est S-inconsistant, il existe $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \Sigma$ telles que :

$\vdash_{\mathrm{S}} \sim(\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n \wedge \sim\varphi)$[10], c'est à dire telles que :

$\vdash_{\mathrm{S}} (\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n) \Rightarrow \varphi$

Or $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \Sigma$, donc : $\Sigma \vdash_{\mathrm{S}} \varphi$.

4.2 Complétude sémantique des systèmes axiomatiques

4.2.1 Marche de la démonstration.

On veut démontrer que, étant donné une classe $\mathcal{C}$ de cadres, et un système (axiomatique) S de logique modale (T, B, S4,...), pour tout φ, *si* φ est $\mathcal{C}$-valide *alors* $\vdash_{\mathrm{S}} \varphi$ (i.e. φ est une thèse de S)[11]. Par ex. si $\mathcal{C}_r$ est la classe des cadres réflexifs, on cherche à démontrer que si une formule φ est valide dans $\mathcal{C}_r$, alors φ est une thèse de T ($\vdash_{\mathrm{T}} \varphi$).

Pour ce faire, on définit, relativement à un système S, un modèle que l'on appelle le "modèle canonique", $\mathcal{M}_c^s$ de S et on démontre que, pour toute formule φ, $\mathcal{M}_c^s \vDash \varphi$ ssi $\vdash_{\mathrm{S}} \varphi$.

On raisonne alors de la manière suivante : si la relation R du modèle canonique $\mathcal{M}_c^s$ de S est réflexive (par ex.), - ce qu'il faudra démontrer -, alors $\mathcal{M}_c^s$ est fondé sur un cadre $F \in \mathcal{C}_r$ ($\mathcal{C}_r$: classe des cadres réflexifs) ; d'où il suit que si une formule φ est $\mathcal{C}_r$-valide alors elle est *a fortiori* $\mathcal{M}_c^s$-valide et donc : $\vdash_{\mathrm{S}} \varphi$.

---

[10] On admet que Σ est S-consistant, sinon trivialement $\Sigma \vdash_{\mathrm{S}} \varphi$.

[11] Dans l'autre sens, la démonstration a été fournie ci-dessus, section 2.2.2, p. 34.

4.2.2 Définition du modèle canonique d'un système S de logique modale.

Définitions et théorèmes préalables.

Rappel : un ensemble de formule Γ est maximal S-consistant, s'il n'existe par d'ensemble S-consistant Γ' tel que $\Gamma \subseteq \Gamma'$, ou, ce qui revient au même, s'il n'existe pas de formule φ telle que $\varphi \notin \Gamma$ et que $\Gamma \cup \{\varphi\}$ soit S-consistant.

On admettra sans démonstration ce qui suit (cf. cours de théorie des modèles).

Théorème de Lindenbaum : tout ensemble S-consistant peut être étendu à un ensemble maximal S-consistant.

Soit Γ, un ensemble de formules maximal S-consistant, alors :

- MC1 : si $\Gamma \vdash_{\mathrm{S}} \varphi$ alors $\varphi \in \Gamma$ [12].
- MC2 : pour tout φ, $\varphi \in \Gamma$ ou $\sim\varphi \in \Gamma$, mais pas les deux.
- MC3 : $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ ssi $\varphi \in \Gamma$ ou $\psi \in \Gamma$.
- MC3' : $\varphi \ \wedge \psi \in \Gamma$ ssi $\varphi \in \Gamma$ et $\psi \in \Gamma$.
- MC4 : si $\varphi \in \Gamma$ et $\varphi \Rightarrow \psi \in \Gamma$ alors $\psi \in \Gamma$.
- MC5 : $\vdash_{\mathrm{S}} \varphi$ ssi, pour tout ensemble Γ maximal S-consistant, $\varphi \in \Gamma$ [13].

Modèle canonique d'un système S

L'idée qui préside à la construction du modèle canonique d'un système S, $\mathcal{M}_c^s =< M, R, i >$, est que la vérité d'une formule dans un monde $\in M$ équivaille à son appartenance à ce monde, autrement dit : pour tout φ et pour tout $m \in M$, $\mathcal{M}_c^s \vDash_m \varphi$ ssi $\varphi \in m$.

On vient de rappeler (MC5) que les thèses de S appartiennent à tous les maximaux S-consistants. Il "suffit" alors de définir M comme l'ensemble des maximaux S-consistants, pour assimiler validité dans $\mathcal{M}_c^s$ et appartenance à tous les mondes de

---

[12] Rappel, à tout hasard, de la démonstration : supposons $\varphi \notin \Gamma$, alors, comme Γ est maximal, $\Gamma \cup \{\varphi\}$ est S-inconsistant et, par le théorème 4. (p. 76), $\Gamma \vdash_{\mathrm{S}} \sim\varphi$; or $\Gamma \vdash_{\mathrm{S}} \varphi$, donc, par le théorème 1. (p. 74), Γ est S-inconsistant, contrairement à l'hypothèse. Donc $\varphi \in \Gamma$.

[13] Ce dernier théorème n'est qu'une suite de MC1 et de la règle d'affaiblissement à gauche : si $\vdash_{\mathrm{S}} \varphi$, c'est à dire, si $\emptyset \vdash_{\mathrm{S}} \varphi$, alors, comme, pour tout Σ, $\emptyset \subseteq \Sigma$, pour tout Σ, $\Sigma \vdash_S \varphi$ (affaiblissement). Donc, en particulier, pour tout Γ max. S-cons, $\Gamma \vdash_S \varphi$ et donc, en vertu de MC1, pour tout Γ maximal S-consistant, $\varphi \in \Gamma$.

M, i.e. à tous les maximaux S-consistants ; on aura ainsi l'équivalence : validité dans $\mathcal{M}_c^s$ / thèse de S.

Pour la relation : pour que $\Box\varphi$, appartenant à un monde m_i soit vraie dans m_i, il faut que φ soit vraie dans tous les mondes accessibles de m_i, ce qui en vertu de ce que l'on veut et que l'on démontrera (pour tout $m \in M$, $\mathcal{M}_c^s \vDash_m \varphi$ ssi $\varphi \in m$), revient à l'appartenance de φ à tous les mondes accessibles de m_i. Ce qui suggère la définition suivante :

$m_i R m_j$ ssi pour tout φ, si $\Box\varphi \in m_i$ alors $\varphi \in m_j$.

On note $\Box^*(m_i)$ l'ensemble des formules φ, telles que $\Box\varphi$ appartienne à m_i, autrement dit : $\Box^*(m_i) = \{\varphi : \Box\varphi \in m_i\}$.

La définition de R revient alors à : $m_i R m_j$ ssi $\Box^*(m_i) \subseteq m_j$.

Une telle définition doit cependant être compatible avec le fait que, si une formule de la forme $\Diamond\varphi$ appartient à m_i, il doit exister un monde accessible de m_i auquel appartient φ, monde qui, en vertu de la définition de R ci-dessus, inclut l'ensemble de formules $\Box^*(m_i)$. Pour s'assurer qu'il existe un tel monde, il suffit de prouver que l'ensemble $\Box^*(m_i) \cup \{\varphi\}$ est S-consistant ; si cet ensemble est S-consistant, il peut être étendu par Lindenbaum, à un maximal S-consistant, c'est à dire à un monde auquel appartient φ et qui, incluant $\Box^*(m_i)$, est accessible de m_i par la définition ci-dessus de R

On démontre donc :

R1 : si $\Diamond\varphi \in m_i$, alors $\Box^*(m_i) \cup \{\varphi\}$ est S-consistant (ou, de manière équivalente : si $\sim\Box\varphi \in m_i$, alors $\Box^*(m_i) \cup \{\sim\varphi\}$ est S-consistant.

Par contraposition : si $\Box^*(m_i) \cup \{\varphi\}$ est S-inconsistant alors m_i est S-inconsistant. En effet, on a :

si $\Box^*(m_i) \cup \{\varphi\}$ est S-inconsistant, alors, par df., il existe $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \Box^*(m_i)$, tels que $\vdash_{\mathrm{S}} \sim\{\psi_1 \wedge, \ldots, \wedge\psi_n \wedge \varphi\}$, ce qui revient à :

$\vdash_{\mathrm{S}} \{\psi_1 \wedge, \ldots, \wedge\psi_n\} \Rightarrow \sim\varphi$, donc, par la règle dérivé R_1 :

$\vdash_{\mathrm{S}} \Box\{\psi_1 \wedge, \ldots, \wedge\psi_n\} \Rightarrow \Box \sim\varphi$; comme (distributivité $\Box/\wedge$) : $\Box\{\psi_1 \wedge, \ldots, \wedge\psi_n\}$ est équivalent à $\{\Box\psi_1 \wedge, \ldots, \wedge\Box\psi_n\}$, on a par *Remp.* :

$\vdash_{\mathrm{S}} \{\Box\psi_1 \wedge, \ldots, \wedge\Box\psi_n\} \Rightarrow \Box \sim\varphi$ et donc :

$\vdash_{\mathrm{S}} \sim\{\Box\psi_1 \wedge, \ldots, \wedge\Box\psi_n \wedge \sim\Box \sim\varphi\}$, autrement dit :

$\vdash_{\mathrm{S}} \sim\{\Box\psi_1 \wedge, \ldots, \wedge\Box\psi_n \wedge \Diamond\varphi\}$.

Or les formules $\Box\psi_1, \ldots, \Box\psi_n, \Diamond\varphi \in m_i$ et donc m_i est S-inconsistant, contrairement à l'hypothèse (m_i maximal *S-consistant*[14]).

Donc : $\Box^*(m_i) \cup \{\varphi\}$ est S-consistant.
Cet ensemble peut alors être étendu à un maximal S-consistant incluant $\Box^*(m_i)$, donc accessible de m_i, et auquel appartient φ, cqfd.

On peut donc définir, le modèle canonique d'un système S, $\mathcal{M}_c^s = < M, R, i >$, par :

- M = ensemble des maximaux S-consistants,
- $m_i R m_j$ ssi $\Box^*(m_i) \subseteq m_j$,
- $m_i \in i(p)$ ssi $p \in m_i$.

Vraie dans un monde / appartenance à ce même monde.

On démontre maintenant : pour toute formule φ et tout monde m_i, $\mathcal{M}_c^s \vDash_{m_i} \varphi$ ssi $\varphi \in m_i$.

Par récurrence sur le degré des formules :

1. pour φ de degré 0, et de la forme p, cela vaut par df. de i : $\mathcal{M}_c^s \vDash_{m_i} p$ ssi $m_i \in i(p)$ ssi $p \in m_i$.

   Hypothèse de rec. : pour toute formule φ de degré $< n$ et tout monde m_i, $\mathcal{M}_c^s \vDash_{m_i} \varphi$ ssi $\varphi \in m_i$.

2. Pour les formules de degré n et de la forme $\sim\psi$, $\psi \wedge \theta$, $\psi \vee \theta$, $\psi \Rightarrow \theta$, *como siempre.*
3. Soit φ de degré n et de la forme $\Box\psi$.
   (a) dans le sens $\leftarrow$: si $\Box\psi \in m_i$, alors (par df. de R) pour tout m_j tel que. $m_i R m_j$, $\psi \in m_j$ et donc, (par hyp. de rec.) $\mathcal{M}_c^s \vDash_{m_j} \psi$; d'où : $\mathcal{M}_c^s \vDash_{m_i} \Box\psi$ et donc $\mathcal{M}_c^s \vDash_{m_i} \varphi$.
   (b) dans le sens $\rightarrow$, on contrapose : si $\Box\psi \notin m_i$, alors (m_i, max. S-cons, MC2) $\sim\Box\psi \in m_i$; on a démontré ci-dessus (**R1**) que $\Box^*(m_i) \cup \{\sim\psi\}$ est S-consistant et peut donc être étendu à un max. S-cons. m_j, tel que $m_i R m_j$.

---

[14] Cette petite démonstration ne suppose que la *S-consistance* de l'ensemble m_i, et vaut donc pour tout ensemble consistant de formules, qu'il soit, ou ne soit pas, maximal.

> Comme $\sim\psi \in m_j$, $\psi \notin m_j$ (m_j, max. cons.) et donc, par hyp. de rec. $\mathcal{M}_c^s \nvDash_{m_j} \psi$. D'où il résulte : $\mathcal{M}_c^s \nvDash_{m_i} \Box\psi$. Donc, par contraposition : si $\mathcal{M}_c^s \vDash_{m_i} \Box\psi$ alors $\Box\psi \in m_i$.

On a donc démontré :

R2 : Pour toute formule φ et tout monde m_i, $\mathcal{M}_c^s \ \vDash_{m_i} \varphi$ ssi $\varphi \in m_i$.

Achèvement de la démonstration.

Il reste maintenant à démontrer qu'une formule est une thèse de S ssi elle est valide dans $\mathcal{M}_c^s$, i.e. : $\vdash_{\text{S}} \varphi$ ssi $\mathcal{M}_c^s \vDash \varphi$.

- Dans le sens → : on sait (MC5) que si $\vdash_{\text{S}} \varphi$, alors $\varphi \in m_i$, pour tout m_i (rappel : tous les m_i sont max. S-cons.), et donc, par **R2**, pour tout $m_i, \mathcal{M}_c^s \vDash_{m_i} \varphi$.

- Dans le sens ←, par contraposition : si $\nvdash_{\text{S}} \varphi$, alors $\{\sim\varphi\}$ est S-consistant (corollaire immédiat du théorème 4. p. 76) et peut donc être étendu à un max. S-cons. m_j ; comme $\sim\varphi \in m_j$, par **R2** on a : $\mathcal{M}_c^s \vDash_{m_j} \sim\varphi$; d'où $\mathcal{M}_c^s \nvDash_{m_j} \varphi$; φ n'est donc pas $\mathcal{M}_c^s$-valide.

Il résulte des deux points précédents que : $\vdash_{\text{S}} \varphi$ ssi $\mathcal{M}_c^s \vDash \varphi$.

4.2.3 Complétude des différents systèmes d'axiomes

Il reste à montrer que les cadres sur lesquels sont fondés les modèles canoniques des différents systèmes K, T, S4, B, S5 de logique modale sont respectivement quelconques, réflexifs, réflexifs et transitifs, réflexifs et symétriques, équivalents[15].

Le principe de ces démonstrations est le suivant : par définition de la relation R des modèles canoniques, un monde m_j est accessible d'un autre, m_i, ssi $\Box^*(m_i) \subseteq m_j$. Si donc, en général, on veut montrer qu'un monde m_j est accessible d'un monde m_i, il faut montrer que, pour une formule quelconque φ, si $\Box\varphi \in m_i$ alors $\varphi \in m_j$.

---

[15] Le cas de D est laissé en exercice ; nous envisagerons également le système un peu plus exotique : **K** + **G**.

Comme cela vaut pour n'importe quelle formule et n'importe quel monde, cela vaut en général et donc on en tire $\Box^*(m_i) \subseteq m_j$ et donc que $m_i R m_j$.

Si, de plus, on tient compte du fait que les différents axiomes appartiennent à tous les mondes et donc à m_i, on pourra alors établir que la relation d'accessibilité a telle ou telle propriété formelle.

Ainsi, par ex., si l'on veut montrer que R est réflexive, il suffit de montrer que, quel que soit le monde m_i et quelle que soit la formule φ, si $\Box\varphi \in m_i$ alors $\varphi \in m_i$ et donc que : $\Box^*(m_i) \subseteq m_i$. Comme cela vaut quel que soit le monde m_i, cela vaut pour tout monde et donc, par définition de R, pour tout monde m_i, $m_i R m_i$; R est donc réflexive[16].

1. Pour K, c'est trivial puisque le modèle canonique de K est évidemment fondé sur un cadre qui appartient à la classe de tous les cadres.

2. Pour T : soit φ, m_i quelconques et $\Box\varphi \in m_i$, à démontrer : $\varphi \in m_i$ et donc $m_i R m_i$ (réflexivité). Comme $\Box\varphi \Rightarrow \varphi$ est une thèse de T, $\Box\varphi \Rightarrow \varphi \in m_i$, par MC5 ; et par MC4, puisque par hyp. $\Box\varphi \in m_i$, on a : $\varphi \in m_i$. Comme cela vaut pour tout φ, tel que $\Box\varphi \in m_i$, on a donc $\Box^*(m_i) \subseteq m_i$; et comme cela vaut pour tout monde m_i, on a par df. de R : pour tout monde m_i, $m_i R m_i$. R est donc réflexive[17].

3. Pour S4 : soit φ, m_i, m_j, m_k quelconques, avec $m_i R m_j$, $m_j R m_k$ et $\Box\varphi \in m_i$; à démontrer : $\varphi \in m_k$ et donc $m_i R m_k$ (transitivité).

   Comme $\Box\varphi \Rightarrow \Box\Box\varphi$ est une thèse de S4, $\Box\varphi \Rightarrow \Box\Box\varphi \in m_i$, par MC5.

   Par MC4, puisque par hyp. $\Box\varphi \in m_i$, on a : $\Box\Box\varphi \in m_i$; d'où, $\Box\varphi \in m_j$, puisque $m_i R m_j$; et $\varphi \in m_k$, puisque $m_j R m_k$. Donc, par def. de R, $m_i R m_k$. Réflexivité par **T**.

4. Pour B : soit φ, m_i, m_j, quelconques, avec $m_i R m_j$ et $\Box\varphi \in m_j$; à démontrer : $\varphi \in m_i$ et donc $m_j R m_i$ (symétrie).

   Par contraposition : on montre que si $\varphi \notin m_i$ alors $\Box\varphi \notin m_j$.

   Soit $\varphi \notin m_i$; alors $\sim\varphi \in m_i$, par MC2.

---

[16] En vertu des règles d'évaluation on devrait dire, par ex. : si $\mathcal{M}_c^s \vDash_{m_i} \Box\varphi$ et $m_i R m_j$, alors $\mathcal{M}_c^s \vDash_{m_i} \varphi$; mais en vertu de **R2**, on peut dire cela en terme d'appartenance : si $\Box\varphi \in m_i$ et $m_i R m_j$, alors $\varphi \in m_j$. Même chose pour $\sim\Box$, $\Diamond$ et $\sim\Diamond$. On utilisera donc cette manière de s'exprimer.

[17] Ces dernières remarques, à partir de "Comme cela vaut pour tout $\varphi\ldots$", valent, avec les adaptations nécessaires, pour les démonstrations suivantes ; on ne les répétera pas

Comme $\sim\varphi \Rightarrow \Box\Diamond\sim\varphi$ est une thèse de B, $\sim\varphi \Rightarrow \Box\Diamond\sim\varphi \in m_i$, par MC5. Par MC4, puisque on vient de voir que $\sim\varphi \in m_i$, on a : $\Box\Diamond\sim\varphi \in m_i$; d'où $\Diamond\sim\varphi \in m_j$, i.e. $\sim\Box\varphi \in m_j$, et donc, par MC2, $\Box\varphi \notin m_j$. Donc, par contraposition, si $\Box\varphi \in m_j$, $\varphi \in m_i$, d'où, par def. de R, m_jRm_i. Réflexivité par **T**.

5. Pour S5 : comme **T**, **4** et **B** appartiennent à S5, R est réflexive transitive et symétrique, i.e. R est une relation d'équivalence. Ne soyons cependant pas paresseux !

   Démonstration directe (on démontre que R est euclidienne) : soit φ, m_i, m_j, m_k, quelconques, avec m_iRm_j, m_iRm_k et $\Box\varphi \in m_j$; à démontrer : $\varphi \in m_k$ et donc m_jRm_k.
   Par contraposition : on montre que si $\varphi \notin m_k$ alors $\Box\varphi \notin m_j$.
   Soit $\varphi \notin m_k$; alors, puisque m_iRm_k, $\Box\varphi \notin m_i$; par MC2, $\sim\Box\varphi \in m_i$, i.e. : $\Diamond\sim\varphi \in m_i$.
   Comme $\Diamond\sim\varphi \Rightarrow \Box\Diamond\sim\varphi$ est une thèse de S5, $\Diamond\sim\varphi \Rightarrow \Box\Diamond\sim\varphi \in m_i$, par MC5.
   Par MC4, puisque on vient de voir que $\Diamond\sim\varphi \in m_i$, on a : $\Box\Diamond\sim\varphi \in m_i$; or m_iRm_j, donc $\Diamond\sim\varphi \in m_j$, i.e. $\sim\Box\varphi \in m_j$ et donc, par MC2, $\Box\varphi \notin m_j$.
   Donc, par contraposition, si $\Box\varphi \in m_j$, $\varphi \in m_k$, d'où, par def. de R, m_jRm_k.
   Réflexivité par **T**.

   R est donc euclidienne et réflexive, d'où il suit (euclidienne + réflexive = équivalence) que R est une relation d'équivalence.

6. Soit le système **K** + **G** (formule de Geach : $\Diamond\Box p \Rightarrow \Box\Diamond p$).

   On démontre que la relation du modèle canonique de **K** + **G**, est "incestueuse" (ou "convergente").

   Soit m_iRm_j et m_iRm_k ; à démontrer : il existe m_h, tel que m_jRm_h et m_kRm_h. Il faut donc démontrer qu'il existe un maximal consistant, m_h, incluant aussi bien $\Box^*(m_j)$ que $\Box^*(m_k)$ et qui est donc accessible de m_j et de m_k, en vertu de la définition de R ; autrement dit, on doit démontrer qu'il existe m_h tel que : $\Box^*(m_j) \cup \Box^*(m_k) \subseteq m_h$.

Il suffit de démontrer que $\Box^*(m_j) \cup \Box^*(m_k)$ est consistant et peut donc, en vertu de Lindenbaum, être étendu à un maximal consistant.

Supposons que $\Box^*(m_j) \cup \Box^*(m_k)$ soit inconsistant ; on montre qu'alors m_k est inconsistant.
Si $\Box^*(m_j) \cup \Box^*(m_k)$ est inconsistant, alors il existe $\Box\varphi_1, \ldots, \Box\varphi_n \in m_j$ et $\Box\psi_1, \ldots, \Box\psi_m \in m_k$, tels que :
$\vdash_G \sim\{\varphi_1 \wedge, \ldots, \wedge\ \varphi_n \wedge\ \ \psi_1 \wedge, \ldots, \wedge\ \psi_m\}$
pour abréger on fait $\Phi = \varphi_1 \wedge, \ldots, \wedge\ \varphi_n$ et $\Psi = \psi_1 \wedge, \ldots, \wedge\ \psi_m$, ce qui précède s'écrit donc :

(1) $\vdash_G \sim(\Phi \wedge \Psi)$

On montre rapidement d'abord que $\Box\Phi \in m_j$ et $\Box\Psi \in m_k$:
$\Box\varphi_1, \ldots, \Box\varphi_n \in m_j$ donc (MC3'), $\Box\varphi_1 \wedge, \ldots, \wedge\ \Box\varphi_n \in m_j$ et par la loi de distributivité "$\Box/\wedge$" et MC4, $\Box(\varphi_1 \wedge, \ldots, \wedge\ \varphi_n) \in m_j$ et donc :

(2) $\Box\Phi \in m_j$; même raisonnement pour (2') : $\Box\Psi \in m_k$.

De plus on a la déduction suivante à partir de (1) :
$\vdash_G \sim(\Phi \wedge \Psi)$, i.e :
$\vdash_G (\Phi \Rightarrow\ \sim\Psi)$, donc (règle dérivée R_2) :
$\vdash_G (\Diamond\Phi \Rightarrow \Diamond \sim\Psi)$, i.e. :
$\vdash_G (\Diamond\Phi \Rightarrow\sim\Box\Psi)$.

Il en résulte par MC5 :

(3) $\Diamond\Phi \Rightarrow\sim\Box\Psi \in m_k$.

Comme (2) : $\Box\Phi \in m_j$, et m_iRm_j, on a :

(4) $\Diamond\Box\Phi \in m_i$.

> En effet, on a le micro-lemme suivant : dans un modèle canonique, soit mRm' et $\theta \in m'$; alors $\Diamond\theta \in m$; si tel n'était pas le cas, autrement dit si $\Diamond\theta \notin m$, alors, puisque m est maximal consistant, par MC2, on aurait $\sim\Diamond\theta \in m$, et donc, puisque mRm', $\sim\theta \in m'$; m' serait donc inconsistant.

De plus la formule de Geach étant un axiome de **K** + **G**, $\Diamond\Box\Phi \Rightarrow \Box\Diamond\Phi \in m_i$; et comme (4) : $\Diamond\Box\Phi \in m_i$, on a par MC4 : $\Box\Diamond\Phi \in m_i$; et puisque $m_i R m_k$: $\Diamond\Phi \in m_k$.
Or (3) : $\Diamond\Phi \Rightarrow\sim\Box\Psi \in m_k$, et donc par MC4 encore : $\sim\Box\Psi \in m_k$, ce qui rend m_k inconsistant puisqu'on avait (2') : $\Box\Psi \in m_k$.

En résumé, on a : si $\Box^*(m_j)\cup\Box^*(m_k)$ est inconsistant alors m_k l'est également ; or m_k est consistant, donc :
$\Box^*(m_j) \cup \Box^*(m_k)$ est consistant.

$\Box^*(m_j)\cup\Box^*(m_k)$ peut donc être étendu à un maximal consistant, m_h, tel que : $\Box^*(m_j) \cup \Box^*(m_k) \subseteq m_h$ et donc $\Box^*(m_j) \subseteq m_h$ et $\Box^*(m_k) \subseteq m_h$.

En conséquence, par définition de R : $m_j R m_h$ et $m_k R m_h$, cqfd.

Deuxième partie

Logique modale quantifiée

Chapitre 5

Sémantique

5.1 Remarques préliminaires

Le langage pour la modale quantifiée est un langage du premier ordre habituel auquel on ajoute les opérateurs modaux. Les règles de formation ne posant aucun problème particulier, on ne les répétera pas ici.

Un système axiomatique pour la modale quantifiée est obtenu par extension des systèmes K - S5 de la modale propositionnelle. On admet que toute instance (dans le langage du premier ordre) d'une thèse d'un de ces systèmes est un axiome pour le système correspondant de modale quantifiée. Pour le reste des axiomes, en particulier pour l'axiome classique du premier ordre :

-$\forall\varphi[x] \ \Rightarrow \varphi[y]$ [1],

toutes sortes de questions se posent. On ne les envisagera (partiellement) qu'à la fin de ce fascicule (voir section 6.4, p. 126).

On devrait également ajouter la règle de généralisation :

- G : Si $\vdash \varphi$, alors $\vdash \forall x\varphi$.

Mais là encore des problèmes se posent.

---

[1] Avec y libre pour x dans φ.

On n'étudiera pas ces systèmes axiomatiques pour eux mêmes : il est plus intéressant et suggestif d'étudier la sémantique de la modale quantifiée pour faire apparaître les problèmes - ils sont nombreux ! - que pose cette logique et les choix (plus métaphysiques que logiques) qu'il faut opérer.

5.2 Les grandes options

En premier ordre standard, pour attribuer une valeur de vérité à une formule de $\mathcal{L}$, il faut spécifier un domaine non-vide d'individus D, une interprétation des lettres de prédicat (qui associe à chaque lettre de prédicat de degré n un sous-ensemble de $\wp(D)$) et une interprétation des variables d'individu (qui associe à chaque variable un élément de D).

Dans la perspective de la sémantique des "mondes possibles", les choses sont évidemment plus compliquées, puisque l'on prend en considération plusieurs mondes dans lesquels se trouvent des individus ayant telles et telles propriétés et entretenant telles et telles relations entre eux. Cela pose un certain nombre de problèmes et contraint à faire des choix.

5.2.1 L'identification trans-mondaine

Le premier problème est le suivant : un même individu peut-il se trouver dans plusieurs "mondes possibles" ? Si je dis que Sarkozy aurait pu perdre les élections, je veux sans doute dire qu'il existe un monde m' différent du monde actuel m_a (au sens aristotélicien d'"actuel") dans lequel le même individu qui est actuellement président de la République, ne l'est pas. Une des différences entre ces deux mondes, m' et m_a est que dans le premier, l'individu Sarkozy n'a pas la propriété d'être Président de la République, alors que dans le second il possède cette propriété. Cependant c'est bien du même individu que je prétends parler même s'il a des propriétés différentes, ou entretient des relations différentes à d'autres objets, d'un monde à l'autre.

On pourrait évidemment objecter qu'il est absurde de parler d'un *même* individu ayant des propriétés différentes, puisque le principe généralement admis de l'indiscernabilité des identiques conduit, par contraposition, à admettre qu'avoir des propriétés différentes, implique, pour des individus, qu'ils soient différents. C'est du reste pourquoi, Leibniz fait dire à Pallas que dans les divers mondes qu'elle s'apprête à montrer à Théodore, les Sextus qu'il va voir ne seront que des "Sextus approchants" et non le Sextus qu'il avait vu puisque "ce dernier porte toujours avec lui ce qu'il sera" [2].

---

[2] *Théodicée* §414, p. 376 de l'édition Jalabert

Outre la difficulté leibnizienne qui tient à sa conception de ce qu'est la "notion d'une substance individuelle" et donc à sa théorie de la substance, l'idée que c'est bien du même individu Sarkozy que je parle lorsque j'évoque la possibilité qu'il ait perdu les élections, pose le redoutable problème de ce que l'on appelle "l'identité trans-mondaine". En effet, supposons deux individus, disons Chirac et Sarkozy, se trouvant dans le monde actuel ; on pourrait admettre qu'il est possible que Chirac soit petit et Sarkozy grand, puis que Sarkozy, grand, apprécie les arts de Chine et du Japon et que Chirac, petit, n'ait jamais ouvert un livre, que etc. autrement dit que les deux individus échangent toutes leurs propriétés de telle sorte que dans un monde possible Sarkozy ait toutes les propriétés de Chirac et inversement, Chirac toutes celles de Sarkozy. Y-a-t il encore sens à dire que le Sarkozy chiraquisé est le même Sarkozy que celui qui se trouve dans le monde actuel ? [3]

Le petit (David) Lewis répondait à ces difficultés par sa théorie des "répliques" (ou "contreparties", traduit-on parfois) : d'un monde à l'autre on ne trouve pas le même individu, mais seulement des individus qui se "ressemblent" suffisamment pour que l'un puisse, dans le monde dans lequel il se trouve, tenir à peu près la place que l'autre a dans son monde ; mais cela suppose que l'on admette entre les "répliques" une relation qui n'est pas une relation d'équivalence et qui est difficile à manier [4].

Comme on le verra bientôt la sémantique standard pour la modale quantifiée ne poursuit pas le long de cette ligne mais admet que l'on peut avoir affaire aux mêmes individus d'un monde à l'autre, au nom du fait que si je dis que Sarkozy pourrait ne pas avoir gagné les élections, c'est bien de Sarkozy lui-même qu'il s'agit, et non pas d'un autre individu qui lui ressemblerait mais ne serait pas lui. Kripke exprime cette idée de la manière suivante : "[Selon la théorie de Lewis] si nous disons : " Humphrey aurait pu gagner les élections (s'il avait fait ceci ou cela)", nous ne parlons pas de quelque chose qui aurait pu arriver à *Humphrey*, mais à quelqu'un d'autre, une réplique. Il est toutefois probable qu'aux yeux de Humphrey le fait que quelqu'un

---

[3] C'est, très très résumé, la difficulté que soulevait R. M. Chisholm en 1967 dans son article "Identity through possible worlds : some questions"

[4] cf. par ex. D. Lewis, *Counterfactual*, Oxford, B. Blaxwell, 1973, p. 30-43. Dans son article de 1968, "Counterpart Theory and quantified modal logic" (*The Journal of Philosophy*, 1968, vol. 65, p. 113-126), Lewis caractérisait ainsi une réplique : "Là où quelqu'un dirait que vous êtes dans différents mondes, dans lesquels vous avez des propriétés quelque peu différentes et que des choses quelque peu différentes vous arrivent, je préfère dire que vous êtes dans le monde actuel et dans aucun autre, mais que vous avez des répliques dans divers autres mondes. Vos répliques vous ressemblent beaucoup en ce qui concerne vos propriétés importantes et votre environnement. Elles vous ressemblent plus que ne vous ressemble quoi que ce soit d'autre dans leur monde. Mais elle ne sont pas réellement vous."

d'*autre* aurait été victorieux dans un autre monde possible ne présente strictement aucun intérêt, quelle que soit la ressemblance entre cet autre et lui." [5]

Nous admettrons donc que l'élément du domaine qui interprète une variable peut se trouver en divers mondes simultanément. Insistons cependant sur le fait que même si cela peut sembler plus intuitif, cela n'est pas sans poser de redoutables difficultés dont celle de l'identification trans-mondaine n'est que la plus amusante. Disons qu'il s'agit d'une convention.

5.2.2 Possibilisme *vs* actualisme.

Deuxième problème : on rencontre des situations dans lesquelles nous aimerions pouvoir dire non seulement qu'un individu que l'on trouve dans le monde actuel a, ou n'a pas, une propriété qu'il n'a pas, ou a, dans autre monde, mais encore qu'un individu, par ex. Pégase, que l'on ne trouve pas dans le monde actuel, se trouve dans un autre monde ; ou encore qu'un individu, par ex. Sarkozy, que l'on trouve dans le monde actuel ne se trouve pas dans un autre monde.

Le "discours modal" a donc deux dimensions : évoquer la possibilité pour un individu d'avoir ou non une propriété selon le monde dans lequel il se trouve ; évoquer la possibilité pour un individu de se trouver dans un, ou des, mondes, mais pas dans d'autres.

La question est alors : le domaine des valeurs que peuvent prendre les variables quantifiées (le domaine de quantification) doit-il être restreint au monde dans lequel on évalue une formule, ou bien s'étend-il à l'ensemble des objets qui se trouvent dans un monde ou un autre ? Cela revient, dans le premier cas à ce qu'une formule de la forme $\exists x P(x)$, par ex., n'est vraie dans un monde que si, *dans ce monde*, se trouve un objet a qui a la propriété qui interprète la lettre de prédicat P ; elle est fausse sinon, même si dans un autre monde se trouve un objet a' qui a la propriété en question ; même genre de chose pour les universelles.

Dans le second cas, le domaine de quantification est constitué de l'ensemble des objets qui se trouvent dans un monde *ou un autre* ; une existentielle, par ex., est donc vraie dans un monde m à la seule condition que dans un monde quelconque, que ce soit m ou un autre monde, on trouve un objet qui satisfasse la formule qui est dans la portée du quantificateur.

---

[5] *La logique des noms propres*, Paris éd. de Minuit, 1982, p. 33. Humphrey était le candidat démocrate opposé à Nixon lors des élections présidentielles étatsuniennes de 1968.

La première branche de l'alternative revient à adopter un point de vue "actualiste" : seul "existe" dans un monde ce qui se trouve dans ce monde et rien d'autre c'est pourquoi les quantificateurs ne peuvent porter que sur ce qui se trouve dans ce même monde. La seconde revient à adopter un point de vue "possibiliste" : on ne fait pas de distinction entre l'actuel et le possible, entre Pégase et Sarkozy et les quantificateurs portent sur tout ce qui se trouve dans l'un ou l'autre des mondes.

Comme on va le voir, à l'un ou l'autre de ces points de vue, correspondent des sémantiques à peu près, mais pas également, raisonnables. Toutefois, il faut encore faire un choix car le point de vue actualiste présente une difficulté particulière : soit une formule ouverte comme "x est voyageur intrépide" ; si l'on interprète x par "Ulysse", on obtient la proposition "Ulysse est un voyageur intrépide". Si l'on admet, ce qui semble raisonnable, qu'Ulysse ne se trouve pas dans notre monde, peut-on évaluer une telle proposition dans notre monde ? Comme on sait, cela a fait l'objet d'innombrables discussions : Frege pensait qu'une telle proposition n'avait pas de valeur de vérité, alors que, réinterprétée à la lumière de la théorie des descriptions, elle est simplement fausse pour Russell. Dans le contexte de la logique modale quantifiée, la position de Frege reviendrait à admettre que pour certaines interprétations des variables, une formule peut n'être ni vraie ni fausse dans tel ou tel monde ; ce qui fait, d'une certaine façon, sortir du cadre de la bivalence et va directement à l'encontre de ce que l'on fait en modale propositionnelle puisque l'on y admet que, dans tout monde, toute proposition à une valeur de vérité déterminée.

Il semble donc plus expédient d'admettre que, même si Ulysse ne se trouve pas dans notre monde (et ne peut donc appartenir au domaine de quantification relativement à notre monde, dans la perspective actualiste), il est vrai ou faux, *dans notre monde*, qu'il est un grand voyageur. On admettra donc dans ce qui suit que dans la perspective actualiste une proposition comme "Ulysse est un voyageur intrépide" a une valeur de vérité dans tous les mondes, même dans ceux dans lesquels il ne se trouve pas[6].

Il reste donc deux possibilités que l'on va explorer rapidement dans ce qui suit :

- **actualisme** : les quantificateurs ne portent que sur les objets qui appartiennent au monde dans lequel on évalue une formule, mais une variable libre peut-être interprétée par un objet d'un monde quelconque et la formule dans laquelle

---

[6] Cela peut évidemment sembler philosophiquement suspect ; se souvenir du vieux Platon : "Le discours est forcément, dès qu'il est, discours sur quelque sujet ; qu'il ne le soit sur rien, c'est impossible", *Sophiste* 262 e.

cette variable figure a une valeur de vérité dans tous les mondes et pour toute interprétation de la variable. Les modèles sont dits, dans ce cas, à "domaine variable".

- **possibilisme** : un seul domaine de quantification. Les modèles sont dit alors à "domaine constant".

On va voir que selon que l'on adopte l'une ou l'autre de ces deux possibilités, on est entraîné à admettre ou à rejeter la validité de certaines formules cruciales, les formules dites "de Barcan" : $"\forall x \Box Px \Rightarrow \Box \forall x Px"$ ou $"\Diamond \exists x Px \Rightarrow \exists x \Diamond Px"$, ainsi que leurs converses.

5.3 Modèles et règles d'évaluation des formules

5.3.1 Définition d'un modèle à "domaine constant"

Les idées qui président à la définition d'un modèle pour la modale quantifiée sont les mêmes que celles qui étaient à l'œuvre pour la modale propositionnelle : pour faire face à la difficulté que pose le caractère non vérifonctionnel des opérateurs modaux, on admet un ensemble de mondes dans chacun desquels on évalue "classiquement" les formules ; sur cet ensemble est définie une relation d'accessibilité, ce qui permet de définir la vérité dans un monde m d'une formule de la forme $\Box\varphi$ par le fait que φ est vraie dans tous les mondes accessibles de m et celle d'une formule de la forme $\Diamond\varphi$ par le fait que φ est vraie dans au moins un monde accessible de m. Bien entendu, certaines modifications doivent être introduites pour tenir compte de la structure plus complexe des formules du langage pour la modale quantifiée.

Un cadre en modale propositionnelle est une paire : $< M, R >$, avec M, ensemble de mondes et R, relation d'accessibilité définie sur M. En 1er ordre (à "domaine constant"), on étend la notion de cadre en y incluant la donnée d'un domaine d'objets unique ("domaine constant"), D, identique pour tous les mondes. Un cadre étendu est donc un triplet : $< M, R, D >$.

Pour obtenir un modèle, il faut préciser quelle est l'interprétation des lettres de prédicat. Pour cela, il faut indiquer, pour une lettre de prédicat P_i^n à n places (ce que l'on indique en exposant de la lettre P_i^n), quel sous-ensemble de D^n l'interprète dans chaque monde. Pour cela on définit une fonction $I : \mathbf{P} \times M \rightarrow \bigcup D^n$, avec $\mathbf{P}$, ensemble des lettres de prédicat, M ensemble des mondes et $\bigcup D^n$ union des puissances de D, i.e. : $D^1 \cup D^2 \cup \cdots \cup D^n \ldots$ Cette fonction associe à une lettre de prédicat à n places et un monde, un sous ensemble de D^n, autrement dit, pour chaque $P_i^n \in \mathbf{P}$ et chaque $m_i \in M$, $I(\langle P_i^n, m_i\rangle) \subseteq D^n$.

Supposons par ex. que l'on ait :

- $M = \{m_1, m_2, m_3\}$ et
- $D = \{a, b, c\}$

On pourrait alors avoir pour une lettre de prédicat P_i^2 et le monde m_3 quelque chose comme : $I(\langle P_i^2, m_3\rangle) = \{< b, c >, < c, a >\}$, ce que signifie intuitivement que P_i^2 est interprétée par une relation à deux places qu'entretiennent b et c, ainsi que c et a dans le monde m_3 (d'où, par ex., $P_i^2(c, a)$ est vrai dans m_3). Mais, pour la même lettre de prédicat et le monde m_1, on pourrait avoir : $I(\langle P_i^2, m_3\rangle) = \emptyset$, i.e. dans m_1, rien n'entretient avec rien cette même relation.

On définit donc un modèle $\mathcal{M}$ par un quadruplet : $< M, R, D, I >$, avec :

- M, ensemble de mondes,
- R, relation d'accessibilité sur M,
- D, domaine d'objets unique pour tous les mondes,
- I, interprétation des lettres de prédicat.

Cependant, comme on sait, cela ne suffit pour évaluer une formule de $\mathcal{L}$ dans un monde ; il faut également interpréter les variables et ajouter, pour ce faire une nouvelle fonction qui va de l'ensemble V des variables d'individu vers D, le domaine du modèle : $i : V \to D$[7].

> Convention terminologique : soit $i : V \to D$ et x une variable quelconque ; on dit que l'interprétation $j : V \to D$ est "x-variante de i" si elle ne diffère de i que par la valeur donnée à x. On admet, en outre, qu'une interprétation est x-variante d'elle même.

On peut maintenant définir ce que veut dire pour une formule φ de $\mathcal{L}$ d'être vraie dans un modèle $\mathcal{M}$, dans un monde $m_i \in M$, pour une interprétation i des variables d'individu, ce que l'on note : $\mathcal{M}, m_i \vDash_i \varphi$[8].

---

[7] On remarquera que la définition d'un modèle en modale quantifiée se distingue de celle en modale propositionnelle en ce que, dans le premier cas, la définition d'un modèle $\mathcal{M}$, n'incorporant pas l'interprétation des variables d'individu, ne permet pas d'évaluer les formules de $\mathcal{L}$ dans les mondes de $\mathcal{M}$, contrairement à ce qui est le cas en modale propositionnelle. Cela n'est que de pure commodité et est sans importance logique.

[8] Dans ce qui suit, on admet que lorsque le modèle est fixé, on omet de le mentionner et on écrit simplement : $m_i \vDash_i \varphi$.

5.3.2 Règles pour l'évaluation d'une formule ; validité(s)

Soit $\mathcal{M}$ un modèle quelconque, m_j un élément de M, i une interprétation des variables d'individu de $\mathcal{L}$ et φ une formule de $\mathcal{L}$. Les règles pour évaluer φ dans m_j pour l'interprétation i sont les suivantes :

1. φ, formule atomique, est de la forme $P_i^n(x_1, \ldots, x_n)$, alors :

   $m_j \vDash_i \varphi$ ssi $< i(x_1), \ldots, i(x_n) > \in I(\langle P_i^n, m_j \rangle)$.

2. φ est de la forme $\sim\psi$, alors :

   $m_j \vDash_i \varphi$ ssi $m_j \nvDash_i \psi$.

3. φ est de la forme $\psi \wedge \theta$, alors :

   $m_j \vDash_i \varphi$ ssi $m_j \vDash_i \psi$ et $m_j \vDash_i \theta$.

4. φ est de la forme $\Box\psi$, alors :

   $m_j \vDash_i \varphi$ ssi pour tout monde m_h tel que $m_j R m_h$, $m_h \vDash_i \psi$.

5. φ est de la forme $\Diamond\psi$, alors :

   $m_j \vDash_i \varphi$ ssi pour au moins un monde m_h tel que $m_j R m_h$, $m_h \vDash_i \psi$.

6. φ est de la forme $\forall x \psi$, alors :

   $m_j \vDash_i \varphi$ ssi pour toute interprétation i', x-variante de i, $m_j \vDash_{i'} \psi$.

7. φ est de la forme $\exists x \psi$, alors :

   $m_j \vDash_i \varphi$ ssi pour au moins une interprétation i', x-variante de i, $m_j \vDash_{i'} \psi$.

Rappel : lorsque la formule φ est close, la valeur de vérité de φ dans un monde ne dépend pas de l'interprétation i et l'on peut donc écrire simplement : $m_j \vDash \varphi$.

On définit maintenant les notions de validité dans un modèle, dans un cadre et dans une classe de cadre :

- Une formule φ est valide dans un modèle $\mathcal{M} =< M, R, D, I >$ ssi $\mathcal{M}, m \vDash_i \varphi$ pour tout monde $m \in M$ et toute interprétation i des variables d'individu.

- Une formule est valide dans un cadre $F =< M, R, D >$ ssi φ est valide dans tous les modèles fondés sur F.

- Une formule est valide dans une classe de cadres $\mathcal{C}$ ssi φ est valide dans tous les cadres $F \in \mathcal{C}$.

Exemples d'évaluation

1. Soit la formule : $\forall x \Diamond Px \Rightarrow \Diamond \forall x Px$ [9], et le modèle $\mathcal{M}$ tel que :
   - $M = \{m_1, m_2, m_3\}$,
   - $R = \{< m_1, m_2 >, < m_1, m_3 >\}$,
   - $D = \{a, b\}$,
   - $I(\langle P, m_1\rangle) = \emptyset$, $I(\langle P, m_2\rangle) = \{a\}$, $I(\langle P, m_3\rangle) = \{b\}$.

   Il est inutile de préciser une interprétation i particulière puisque φ est close.

   On va montrer : $m_1 \nvDash_i \varphi$, pour i quelconque. On remarque au préalable qu'il n'existe que deux interprétations x-variantes de i : $i'(x) = a$ et $i''(x) = b$

   (a) $m_1 \vDash_i \forall x \Diamond Px$.
   - $m_2 \vDash_{i'} Px$, puisque $i'(x) = a$ et que $a \in I(\langle P, m_2\rangle)$; donc $m_1 \vDash_{i'} \Diamond Px$, puisque $m_1 R m_2$.
   - $m_3 \vDash_{i''} Px$, puisque $i''(x) = b$ et que $b \in I(\langle P, m_3\rangle)$; donc $m_1 \vDash_{i''} \Diamond Px$, puisque $m_1 R m_3$.

   Comme il n'y a pas d'autres interprétations x-variantes de i, on en tire : $m_1 \vDash_i \forall x \Diamond Px$.

   (b) $m_1 \nvDash_i \Diamond \forall x Px$.
   Pour évaluer une formule de la forme $\Diamond\varphi$, dans un monde m il faut évaluer φ dans tous les mondes accessibles de m : si dans un de ces mondes φ est vraie, alors $\Diamond\varphi$ est vraie dans m, fausse sinon. Dans le cas présent, m_1 ne "voit" que deux mondes et on a :

   - $m_2 \nvDash_i \forall x Px$: en effet, puisque $i''(x) = b$ et que $b \notin I(\langle P, m_2\rangle)$, on a $m_2 \nvDash_{i''} Px$, et

---

[9] On admet que "P" est une lettre de prédicat à une place, sans l'indiquer par un exposant ; même chose par la suite.

- $m_3 \not\models_i \forall x P x$: en effet, puisque $i'(x) = a$ et que $a \notin I(\langle P, m_3 \rangle)$, on a $m_3 \not\models_{i'} Px$.

Comme m_1 ne voit que m_2 et m_3, m_1 ne voit aucun monde dans lequel $\forall x P x$ est vraie et donc : $m_1 \not\models_i \Diamond \forall x P x$.

Il résulte de (a) et (b) que l'on a : $m_1 \not\models_i \forall x \Diamond P x \Rightarrow \Diamond \forall x P x$, ou si l'on veut : $m_1 \not\models \forall x \Diamond P x \Rightarrow \Diamond \forall x P x$.

Il est facile de voir que si l'on définit I de telle sorte que l'on ait, par ex. : $I(\langle P, m_3 \rangle) = \{a, b\}$, la formule $\forall x \Diamond P x \Rightarrow \Diamond \forall x P x$ est vraie dans m_1.
En effet, on a alors, en vertu de la nouvelle défintion de I, $m_3 \models_i \forall x P x$ et donc $m_1 \models_i \Diamond \forall x P x$. Comme l'antécédent reste vrai dans m_1, la formule est donc vraie dans m_1.

2. Considérons maintenant la converse de la formule précédente, c'est à dire : $\Diamond \forall x P x \Rightarrow \forall x \Diamond P x$.

   On va montrer que cette formule est valide dans tout modèle à domaine constant ; ce qui est assez intuitif. Supposons le domaine des hommes : s'il est possible que tous les hommes soient honnêtes (hypothèse certes extravagante !), cela implique certainement que chaque homme puisse être honnête (ce qui est certes faire preuve d'optimisme, mais qui ne semble pas absurde) ; alors qu'il semble clair que ce n'est pas parce que chaque homme peut être honnête (même si de fait il ne l'est pas, bien sûr), qu'il est possible que tous puissent l'être simultanément[10].

   Pour montrer la validité de l'implication, on montre que si, dans un modèle quelconque ($\mathcal{M}$), dans un monde quelconque (m_j) et pour une interprétation quelconque (i), l'antécédent de l'implication est vrai, alors le conséquent l'est également.
   Supposons donc : $m_j \models_i \Diamond \forall x P x$.

---

[10] On remarquera que la langue ordinaire est mal à l'aise avec ce jeu entre modalité et quantificateur, ce qui a conduit ici à écrire ici : " …que chaque homme puisse être honnête", plutôt que " …que tous les hommes puissent être honnêtes". Il n'est pas certain en effet qu'un locuteur standard fasse la distinction entre : "il est possible que tous les hommes soient honnêtes" et "tous les hommes peuvent être honnêtes" ; il sera alors amené à ne pas saisir que l'implication vaut dans un sens mais pas dans l'autre ; d'où l'importance de disposer d'un symbolisme clair !!

Cela signifie qu'il existe au moins un monde m_k tel que m_jRm_k, avec :

$m_k \vDash_i \forall xPx$.

Donc pour toute interprétation i', x-variante de i, on a :

$m_k \vDash_{i'} Px$.

Mais comme m_jRm_k, cela signifie que pour toute interprétation i', x-variante de i, on a :

$m_j \vDash_{i'} \Diamond Px$,

et donc que que l'on a :

$m_j \vDash_i \forall x\Diamond Px$.

Il en résulte que l'on a : $m_j \vDash_i \Diamond\forall xPx \Rightarrow \forall x\Diamond Px$; et comme $\mathcal{M}$, m_j et i étaient quelconques, cela vaut pour tout modèle, tout monde et toute interprétation.

On notera que la démonstration précédente ne suppose aucune propriété particulière de la relation R du modèle ; ce qui correspond donc à la sémantique au système K. On peut donc dire que la formule ci-dessus est K-valide.

La première formule que l'on vient d'examiner n'est pas K-valide, ce qui signifie que l'on ne peut passer de $\forall x\Diamond Px$ (ou plus généralement : $\forall x\Diamond\varphi[x]$), à $\Diamond\forall xPx$ (ou plus généralement : $\Diamond\forall x\varphi[x]$) ; alors que la validité de la deuxième formule signifie que l'on peut aller dans l'autre direction.

Comme on s'en doute, les mêmes constations peuvent être faites s'agissant des combinaisons "$\Box/\exists$", mais dans l'autre sens : les formules de la forme $\exists x\Box\varphi[x] \Rightarrow \Box\exists x\varphi[x]$ sont K-valides, mais pas celles de la forme $\Box\exists x\varphi[x] \Rightarrow \exists x\Box\varphi[x]$ (en supposant toujours des modèles à domaine constant, bien évidemment). On pourra s'amuser à le démontrer.

5.3.3 Les formules de Barcan

Les formules de Barcan universelles sont de la forme : $\forall x\Box\varphi[x] \Rightarrow \Box\forall x\varphi[x]$ [11].

---

[11] $\varphi[x]$: "x" a éventuellement une occurrence libre dans φ. Pour simplifier, mais sans perte de généralité, nous envisagerons le cas particulier de la formule : $\forall x\Box Px \Rightarrow \Box\forall xPx$. Ces formules doivent leur nom à la logicienne étatsunienne Ruth Barcan-Marcus (maintenant Ruth Marcus) qui avait introduit, dans son système de modale quantifié publié en 1946 ("A Functional Calculus of First Order Based on Strict Implication", *Journal of Symbolic Logic*, vol 11, n°1, p. 1-16), le schéma d'axiome : $\Diamond\exists x\varphi[x] \prec \exists x\Diamond\varphi[x]$, "$\prec$" étant le symbole pour l'implication stricte de Lewis, ce qui

Ces formules (et leur répondant en terme de $\Diamond$ et $\exists$) sont particulièrement célèbres et furent au cœur des discussions dans les année 40-50 sur la modale quantifiée.

Une formule comme $\forall x \Box Px \Rightarrow \Box \forall x Px$ peut sembler exprimer une "intuition modale" généralement partagée, que Carnap présentait ainsi : supposons, en effet, un domaine fini $\{a_1, \ldots, a_n\}$; l'antécédent de l'implication peut être réécrit sous la forme d'une conjonction : $\Box Pa_1 \wedge \cdots \wedge \Box Pa_n$ et par distributivité $\Box/\wedge$, on aura : $\Box(Pa_1 \wedge \cdots \wedge Pa_n)$, et donc en retranscrivant la conjonction dans la parenthèse en terme d'universel, on aura : $\Box \forall x Px$, ce qui est bien le conséquent. On peut, du reste, renverser ce micro raisonnement et démontrer ainsi la converse de l'implication. L'extension a un domaine infini ne semblant pas poser de problème, Carnap, en concluait, dans son premier article sur la modale quantifiée "Modalities and Quantification" (p. 37-38)[12] que les deux formules $\forall x \Box Px$ et $\Box \forall x Px$ étaient équivalentes (ou, si l'on veut que $\forall x \Box Px \Leftrightarrow \Box \forall x Px$ était valide) et que $\Box$ et $\forall$ pouvaient échanger leur place librement.

On peut exprimer cette "intuition modale" de la manière (philosophiquement dangereuse !) suivante : une formule de la forme $\Box Pa$ (a constante) peut se lire : a est nécessairement P, ce qui en langage aritotélicien revient à dire que la propriété désignée par P est une propriété "essentielle" de a[13] ; par extension, une formule comme "$\forall x \Box Px$" se lit : P désigne une propriété "essentielle" de tous les objets qui sont dans le domaine (par ex. de tous les hommes), une propriété qu'aucun d'entre eux ne peut manquer d'avoir. Si tel est le cas il est alors nécessaire que tous les hommes, par ex., aient cette propriété, ce qui se transcrit par : "$\Box \forall x Px$".

Inversement, on peut admettre que s'il est nécessaire que tous les hommes aient

---

revient à : $\Box[\Diamond \exists x \varphi \Rightarrow \exists x \Diamond \varphi]$ et est obtenue simplement, dans les systèmes normaux, par application de la règle de nécessitation sur la Barcan existentielle. Elle déduisait facilement dans son système les autres formules.

[12] *Journal of Symbolic Logic*, 1946, vol 11, n°2, p. 33-64, n° suivant celui dans lequel fut publié l'article de R. Barcan-Marcus, cité précédemment ; cf. également *Meaning and Necessity* (1947) §40, p. 178-179

[13] C'était du reste, rappelons-le, pour formaliser cette notion de "propriété essentielle" qu'Aristote avait élaboré sa logique modale ; c'est ainsi qu'il déclarait en ouverture du chap. 8 des *Premiers Analytiques* : "Puisqu'il y a une différence entre l'attribution simple, l'attribution nécessaire et l'attribution contingente (car beaucoup de choses appartiennent certes à d'autres choses, mais non nécessairement, ni simplement, mais peuvent seulement appartenir), il est évident qu'il y aura des syllogismes différents pour chacune de ces attributions...". C'est ce qui fait le caractère hautement suspect de la modale quantifiée : depuis Locke (*Essai sur l'E. H.*, Livre III, chap. 6, § 4-6, en particulier), la notion de "propriété essentielle" est largement disqualifiée ! ! Si Carnap, qui ne peut être soupçonné de donner dans l'"essentialisme", accepte ces formules, c'est qu'il restreint le "nécessaire" au "logiquement valide".

telle ou telle propriété (ce qui revient à dire qu'il est impossible que l'un d'entre eux n'ait pas cette propriété : $\sim\Diamond\exists x \sim Px$), alors c'est qu'il s'agit d'une propriété essentielle de chacun d'entre eux.

On va voir que le sort des formules de Barcan est lié au choix des sémantiques adoptées : elles sont valides dans les modèles à domaine constant, mais pas dans les modèles à domaine variable. Du point de vue axiomatique, elles ne sont pas déductibles dans un système axiomatique pour la modale quantifiée "ordinaire" (correspondant à la sémantique à domaine constant) [14], mais leurs converses le sont, si l'on admet un usage suspect des règles N et G ; on verra plus loin les problèmes que cela pose (voir section 6.4, p. 126). Pour l'instant, on va montrer leur validité dans les modèles à domaine constant.

Soit donc la formule $\forall x\Box Px \Rightarrow \Box\forall xPx$, $\mathcal{M}$ un modèle quelconque, $m_j \in M$ un monde quelconque et i une interprétation quelconque. Comme précédemment, on suppose $m_j \vDash_i \forall x\Box Px$ et on montre qu'alors on a : $m_j \vDash_i \Box\forall xPx$.

1. si $m_j \vDash_i \forall x\Box Px$, alors pour toute i', x-variante de i on a :
   $m_j \vDash_{i'} \Box Px$, et donc :
   (A) : pour tout m_k tel que m_jRm_k, et tout i', x-variante de i, on a :
   $m_k \vDash_{i'} Px$.
2. (A) établit que dans tous les mondes, m_k, accessibles de m_j, on a $m_k \vDash_i \forall xPx$, et donc on a :
   $m_j \vDash_i \Box\forall xPx$

> Autre manière de présenter les choses : Supposons $m_j \nvDash_i \Box\forall xPx$.
> Alors, il existe au moins un monde m_k, tel que m_jRm_k et $m_k \nvDash_i \forall xPx$, et donc il existe i', x-variante de i telle que $m_k \nvDash_{i'} Px$, ce qui contredit (A).

On s'assurerait de la même manière que les Barcan existentielles de la forme :
– $\Diamond\exists x\varphi[x] \Rightarrow \exists x\Diamond\varphi[x]$
sont K-valides, ainsi que les converses de Barcan :
– $\Box\forall x\varphi[x] \Rightarrow \forall x\Box\varphi[x]$ (converses universelles)
– $\exists x\Diamond\varphi[x] \Rightarrow \Diamond\exists x\varphi[x]$ (converses existentielles).

Si l'on conjoint ces résultats, on a donc , comme le soutenait Carnap :
– $\forall x\Box\varphi[x] \Leftrightarrow \Box\forall x\varphi[x]$, et
– $\Diamond\exists x\varphi[x] \Leftrightarrow \exists x\Diamond\varphi[x]$.

---

[14] Sauf si l'on se met dans B, voir note 3, p. 128.

5.3.4 *De re, de dicto*

De ce qui précède, on tire que l'on peut librement permuter $\Box$ et $\forall$, ainsi que $\Diamond$ et $\exists$. La différence entre une formule comme $\Box\forall xPx$ dans laquelle il n'y a pas de variable libre dans la portée de $\Box$ et une formule comme $\forall x\Box Px$ dans laquelle x est libre dans la portée de $\Box$ est la suivante :

La première exprime qu'une certaine proposition est nécessairement vraie, i.e. dans le jargon de la sémantique des mondes possibles, que la *proposition* $\forall xPx$, par ex., est vraie dans tous les mondes accessibles du monde d'évaluation ; elle est, dira-t-on, *de dicto* ; ce qui veut dire que l'opérateur porte sur la proposition entière, dont on dit qu'elle est "toujours", "partout", etc. vraie.

La seconde exprime que toutes les choses (qui sont dans le domaine) ont, pour reprendre le vocabulaire dangereux ci-dessus, une propriété *essentielle*, une propriété qu'elles ne peuvent manquer d'avoir ; on voit qu'alors ce sont des *choses* en question, qu'il est dit quelque chose ; ce pourquoi on dira qu'une proposition de ce genre, dans laquelle, donc, il y a des variables libres dans la portée de $\Box$ (ou de $\Diamond$), est *de re*
.

Les équivalences ci-dessus établissent alors que s'agissant des couples $\Box/\forall$ et $\Diamond/\exists$, il n'y a pas à distinguer entre *de dicto* et *de re*, si l'on est "possibiliste".

Par contre, on a vu précédemment que $\forall x\Diamond Px \Rightarrow \Diamond\forall xPx$ et $\Box\exists xPx \Rightarrow \exists x\Box Px$ ne sont pas K-valides : il en résulte que l'on ne peut permuter impunément $\Diamond$ et $\forall$, pas plus que $\Box$ et $\exists$, ce qui veut donc dire que, dans ces cas, les formules *de dicto* et *de re* ne sont pas K-équivalentes. Plus généralement, on va montrer que dans aucun système de logique modale, on a, pour toute formule, l'équivalence *de dicto / de re.*

On montre qu'il existe un S5-modèle dans lequel la formule $\exists x\Box Px$ n'a pas d'équivalent *de dicto.*

On montre d'abord qu'il existe deux S5-modèles fondés sur un même cadre étendu $< M, R, D >$ qui ne sont distinguables par aucune formule *de dicto* dans un monde (au sens où une formule *dicto* serait, dans un même monde, vraie dans l'un des modèles mais fausse dans l'autre).

Soit le cadre $< M, R, D >$, avec :
- $M = \{m_1, m_2\}$,
- $R = M \times M$, i.e. R est universelle,
- $D = \{a, b\}$

1. Le modèle $\mathcal{M}_1$ est caractérisé par l'interprétation I_1 définie comme suit :

- $I_1(\langle P, m_1\rangle) = \{a\}$[15]
- $I_1(\langle P, m_2\langle) = \{a\}$
- $I_1(\langle Q, m\rangle) = \emptyset$ pour tout autre lettre de prédicat Q et tout monde m.

2. Le modèle $\mathcal{M}_2$ est caractérisé par l'interprétation I_2 définie comme suit :
   - $I_2(\langle P, m_1\rangle) = \{a\}$
   - $I_2(\langle P, m_2\rangle) = \{b\}$
   - $I_2(\langle Q, m\rangle) = \emptyset$ pour tout autre lettre de prédicat Q et tout monde m.

On démontre que quelle que soit ψ *de dicto* et quelle que soit l'interprétation i :

1. $\mathcal{M}_1, m_1 \vDash_i \psi$ ssi $\mathcal{M}_2, m_1 \vDash_i \psi$
2. $\mathcal{M}_1, m_2 \vDash_i \psi$ ssi $\mathcal{M}_2, m_2 \vDash_{i*} \psi$

Etant donné une interprétation i, i^* est définie par : $i^*(x) \neq i(x)$, ce qui revient à :

- si $i(x) = a$ alors $i^*(x) = b$ et si $i(x) = b$ alors $i^*(x) = a$.

Remarque : puisque les deux modèles sont fondés sur le même cadre étendu, on a les mêmes interprétations i dans les deux modèles.

Par récurrence sur le degré de ψ.

1. ψ est de degré 0 et de la forme :
   (a) $Q^n(x_1, \ldots, x_n)$: immédiat : ψ est fausse dans tous les mondes des deux modèles et pour toute interprétation.
   (b) $P(x)$, alors :
      i. $\mathcal{M}_1, m_1 \vDash_i P(x)$ ssi $i(x) \in I_1(\langle P, m_1\rangle)$ ssi $i(x) = a$ ssi $i(x) \in I_2(\langle P, m_1\rangle)$ ssi $\mathcal{M}_2, m_1 \vDash_i P(x)$
      ii. $\mathcal{M}_1, m_2 \vDash_i P(x)$ ssi $i(x) \in I_1(\langle P, m_2\rangle)$ ssi $i(x) = a$ ssi $i^*(x) = b$ ssi $i^*(x) \in I_2(\langle P, m_2\rangle)$ ssi $\mathcal{M}_2, m_2 \vDash_{i*} P(x)$.

Hypothèse de récurrence : vrai jusqu'à $n - 1$.

2. ψ de degré n et de la forme $\sim\theta$ ou $\theta \wedge \lambda$: comme toujours.
3. ψ de degré n et de la forme $\forall x\theta$

   Comme ψ est *de dicto*, θ l'est également et donc il n'y a pas de variable libre dans la portée d'un opérateur $\Box$ ou $\Diamond$; donc, ici, x n'est pas libre dans la portée d'un opérateur.

---

[15] On admet que la lettre de prédicat P est à une place.

(a) $\mathcal{M}_1, m_1 \vDash_i \forall x\theta$ ssi
$\mathcal{M}_1, m_1 \vDash_{i'} \theta$, pour toute i' x-variante de i ssi (hyp. de rec.)
$\mathcal{M}_2, m_1 \vDash_{i'} \theta$, pour toute i' x-variante de i ssi
$\mathcal{M}_2, m_1 \vDash_i \forall x\theta$.

(b) Pour la deuxième équivalence, les choses sont un peu plus délicates. Il faut au préalable noter qu'étant donné une interprétation i, à toute étoile d'une x-variante i' de i, i'^*, correspond une et une seule x-variante de i^*, $i^{*'}$. Soit, par ex. l'interprétation $i(x) = a$.
Tout d'abord, on a $i^*(x) = b$ et seulement deux x-variantes de i^* :

$$(1)\ i^{*'}(x) = a \text{ et } (2)\ i^{*''}(x) = b$$

D'un autre côté, il n'y a que deux x-variantes de i : $i'(x) = a$ et $i''(x) = b$ dont les formes étoilées sont donc :

$$i'^*(x) = b, \text{ ce qui correspond à (2) et}$$
$$i''^*(x) = a, \text{ ce qui correspond à (1).}$$

On voit facilement qu'il n'y a pas d'autres possibilités.

Même chose si $i(x) = b$. Il faut donc prendre garde dans la démonstration ci-dessous au passage de i'^* à $i^{*'}$ (souligné), d'où :

$\mathcal{M}_1, m_2 \vDash_i \forall x\theta$ ssi
$\mathcal{M}_1, m_2 \vDash_{i'} \theta$ pour toute i', x-variante de i ssi (hyp. de rec.)
$\mathcal{M}_2, m_2\underline{\vDash_{i'^*}}\theta$, pour toute i', x-variante de i ssi
$\mathcal{M}_2, m_2\underline{\vDash_{i^{*'}}}\theta$ pour toute $i^{*'}$, x-variante de i^* ssi
$\mathcal{M}_2, m_2 \vDash_{i^*} \forall x\theta$.

4. ψ de degré n et de la forme $\Box\theta$.

– Comme $\Box\theta$ est *de dicto*, θ est close et donc l'interprétation i est indifférente.
– Comme R est universelle, pour que $\Box\theta$ soit vraie dans un monde, m_1 ou m_2, il faut que θ soit vraie aussi bien dans m_1 que dans m_2. i.e.

$$\mathcal{M}, m \vDash \Box\theta \text{ ssi } \mathcal{M}, m_1 \vDash \theta \text{ et } \mathcal{M}, m_2 \vDash \theta$$

Il résulte de ce qui précède que lorsque $\Box\theta$ est vraie dans un monde, elle est vraie dans l'autre, quelle que soit l'interprétation considérée ; ce qui donne le résultat immédiatement.

Plus en détail, cela donne, pour une interprétation i quelconque :

(a) $\mathcal{M}_1, m_1 \models_i \Box\theta$ ssi
$\mathcal{M}_1, m_1 \models_i \theta$ et $\mathcal{M}_1, m_2 \models_i \theta$ ssi (hyp. de rec.)
$\mathcal{M}_2, m_1 \models_i \theta$ et $\mathcal{M}_2, m_2 \underline{\models_{i^*}} \theta$ ssi (interprétation indifférente)
$\mathcal{M}_2, m_1 \models_i \theta$ et $\mathcal{M}_2, m_2 \underline{\models_{i}} \theta$ ssi
$\mathcal{M}_2, m_1 \models_i \Box\theta$.

(b) $\mathcal{M}_1, m_2 \models_i \Box\theta$ ssi
$\mathcal{M}_1, m_1 \models_i \theta$ et $\mathcal{M}_1, m_2 \models_i \theta$ ssi (hyp. de rec.)
$\mathcal{M}_2, m_1 \underline{\models_{i}} \theta$ et $\mathcal{M}_2, m_2 \models_{i^*} \theta$ ssi (interprétation indifférente)
$\mathcal{M}_2, m_1 \underline{\models_{i^*}} \theta$ et $\mathcal{M}_2, m_2 \models_{i^*} \theta$ ssi
$\mathcal{M}_2, m_1 \models_{i^*} \Box\theta$.

On montre maintenant que $\exists x \Box Px$ n'est S5-équivalente à aucune *de dicto*.

Supposons ψ, *de dicto*, et S5-équivalente à $\exists x \Box P(x)$, on devrait donc avoir en particulier (puisque $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ sont des S5-modèles), pour tout $m \in M$ et toute interprétation i :
– $\mathcal{M}_1, m \models_i \exists x \Box P(x)$ ssi $\mathcal{M}_1, m \models_i \psi$,
– $\mathcal{M}_2, m \models_i \exists x \Box P(x)$ ssi $\mathcal{M}_2, m \models_i \psi$.

Puisque ψ est supposée *de dicto*, on aurait, par le lemme précédent :
$\mathcal{M}_1, m_1 \models_i \psi$ ssi $\mathcal{M}_2, m_1 \models_i \psi$, et donc :

$\mathcal{M}_1, m_1 \models_i \exists x \Box P(x)$ ssi
$\mathcal{M}_1, m_1 \models_i \psi$ ssi
$\mathcal{M}_2, m_1 \models_i \psi$ ssi
$\mathcal{M}_2, m_1 \models_i \exists x \Box P(x)$.

D'où il résulterait que :
$\mathcal{M}_1, m_1 \models_i \exists x \Box P(x)$ ssi $\mathcal{M}_2, m_1 \models_i \exists x \Box P(x)$.

Or on a, d'une part : (1) $\mathcal{M}_1, m_1 \models_i \exists x \Box P(x)$, mais, d'autre part (2) : $\mathcal{M}_2, m_1 \not\models_i \exists x \Box P(x)$; d'où, contradiction.
Pour (1) : soit l'x-variante $i'(x) = a$, alors :
$\mathcal{M}_1, m_1 \models_{i'} P(x)$ (puisque $a \in I_1(\langle P, m_1 \rangle)$), et

$\mathcal{M}_1, m_2 \vDash_{i'} P(x)$ (puisque $a \in I_1(\langle P, m_2 \rangle))$; donc :
$\mathcal{M}_1, m_1 \vDash_{i'} \Box P(x)$, et donc :
$\mathcal{M}_1, m_1 \vDash_i \exists x \Box P(x)$.

Pour (2) :
- soit $i'(x) = a$, x-variante de i, alors :
$\mathcal{M}_2, m_2 \nvDash_{i'} P(x)$ (puisque $a \notin I_2(\langle P, m_2 \rangle)$), et donc
$\mathcal{M}_1, m_2 \nvDash_{i'} \Box P(x)$
- soit $i''(x) = b$, x-variante de i, alors :
$\mathcal{M}_1, m_1 \nvDash_{i''} P(x)$ (puisque $b \notin I_1(\langle P, m_1 \rangle)$), et donc
$\mathcal{M}_2, m_1 \nvDash_{i''} \Box P(x)$
Comme il n'y a pas d'autres x-variantes de i, il n'existe donc pas d'x-variantes j de i, telle que :
$\mathcal{M}_2, m_1 \vDash_j \Box P(x)$ et donc :
$\mathcal{M}_2, m_1 \nvDash_i \exists x \Box P(x)$.

Il n'existe donc pas de formule *de dicto* S5-équivalente à $\exists x \Box P(x)$. On pourrait paraphraser ce résultat en disant que la formule $\exists x \Box P(x)$ a détecté une différence entre $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ qu'aucune formule *de dicto* ne peut repérer.

5.4 Arbres en modale quantifiée (à domaine constant)

On reprend sans modification les règles pour la logique des propositions et les règles pour la modale propositionnelle (voir section 3.1, p. 45), auxquelles on ajoute les règles spécifiques pour les quantificateurs :

5.4.1 Règles pour les quantificateurs.

- Règles $\forall$:

$$\frac{n.\forall x\varphi[x]}{n.\varphi\ [a]} \qquad \frac{n.\sim\exists x\varphi[x]}{n.\sim\varphi[a]}$$

"a" constante déjà introduite sur la branche ou, à défaut, constante quelconque.

- Règles $\exists$:

$$\frac{n.\exists\varphi[x]}{n.\varphi[a]} \qquad \frac{n.\sim\forall x\varphi[x]}{n.\sim\varphi[a]}$$

"a" constante nouvelle sur la branche.

Remarque importante : il importerait d'utiliser les règles dans l'ordre suivant : règles pour les connecteurs, règles pour les opérateurs modaux (les règles $\Diamond$ avant les règles $\Box$) et enfin règles pour les quantificateurs (les règles $\exists$ avant les règles $\forall$).

5.4.2 Exemples d'arbres

1. $\exists x \Diamond[\Box Px \Rightarrow \forall x \Box Px]$ (dans **T**) :

1. $\sim\exists x\Diamond[\Box Px \Rightarrow \forall x\Box Px]$ (1)
|
1. $\sim\Diamond[\Box Pa \Rightarrow \forall x\Box Px]$ (2)
|
1. $\sim[\Box Pa \Rightarrow \forall x\Box Px]$ (3)
|
1. $\Box Pa$ (4)
|
1. $\sim\forall x\Box Px$ (5)
|
1. $\sim\Box Pb$ (6)
|
1.1. $\sim Pb$ (7)
|
1.1. Pa (8)
|
1. $\sim\Diamond[\Box Pb \Rightarrow \forall x\Box Px]$ (9)
|
1. $\sim[\Box Pb \Rightarrow \forall x\Box Px]$ (10)
|
1. $\Box Pb$ (11)
|
1. $\sim\forall x\Box Px$ (12)
|
1.1. Pb (13)
X
(13)/(7)

Explications : (2) sur (1) par règle "$\sim\exists$; (3) sur (2) par règle T ; (4), (5) sur (3) par règle "$\sim\Rightarrow$" ; (6) sur (5) par règle "$\sim\forall$; (7) sur (6) par règle"$\sim\Box$" ; (8) sur (4) par règle "$\Box$" ; (9) sur (1) par règle "$\sim\exists$" ; (10) sur (9) par règle T ; (11), (12) sur (10) par règle "$\sim\Rightarrow$" et enfin (13) sur (11) par règle "$\Box$".

Remarques :

- Jusqu'à (8) aucune contradiction n'apparaît, mais l'introduction de la nouvelle constante b pour traiter (5) et obtenir (6), oblige à retraiter l'universelle (1) ; d'où la prolongation de l'arbre (9) - (13).

- Par souci de rapidité, on n'a pas traité la formule (12) qui aurait conduit à ouvrir un nouveau monde, dans lequel on aurait eu $\sim Pc$ (par (12)), Pa (par (4)) et Pb (par (11)) ; mais cela n'aurait pas eu d'incidence sur la fermeture de l'arbre qui provient de la contradiction entre (13) et (7).

2. $\forall x \Diamond Px \Rightarrow \Diamond \forall x Px$ (dans **K**) :

1. $\sim(\forall x \Diamond Px \Rightarrow \Diamond \forall x Px)$ (1)
|
1. $\forall x \Diamond Px$ (2)
|
1. $\sim \Diamond \forall x Px$ (3)
|
1. $\Diamond Pa$ (4)
|
1.1. Pa (5)
|
1.1. $\sim \forall x Px$ (6)
|
1.1. $\sim Pb$ (7)
|
1. $\Diamond Pb$ (8)
|
1.2. Pb (9)
|
1.2. $\sim \forall x Px$ (10)
|
1.2. $\sim Pc$ (11)
etc.
↑

Explications : (2), (3) sur (1) par règle "$\sim\ \Rightarrow$" ; (4) sur (2) par règle "$\forall$" ; (5) sur (4) par règle "$\Diamond$" ; (6) sur (3) par règle "$\sim\Diamond$" ; (7) sur (6) par règle "$\sim\forall$" ; (8) sur (2) par règle "$\forall$" ; (9) sur (8) par règle "$\Diamond$" ; (10) sur (2) par règle "$\sim\Diamond$" et enfin (11) sur (10) par règle "$\sim\forall$".

Remarque : on voit que l'arbre ne fermera pas puisque, lorsque l'on traite de nouveau (2) avec la constante b introduite dans (7) pour traiter (6), on est obligé d'ouvrir un nouveau monde par $\Diamond$, dans lequel on aura (10) (par (3)), qui oblige à introduire une nouvelle constante $c \neq b$, ce qui obligerait à recommencer le même cycle de traitement sans espoir d'aboutir à une contradiction. L'arbre n'est cependant pas complet et l'on ne peut directement en tirer que la formule initiale est satisfiable (!).

3. Réciproque de la précédente : $\Diamond \forall x Px \Rightarrow \forall x \Diamond Px$ (dans **K**) :

$1.\ \sim\{\Diamond\forall xPx \Rightarrow \forall x\Diamond Px\}$ (1)

$1.\ \Diamond\forall xPx$ (2)

$1.\ \sim\forall x\Diamond Px$ (3)

$1.\ \sim\Diamond Pa$ (4)

$1.1.\ \forall xPx$ (5)

$1.1.\ Pa$ (6)

$1.1.\ \sim Pa$ (7)

X

(7)/(6)

Explications : (2), (3) sur (1) par règle "$\sim\Rightarrow$" ; (4) sur (3) par règle "$\sim\forall$" ; (5) sur (2) par règle "$\Diamond$" ; (6) sur (5) par règle"$\forall$" et enfin (7) sur (4) par règle "$\sim\Diamond$".

4. $\forall x\Box(Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow \Box(\exists xPx \Rightarrow \exists yQy)$ (dans **K**) :

$1.\ \sim\{\forall x\Box(Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow \Box(\exists xPx \Rightarrow \exists yQy)\}$ (1)

$1.\ \forall x\Box(Px \Rightarrow Qx)$ (2)

$1.\ \sim\Box(\exists xPx \Rightarrow \exists yQy)$ (3)

$1.1.\ \sim(\exists xPx \Rightarrow \exists yQy)$ (4)

$1.1.\ \exists xPx$ (5)

$1.1.\ \sim\exists yQy$ (6)

$1.1.\ Pa$ (7)

$1.1.\ \sim Qa$ (8)

$1.\ \Box(Pa \Rightarrow Qa)$ (9)

$1.1.\ Pa \Rightarrow Qa$ (10)

$1.1.\ \sim Pa$ (11) $1.1.\ Qa$ (12)

X X

(11)/(7) (12)/(8)

Explications : (2), (3) sur (1) par règle "$\sim\Rightarrow$" ; (4) sur (3) par règle "$\sim\Box$" ; (5), (6) sur (4) par règle "$\sim\Rightarrow$" ; (7) sur (5) par règle "$\exists$" ; (8) sur (6) par règle "$\sim\exists$" ; (9) sur (2) par règle "$\forall$; (1) sur (9) par règle "$\Box$" et enfin (11), (12) sur (10) par règle "$\Rightarrow$".

5. Les formules de Barcan (dans **K**)
   (a) Barcan universelle : $\forall x\Box Px \Rightarrow \Box\forall xPx$.

$$\begin{array}{c}
1.\ \sim(\forall x\Box Px \Rightarrow \Box\forall xPx)\ \ (1)\\
|\\
1.\ \forall x\Box Px\ (2)\\
|\\
1.\ \sim\Box\forall xPx\ (3)\\
|\\
1.1.\ \sim\forall xPx\ (4)\\
|\\
1.1.\ \sim Pa\ (5)\\
|\\
1.\ \Box Pa\ (6)\\
|\\
1.1.\ Pa\ (7)\\
\mathsf{X}\\
(7)/(5)
\end{array}$$

Explications : (2), (3) sur (1) par la règle "$\sim\Rightarrow$" ; (4) sur (3) par la règle "$\sim\Box$" ; (5) sur (4) par la règle "$\sim\forall$" ; (6) sur (2) par la règle "$\forall$" et enfin (7) sur (6) par la règle "$\Box$". Pour les arbres suivant, le lecteur reconstituera par lui-même la démarche suivie.

   (b) Barcan existentielle : $\Diamond\exists xPx \Rightarrow \exists x\Diamond Px$

$$\begin{array}{c}
1.\ \sim(\Diamond\exists xPx \Rightarrow \exists x\Diamond Px)\ \ (1)\\
|\\
1.\ \Diamond\exists xPx\ (2)\\
|\\
1.\ \sim\exists x\Diamond Px\ (3)\\
|\\
1.1.\ \exists xPx\ (4)\\
|\\
1.1.\ Pa\ (5)\\
|\\
1.\ \sim\Diamond Pa\ (6)\\
|\\
1.1.\ \sim Pa\ (7)\\
\mathsf{X}\\
(7)/(5)
\end{array}$$

(c) Converse de Barcan universelle : $\Box\forall xPx \Rightarrow \forall x\Box Px$.

1. $\sim(\Box\forall xPx \Rightarrow \forall x\Box Px)$ (1)
|
1. $\Box\forall xPx$ (2)
|
1. $\sim\forall x\Box Px$ (3)
|
1. $\sim\Box Pa$ (4)
|
1.1. $\sim Pa$ (5)
|
1.1. $\forall xPx$ (6)
|
1.1. Pa (7)
X
(7)/(5)

(d) Converse de Barcan existentielle : $\exists x\Diamond Px \Rightarrow \Diamond\exists xPx$.

1. $\sim(\exists x\Diamond Px \Rightarrow \Diamond\exists xPx)$ (1)
|
1. $\exists x\Diamond Px$ (2)
|
1. $\sim\Diamond\exists xPx$ (3)
|
1. $\Diamond Pa$ (4)
|
1.1. Pa (5)
|
1.1. $\sim\exists xPx$ (6)
|
1.1. $\sim Pa$ (7)
X
(7)/(5)

Chapitre 6

Domaines variables

La seule différence formelle entre les modèles à domaine variable et les modèles à domaine constant est relative à la définition du domaine et aux règles d'évaluation des formules quantifiées. Plutôt que d'admettre un domaine d'objets unique commun à tous les mondes, on admet maintenant qu'à chaque monde correspond un domaine d'objets qui lui est propre et qui n'est pas nécessairement identique à celui d'un autre monde. On admet alors qu'une existentielle, par ex., ne peut être vraie dans un monde que si, *dans ce monde*, il existe un objet qui satisfait la formule qui est dans la portée du quantificateur ; si tel n'est pas le cas, la formule est fausse dans ce monde, même s'il existe, *dans un autre monde*, un objet la satisfaisant.

Rappelons cependant que malgré cette variabilité des domaines, l'interprétation des lettres de prédicats P^n se fait de telle sorte que dans chaque monde, les formules élémentaires de la forme $P^n(x_1, \ldots x_n)$ sont vraies ou fausses, que les objets interprétant les $x_1, \ldots, x_n$ "existent" ou n'"existent" pas dans le monde d'évaluation. Toute formule élémentaire, et donc toute formule, a ainsi une valeur de vérité dans chacun des mondes pour une interprétation des lettres de prédicat et une interprétation des variables d'individu (ouf !).

6.1 Modèles à domaine variable, évaluation et validité

1. Modèles à domaine variable.

   On reprend sans modification la définition donnée ci-dessus (voir section 5.3.1,

p. 94) des modèles à domaine constant, sauf en ce qui concerne la définition de D : au domaine unique D, se substitue un ensemble de domaines, chacun étant relatif à un monde $m_i \in M$; on note donc le domaine relatif à m_i : D_{m_i}.

Conformément à la remarque précédente, le domaine d'interprétation des variables est l'union des D_{m_i} : $\bigcup D_{m_i}$ - que l'on note simplement D - et l'interprétation des lettres de prédicat se fait, comme précédemment, par le biais d'une fonction I qui va de l'ensemble des paires ordonnées : $\mathcal{P} \times M$ vers l'union des puissances de D : $\bigcup D^n$, c'est à dire : $I : \mathcal{P} \times M \rightarrow \bigcup D^n$, avec pour une lettre de prédicat à n places, $P^n(x_1, \ldots, x_n)$: $I(\langle P^n, m_i \rangle) \subseteq D^n$.
Moyennant ces re-définitions, un modèle à domaine variable $\mathcal{M}$ est défini comme un quadruplet : $\mathcal{M} =< M, R, D, I >$.

2. Règles d'évaluation dans un modèle à domaine variable ; validité(s).
   On reprend sans changement les règles valant pour les modèles à domaine constant (voir section 5.3.2, p. 96), sauf en ce qui concerne les règles pour les quantificateurs qui maintenant s'énoncent (les changements sont soulignés) :
   $6'$ φ est de la forme $\forall x \psi$, alors :

   $m_j \vDash_i \varphi$ ssi pour toute interprétation i', x-variante de i $\underline{\text{dans } m_j}$, $m_j \vDash_{i'} \psi$.

   $7'$ φ est de la forme $\exists x \psi$, alors :

   $m_j \vDash_i \varphi$ ssi pour au moins une interprétation i', x-variante de i $\underline{\text{dans } m_j}$, $m_j \vDash_{i'} \psi$.

3. La définition de la validité dans un modèle à domaine variable n'est plus exactement la même que celle de la validité dans un modèle à domaine constant ; elle se formule ainsi :

   Une formule est valide dans un modèle ssi elle est vraie dans chaque monde m du modèle, pour toute interprétation i des variables d'individu telle que $\underline{i(x) \in m}$, pour toute variable x (on abrégera en disant simplement que i est une interprétation des variables $\underline{\text{dans } m}$)[1].

---

[1] La justification de cette modification sera fournie plus loin, voir section 6.4.3, p. 132

Les définitions de "validité dans un cadre" et de "validité dans une classe de cadre" restent inchangées (voir section 5.3.2, p.96).

6.1.1 Exemples d'évaluation dans un modèle à domaine variable.

Les résultats les plus intéressants concernent évidemment les formules de Barcan.

1. Soit la Barcan universelle : $\forall x \Box Px \Rightarrow \Box \forall x Px$, et soit $\mathcal{M}$ le modèle suivant :

    - $M = \{m_1, m_2\}$,
    - $R = \{< m_1, m_2 >\}$
    - $D_{m_1} : \{a, b\}$; $D_{m_2} : \{c, d\}$,
    - $I(\langle P, m_1 \rangle) = \emptyset$; $I(\langle P, m_2 \rangle) = \{a, b, c\}$
    - i quelconque (puisque la Barcan universelle est close).

- $\mathcal{M}, m_1 \models_i \forall x \Box Px$.
  En effet, il y a deux interprétations , i' et i'', x-variantes de i dans m_1 : $i'(x) = a$ et $i''(x) = b$; or :
  - $\mathcal{M}, m_2 \models_{i'} Px$, puisque $i'(x) = a \in I(\langle P, m_1 \rangle)$ et, comme m_2 est le seul monde tel que $m_1 R m_2$, $\mathcal{M}, m_1 \models_{i'} \Box Px$, et :
  - $\mathcal{M}, m_2 \models_{i''} Px$, puisque $i''(x) = b \in I(\langle P, m_1 \rangle)$ et, comme m_2 est le seul monde tel que $m_1 R m_2$, $\mathcal{M}, m_1 \models_{i''} \Box Px$.

  Ainsi, pour toute interprétation j, x-variante de i dans m_1, $\mathcal{M}, m_1 \models_j \Box Px$; donc : $\mathcal{M}, m_1 \models_i \forall x \Box Px$.

- Mais : $\mathcal{M}, m_1 \not\models_i \Box \forall x Px$.
  En effet, il existe une interprétation i', x-variante de i dans m_2 (à savoir : $i'(x) = d$), telle que $\mathcal{M}, m_2 \not\models_{i'} Px$, puisque $d \notin I(\langle P, m_2 \rangle)$; donc, $\mathcal{M}, m_2 \not\models_i \forall x Px$.
  Et comme $m_1 R m_2$, $\mathcal{M}, m_1 \not\models_i \Box \forall x Px$.

Il en résulte que : $\mathcal{M}, m_1 \not\models_i \forall x \Box Px \Rightarrow \Box \forall x Px$.

2. Soit la Barcan existentielle : $\Diamond \exists x Px \Rightarrow \exists x \Diamond Px$, et soit $\mathcal{M}$ le modèle suivant :

    - $M = \{m_1, m_2\}$,
    - $R = \{< m_1, m_2 >\}$
    - $D_{m_1} : \{a, b\}$; $D_{m_2} : \{b, c, d\}$,
    - $I(\langle P, m_1 \rangle) = \emptyset$; $I(\langle P, m_2 \rangle) = \{c\}$
    - i quelconque (puisque la Barcan existentielle est close).

- $\mathcal{M}, m_1 \vDash_i \Diamond \exists x Px$.
  En effet, il existe une interprétation i', x-variante de i $\underline{\text{dans } m_2}$ (à savoir $i'(x) = c$), telle que $\mathcal{M}, m_2 \vDash_{i'} Px$, puisque $c \in I(\langle P, m_2 \rangle)$; donc $\mathcal{M}, m_2 \vDash_i \exists x Px$.
  Et comme $m_1 R m_2$, $\mathcal{M}, m_1 \vDash_i \Diamond \exists x Px$.

- $\mathcal{M}, m_1 \nvDash_i \exists x \Diamond Px$.
  En effet, il y a deux interprétations, i' et i'', x-variante de i dans $\underline{m_1}$: $i'(x) = a$ et $i''(x) = b$; or :
  - $\mathcal{M}, m_2 \nvDash_{i'} Px$, puisque $i'(x) = a \notin I(\langle P, m_2 \rangle)$ et, comme m_2 est le seul monde tel que $m_1 R m_2$, $\mathcal{M}, m_1 \nvDash_{i'} \Diamond Px$, et :

  - $\mathcal{M}, m_2 \nvDash_{i''} Px$, puisque $i''(x) = b \notin I(\langle P, m_2 \rangle)$ et, comme m_2 est le seul monde tel que $m_1 R m_2$, $\mathcal{M}, m_1 \nvDash_{i''} \Diamond Px$.

    Ainsi, pour aucune interprétation j, x-variante de i $\underline{\text{dans } m_1}$, $\mathcal{M}, m_1 \vDash_j \Diamond Px$; donc : $\mathcal{M}, m_1 \nvDash_i \exists x \Box Px$.

Il en résulte que : $\mathcal{M}, m_1 \nvDash_i \Diamond \exists x Px \Rightarrow \exists x \Diamond Px$.

Ces deux formules de Barcan ne sont donc pas K-valides dans la perspective "actualiste" ; résultat que l'on peut étendre sans difficulté aux deux autres formules de Barcan.

3. On montre de la même façon que la formule $\Diamond \forall x Px \Rightarrow \forall x \Diamond Px$ qui est K-valide comme on l'a vu plus haut (voir p. 98) si l'on adopte le point de vue "possibiliste", ne l'est plus dans la perspective "actualiste", ce qui vaut également de la formule $\exists x \Box Px \Rightarrow \Box \exists x Px$.

   Soit en effet le modèle $\mathcal{M}$, défini comme suit :

- $M = \{m_1, m_2\}$,
- $R = \{< m_1, m_2 >\}$,
- $D_{m_1} = \{a\}; D_{m_2} = \{b, c\}$,
- $I(\langle P, m_1\rangle) = \emptyset$; $I(\langle P, m_2\rangle) = \{b, c\}$.
- i quelconque (puisque la formule est close).

- $\mathcal{M}, m_1 \vDash_i \Diamond\forall x Px$
  En effet, il n'y a que deux interprétations i' et i'', x-variantes de i, <u>dans m_2</u>, $i'(x) = b$ et $i''(x) = c$; or :
  - $\mathcal{M}, m_2 \vDash_{i'} Px$, puisque $i'(x) = b \in I(\langle P, m_2\rangle)$, et
  - $\mathcal{M}, m_2 \vDash_{i''} Px$, puisque $i''(x) = c \in I(\langle P, m_2\rangle)$.

  Donc $\mathcal{M}, m_2 \vDash_i \forall x Px$.
  Et comme $m_1 R m_2$, $\mathcal{M}, m_1 \vDash_i \Diamond\forall x Px$.

- Mais : $\mathcal{M}, m_1 \nvDash_i \forall x \Diamond Px$
  En effet, il n'y a qu'une interprétation x-variante de i, <u>dans m_1</u>, $i'(x) = a$; or :
  $\mathcal{M}, m_2 \nvDash_{i'} Px$, puisque $i'(x) = a \notin I(\langle P, m_2\rangle)$ et comme m_2 est le seul monde tel que $m_1 R m_2$, $\mathcal{M}, m_1 \nvDash_{i'} \Diamond Px$.
  Donc $\mathcal{M}, m_1 \nvDash_{i'} \forall x \Diamond Px$.

Il en résulte que : $\mathcal{M}, m_1 \nvDash_i \Diamond\forall x Px \Rightarrow \forall x \Diamond Px$.

6.2 Arbres en domaine variable.

1. Règles pour les quantificateurs en domaine variable.

   Les seuls changements que l'on introduit dans les règles pour la construction des arbres que l'on a donné ci-dessus, concernent les règles pour les quantificateurs. On convient dans ce qui suit d'indicer les constantes par le préfixe "$n.$" indiquant par là que la constante en question a été introduite lors du traitement d'une formule ayant ce même préfixe.

   Les règles s'énoncent alors de la manière suivante (les nouveautés sont soulignées) :

- Règles $\forall_v$:

$$\frac{n.\forall x\varphi[x]}{n.\varphi\ \underline{[a_{n.}]}} \qquad \frac{n.\sim\exists x\varphi[x]}{n.\sim\varphi\underline{[a_{n.}]}}$$

"$\underline{a_{n.}}$" constante déjà introduite sur la branche ou, à défaut, constante quelconque d'indice "n.".

- Règles $\exists_v$:

$$\frac{n.\exists\varphi[x]}{n.\varphi\underline{[a_{n.}]}} \qquad \frac{n.\sim\forall x\varphi[x]}{n.\sim\varphi\underline{[a_{n.}]}}$$

avec "$\underline{a_{n.}}$" constante nouvelle sur la branche.

Il suit de ces règles que si une formule comme ; 1. $\Diamond\exists xPx$ doit être traitée alors qu'il n'y a encore, sur la branche aucune formule avec un préfixe de la forme 1.1., ou 1.2., etc., le résultat sera d'abord : 1.1. $\exists xPx$, puis : 1.1. $Pa_{1.1.}$. Alors que, dans les mêmes circonstances, la formule : 1. $\exists x\Diamond Px$ donnera d'abord : 1. $\Diamond Pa_{1.}$, puis : 1.1. $Pa_{1.}$.

Si l'on admet que les préfixes désignent des "mondes", la différence entre ces deux traitements est la suivante : dans le premier cas, on pose qu'un élément qui "existe" en 1.1., mais pas en 1., est P en 1.1., alors que dans le deuxième, on dit qu'un élément qui "existe" en 1., mais pas en 1.1. est cependant P dans 1.1..

2. Exemples d'arbres en domaine variable.

Le plus simple et le plus significatif est de reprendre les formules de Barcan et leurs converses, dont les arbres restent ouverts (dans **K**, mais on se convaincra facilement que l'utilisation des autres règles ne permettrait pas de fermer les arbres)

(a) Barcan universelle : $\forall x\Box Px \Rightarrow \Box\forall xPx$.

$$1.\ \sim(\forall x\Box Px \Rightarrow \Box\forall x Px)\ \ (1)$$
$$|$$
$$1.\ \forall x\Box Px\ (2)$$
$$|$$
$$1.\ \sim\Box\forall x Px\ (3)$$
$$|$$
$$1.1.\ \sim\forall x Px\ (4)$$
$$|$$
$$1.1.\ \sim Pa_{1.1.}\ (5)$$
$$|$$
$$1.\ \Box Pa_{1.}\ (6)$$
$$|$$
$$1.1.\ Pa_{1.}\ (7)$$
$$\uparrow$$

Explications : (2), (3) sur (1) par la règle "$\sim\Rightarrow$" ; (4) sur (3) par la règle "$\sim\Box$" ; (5) sur (4) par la règle "$\sim\forall_v$" ; (6) sur (2) par la règle "$\forall_v$" et enfin (7) sur (6) par la règle "$\Box$". Pour les arbres suivants, le lecteur reconstituera par lui-même la démarche suivie.

On peut extraire de cette branche ouverte, un modèle dans lequel la Barcan universelle n'est pas valide (un "contre-modèle", dit-on parfois), que l'on définit comme suit :

- $M = \{m_1, m_2\}$,
- $R = \{< m_1, m_2 >\}$,
- $D_{m_1} = \{a\}$, $D_{m_2} = \{b\}$, (donc $D = \{a, b\}$),
- $I(\langle P, m_1\rangle) = \emptyset$ et $I(\langle P, m_2\rangle) = \{a\}$

Ce modèle a été obtenu de la manière suivante :
- aux deux préfixes 1. et 1.1., on fait correspondre les deux mondes m_1 et m_2 respectivement.
- étant donné la forme des deux préfixes, on pose que m_1 ($\rightarrow$ 1.) "voit" m_2 ($\rightarrow$ 1.1.), i.e. $m_1 R m_2$.
- par application de la règle $\forall_v$ à (2), on a introduit la constante $a_{1.}$ ($\rightarrow a$) dans le domaine de m_1 et par application de la règle $\sim\forall_v$ à (4), on a introduit la constante $a_{1.1.}$ ($\rightarrow b$) dans le domaine de m_2.
- enfin, puisque l'on a "1.1. $\sim Pa_{1.1.}$" et "1.1. $Pa_{1.}$", on pose : $a \in I(\langle P, m_2\rangle)$ et $b \notin I(\langle P, m_2\rangle)$.

On voit facilement que l'interprétation de P dans m_1 est indifférente : on aurait pu, par ex., poser $I(\langle P, m_1\rangle) = \{a\}$. On remarque également que l'introduction de $a_{1.}$ à la sixième ligne se fait par l'intermédiaire d'une universelle (à savoir (2)), puisqu'il n'y avait encore aucune constante introduite dans le domaine de m_1 ($\rightarrow$ 1.) ; on retrouve cela dans les quatre arbres pour les formules de Barcan et leurs converses.

Soit maintenant i, une interprétation quelconque :

- Il n'y qu'une interprétation i', x-variante de i en m_1, à savoir $i'(x) = a$ et un seul monde accessible de m_1, à savoir m_2. Or $m_2 \vDash_{i'} Px$ donc, $m_1 \vDash_{i'} \Box Px$, et comme il n'y a pas d'autres interprétations x-variantes de i dans m_1, $m_1 \vDash_i \forall x \Box Px$.
- Il existe i', x-variante de i dans m_2, à savoir $i'(x) = b$, telle que $m_2 \nvDash_{i'} Px$. Donc, $m_2 \nvDash_{i'} \forall x Px$. Comme $m_1 R m_2$, $m_1 \nvDash \Box \forall x Px$.

Il en résulte : $m_1 \nvDash_{m_1} \forall x \Box Px \Rightarrow \Box \forall x Px$.

(b) Barcan existentielle : $\Diamond \exists x Px \Rightarrow \exists x \Diamond Px$.

$$\begin{array}{c}
1.\ \sim(\Diamond\exists xPx \Rightarrow \exists x\Diamond Px)\ \ (1) \\
| \\
1.\ \Diamond\exists xPx\ (2) \\
| \\
1.\ \ \sim\exists x\Diamond Px\ (3) \\
| \\
1.1.\ \exists xPx\ (4) \\
| \\
1.1.\ Pa_{1.1.}\ (5) \\
| \\
1.\ \ \sim\Diamond Pa_{1.}\ (6) \\
| \\
1.1.\ \ \sim Pa_{1.}\ (7) \\
\uparrow
\end{array}$$

On pourra s'exercer à extraire un modèle de la branche ouverte, comme on vient de faire pour la Barcan universelle.

(c) Converse de Barcan universelle : $\Box \forall x Px \Rightarrow \forall x \Box Px$.

$1.\ \sim(\Box\forall xPx \Rightarrow \forall x\Box Px)\ \ (1)$
$|$
$1.\ \Box\forall xPx\ (2)$
$|$
$1.\ \sim\forall x\Box Px\ (3)$
$|$
$1.\ \sim\Box Pa_{1.}\ (4)$
$|$
$1.1.\ \sim Pa_{1.}\ (5)$
$|$
$1.1.\ \forall xPx\ (6)$
$|$
$1.1.\ Pa_{1.1.}\ (7)$
$\uparrow$

(d) Converse de Barcan existentielle : $\exists x\Diamond Px \Rightarrow \Diamond\exists xPx$.

$1.\ \sim(\exists x\Diamond Px \Rightarrow \Diamond\exists xPx)\ \ (1)$
$|$
$1.\ \exists x\Diamond Px\ (2)$
$|$
$1.\ \sim\Diamond\exists xPx\ (3)$
$|$
$1.\ \Diamond Pa_{1.}\ (4)$
$|$
$1.1.\ Pa_{1.}\ (5)$
$|$
$1.1.\ \sim\exists xPx\ (6)$
$|$
$1.1.\ \sim Pa_{1.1.}\ (7)$
$\uparrow$

6.3 Cadres étendus monotones et anti-monotones.

6.3.1 Formules de Barcan et modèles fondés sur des cadres anti-monotones.

1. **Retour sur les formules de Barcan universelles.**
   Considérons le modèle que l'on a extrait de l'arbre (en domaine variable) que l'on fait ci-dessus pour la formule de Barcan : $\forall x\Box Px \Rightarrow \Box\forall xPx$. Pourquoi la formule y est-elle fausse en m_1 et à quelle condition serait-elle vraie ?

En m_1, l'antécédent de la formule "dit" que tous les objets qui sont dans le domaine de m_1 (ici l'unique objet a) sont nécessairement P, autrement dit, qu'ils sont P dans tous les mondes accessibles de m_1 (ici l'unique monde m_2). Cela ne préjuge pas du fait que les objets (ici a) dont il est dit qu'il sont nécessairement P, "existent" dans ces mondes accessibles de m_1.

En m_1, le conséquent "dit" que dans tous les mondes accessibles de m_1 (ici l'unique monde m_2, donc), tous les objets qui "existent" dans ces mondes (ici le seul b) sont P. Mais b n'appartenant pas au domaine de m_1, l'antécédent de la formule, qui ne porte que sur les objets "existant" dans m_1, n'en dit rien, et il peut très bien se faire, comme c'est le cas dans notre modèle, que b ne soit pas P et donc qu'il ne soit pas vrai dans m_2 que tous les objets (de m_2, donc) soient P.

Si la formule est fausse en m_1, c'est donc parce qu'il y a, dans les mondes accessibles de m_1 (ici, donc, le seul m_2), des objets qui, n'appartenant pas au domaine de m_1, ne sont pas dans la portée du quantificateur universel de l'antécédent et peuvent ne pas avoir la propriété qu'ont nécessairement tous les objets qui sont dans le domaine de m_1.

A l'inverse, si, ici, b avait été dans le domaine de m_1, l'antécédent de la formule aurait été tout simplement faux (et donc la formule de B. vraie) puisque, dans m_2, b n'est pas P et qu'en conséquence il n'est pas nécessairement P dans m_1 ; donc, il n'est pas vrai de tous les objets appartenant au domaine de m_1 qu'ils sont nécessairement P.

En général, donc, pour que la Barcan universelle soit vraie dans un monde, il semblerait qu'il soit nécessaire que se trouvent dans la portée du quantificateur universel de l'antécédent tous les objets qui se trouvent dans les domaines des mondes accessibles du monde d'évaluation ; il faudrait donc que tous les objets qui se trouvent dans les domaines des mondes accessibles du monde d'évaluation se trouvent également dans ce dernier monde.

Cette condition (dite "anti-monotonie") concerne donc les cadres étendus sur lesquels sont fondés les modèles, et peut se formuler de la manière suivante :

Un cadre $< M, R, D >$ est dit "anti-monotone" ssi pour tout $m_i, m_j \in M$ tels que $m_i R m_j$, $D_{m_j} \subseteq D_{m_i}$.

On peut montrer que les formules de Barcan sont valides dans tout modèle fondé sur un cadre anti-monotone (on parlera alors de modèle anti-monotone).

2. **Validité des formules de Barcan dans les cadres anti-monotones.**

   On se contentera de démontrer que la formule de Barcan existentielle : $\Diamond\exists xPx \Rightarrow \exists x\Diamond Px$ est valide dans un cadre ssi ce cadre est anti-monotone.

   Cela vaut pour toutes les Barcan existentielles et peut être démontré semblablement pour les universelles.

   (a) Dans le sens $\leftarrow$:

   Soit $\mathcal{M}$ un modèle quelconque fondé sur un cadre anti-monotone quelconque, $m \in M$ un monde quelconque et i une interprétation quelconque.

   - $m \vDash_i \Diamond\exists xPx$ ssi il existe un monde m' tel que mRm' et $m' \vDash_i \exists xPx$ ssi il existe une interprétation i', x-variante de i $\underline{\text{dans } m'}$ telle que $m' \vDash_{i'} Px$. Posons $i'(x) = a$ avec $a \in D_{m'}$ et donc en raison de l'anti-monotonie, $a \in D_m$.
   - Dans ces conditions on a alors : $m \vDash_i \exists x\Diamond Px$. En effet, puisque l'on a admis : $m' \vDash_{i'} Px$ et que mRm', il en résulte : $m \vDash_{i'} \Diamond Px$, et comme i' est une x-variante de i également $\underline{\text{dans } m}$ (par l'anti-monotonie), on a bien : $m \vDash_i \exists x\Diamond Px$.

   (b) Dans le sens $\rightarrow$.

   Par contraposition : supposons un modèle $\mathcal{M}$ fondé sur un cadre qui ne soit pas anti-monotone. On montre qu'alors il existe un monde $m \in M$ tel que $m \nvDash_i \Diamond\exists xPx \Rightarrow \exists x\Diamond Px$, pour une interprétation i quelconque.

   Puisque $\mathcal{M}$ n'est pas anti-monotone, il existe $m, m' \in M$ tels que mRm' et $D_{m'} \nsubseteq D_m$; il existe donc au moins un élément, disons a, tel que $a \in D_{m'}$ et $a \notin D_m$.

   On définit I par : $I(\langle P, m'\rangle) = \{a\}$ et pour tout autre monde m'', $I(\langle P, m''\rangle) = \emptyset$, (donc en particulier on a : $I(\langle P, m\rangle) = \emptyset$).

   Soit i une interprétation quelconque, alors :

   - $m \vDash_i \Diamond\exists xPx$ puisqu'il existe une interprétation i', x-variante de i $\underline{\text{dans } m'}$, à savoir $i'(x) = a$, telle que $m' \vDash_{i'} Px$ (puisque $a \in I(\langle P, m'\rangle)$). Donc on a : $m' \vDash_i \exists xPx$, d'où : $m \vDash_i \Diamond\exists xPx$, puisque mRm'. Mais :

   - $m \nvDash_i \exists x\Diamond Px$.

     $m \vDash_i \exists x\Diamond Px$, ssi il existe une interprétation i', x-variante de i $\underline{\text{dans } m}$ et un monde m_j, tels que mRm_j et $m_j \vDash_{i'} Px$. Or il n'existe pas d'interprétation i', x-variante de i dans m telle que, pour un monde m_j

accessible de m (mRm_j), on aurait $m_j \vDash_{i'} Px$.

Pour le montrer, il faut envisager deux cas : soit $m_j \neq m'$, soit $m_j = m'$.

i. Soit $m_j \neq m'$ et mRm_j.
   Comme $m_j \neq m'$, par df. de I, $I(\langle P, m_j \rangle) = \emptyset$, et donc $m_j \nvDash Px$ pour toute interprétation et donc en particulier pour toute interprétation i', x-variante de i dans m ; autrement dit : pour tout monde m_j, et donc tout monde accessible de m, et toute interprétation i', x-variante de i dans m, $m_j \nvDash_{i'} Px$.

ii. Soit $m_j = m'$ et donc mRm_j puisque, par hyp., mRm'.
   Puisque $a \notin D_m$, et que seul $a \in I(\langle P, m' \rangle)$, il n'y a pas d'interprétation i', x-variante de i dans m telle que $m' \vDash_{i'} Px$.

Puisque par i. et ii., il n'existe aucune interprétation i', x-variante de i dans m ni aucun monde m_j accessible de m tel que $m_j \vDash_{i'} Px$, on a : $m \nvDash_i \exists x \Diamond Px$.

Il en résulte que : $m \nvDash_i \Diamond \exists x Px \Rightarrow \exists x \Diamond Px$; et donc par contraposition : si $\Diamond \exists x Px \Rightarrow \exists x \Diamond Px$ est valide dans un modèle, ce modèle est fondé sur un cadre anti-monotone.

6.3.2 Converses des formules de Barcan et modèles fondés sur des cadres monotones

1. Les considérations du paragraphe précédent sur la raison pour laquelle les formules de Barcan universelles ne sont pas valides dans tous les modèles à domaine variable, s'adaptent facilement au cas des converses des formules de Barcan, universelles ou existentielles, et conduisent à la conclusion que si elles sont fausses dans un monde m, c'est qu'une interprétation x-variante dans m, ne l'est pas nécessairement dans les mondes accessibles de m. Autrement dit, se trouvent dans le domaine du monde m des objets qui ne se trouvent pas dans les domaines des mondes accessibles de m.

   Ce qui suggère, à l'inverse, que si tous les objets qui se trouvent dans le domaine du monde d'évaluation m, se trouvaient également dans les domaines des mondes accessibles de m, alors les converses des formules de Barcan y seraient vraies pour toute interprétation des variables d'individu. Si cette condition est réalisée en général pour tous les mondes d'un modèle $\mathcal{M}$, on dit que le cadre sur lequel est fondé $\mathcal{M}$, est "monotone", ce que l'on peut définir comme suit :

Un cadre $< M, R, D >$ est monotone ssi pour tout $m_i, m_j \in M$, tels que $m_i R m_j$, $D_{m_i} \subseteq D_{m_j}$.

On peut montrer que les converses des formules de Barcan sont valides dans tous les cadres monotones.

2. **Validité des converses de formules de Barcan dans les cadres monotones.**
   Comme précédemment, on peut se contenter de démontrer que la converse de la formule de Barcan existentielle (par ex.) : $\exists x \Diamond Px \Rightarrow \Diamond \exists x Px$ est valide dans un cadre ssi ce cadre est monotone.
   Et comme la démonstration, suit exactement le même schéma que ci-dessus, on laisse au lecteur le soin de la rédiger …

6.3.3 Cadres à domaine localement constant

Si un cadre (étendu) est à la fois monotone et anti-monotone, alors, évidemment, il est à domaine constant. On peut définir une notion un peu plus faible, celle de cadre à domaine *localement constant*.

Un cadre (étendu) $F =< M, R, D >$ est localement constant ssi pour tout $m_i, m_j \in M$, si $m_i R m_j$ alors $D_{m_i} = D_{m_j}$. Un modèle fondé sur un cadre à domaine localement constant est dit lui-même "à domaine localement constant".

On montre facilement qu'une formule φ est valide dans tout modèle à domaine constant ssi elle est valide dans tout modèle à domaine localement constant.

Dans le sens $\leftarrow$. Il est clair que si un modèle est à domaine constant, il est *a fortiori* à domaine localement constant ; autrement dit, l'ensemble des modèles à domaine constant est inclus dans l'ensemble des modèles à domaine localement constant. Si donc une formule est valide dans tout modèle à domaine localement constant, elle l'est dans tout modèle à domaine constant.

Dans le sens $\rightarrow$. Par contraposition : si une formule φ n'est pas valide dans un modèle à domaine localement constant, elle n'est pas valide dans tout modèle à domaine constant.

Soit un modèle à domaine localement constant : $\mathcal{M} =< M, R, D, I >$ et un monde $m_i \in M$ tel que $m_i \not\models \varphi$.

On va construire à partir de $\mathcal{M}$ et de m_i un modèle à domaine constant dans lequel φ n'est pas valide. L'idée qui préside à cette construction est que seuls les mondes accessibles de m_i et ceux qui sont accessibles des accessibles de m_i, et ceux qui sont accessibles des accessibles des accessibles de m_i, etc., interviennent dans l'évaluation de φ dans m_i. Tous ces mondes ont par définition les mêmes domaines et forment un ensemble qui servira à construire l'ensemble des mondes du modèle à domaine constant dans lequel φ n'est pas valide.

On définit ce qu'est un *chemin* entre m_j et m_h dans $\mathcal{M}$ comme étant une suite de mondes reliés par R à partir de m_j et se finissant par m_h, de telle sorte que chaque monde de la suite différent de m_j et de m_h, est accessible du précédent et a accès au suivant. Plusieurs chemins peuvent partir d'un même monde. Les mondes *pertinents* pour l'évaluation d'une formule dans un monde m sont tous ceux qui appartiennent à un chemin commençant par m.

En vertu du fait que $\mathcal{M}$ est localement constant, tous les mondes pertinents pour l'évaluation d'une formule dans un monde m ont le même domaine d'objets.

On définit alors le modèle $\mathcal{M}' =< M', R', D', I' >$ à partir de $\mathcal{M}$ et de l'ensemble $M^{\varphi}_{m_i}$ des mondes pertinents pour l'évaluation de φ dans m_i par :

- $M' = M^{\varphi}_{m_i}$,
- $< m_j, m_h >\in R'$ ssi $< m_j, m_h >\in R$,
- $D' = D_{m_i}$,
- $I'(\langle P^n, m_j\rangle) = I(\langle P^n, m_j\rangle)$ pour tout P^n et tout $m_j \in M'$.

Ce modèle $\mathcal{M}'$ est donc la restriction à $M^{\varphi}_{m_i}$ du modèle $\mathcal{M}$ dont on était parti, et il est à domaine constant. Dans ce modèle $\mathcal{M}'$, φ est évidemment fausse en m_i, comme elle l'était dans $\mathcal{M}$; donc φ n'est pas valide dans $\mathcal{M}'$.

D'où, par contraposition : si φ est valide dans tout modèle à domaine constant, φ est valide dans tout modèle à domaine localement constant.

6.4 Bizarreries de la logique modale quantifiée

Nous allons examiner rapidement dans ce qui suit quelques difficultés qui apparaissent lorsque l'on fait usage, dans des systèmes axiomatiques, des règles de nécessitation ($N : \vdash \varphi \quad \rightarrow \ \vdash \Box\varphi$) et de généralisation ($G : \vdash \varphi[x] \quad \rightarrow \ \vdash \forall y\varphi[y]$), ainsi que ce que devient en modale quantifiée, la loi : $\vdash \forall x\varphi[x] \Rightarrow \varphi[y]$.

6.4.1 L'objection de Kripke

Dans un article de 1956, A. N. Prior avait cru pouvoir fournir une déduction pour la Barcan existentielle dans S5. En 1963, Kripke montra que dans cette déduction était subrepticement introduit une assomption qui revenait, en gros, à accepter une sémantique à domaine constant. Il montrait, comme on l'a vu plus haut, que les Barcan n'étaient pas valides si l'on adoptait une sémantique à domaine variable ; c'est du reste cet article de Kripke qui présentait pour la première fois une telle sémantique.

Plutôt que de reprendre la déduction de Prior qui est longue et fastidieuse, on va reprendre l'exemple pris par Kripke, qui est beaucoup plus simple et donc beaucoup plus suggestif. Kripke notait en effet que l'on pouvait avoir déjà dans T (en fait dans K) une déduction (qui n'est pas sans rapport avec celle de Prior) pour la converse de la Barcan universelle : $\Box\forall xPx \Rightarrow \forall x\Box Px$, déduction qui prend la forme suivante :

$\vdash_K \forall xPx \Rightarrow Px$	(1)	Ax. de la théorie de la quantification
$\vdash_K \Box(\forall xPx \Rightarrow Px)$	(2)	N sur (1)
$\vdash_K \Box(\forall xPx \Rightarrow Px) \Rightarrow (\Box\forall xPx \Rightarrow \Box Px)$	(3)	Ax. **K**
$\vdash_K \Box\forall xPx \Rightarrow \Box Px$	(4)	par MP sur (2), (3). On aurait pu simplement utiliser R_1 pour passer de (1) à(4).
$\vdash_K \forall x(\Box\forall xPx \Rightarrow \Box Px)$	(5)	G sur (4)
$\vdash_K \Box\forall xPx \Rightarrow \forall x\Box Px$	(6)	par "règle de passage" : $\forall x(\varphi \Rightarrow \psi[x]) \Leftrightarrow (\varphi \Rightarrow \forall x\psi[x])$ pourvu que x ne soit pas libre dans φ.

Kripke remarquait que pour passer de (1) à (2) on utilise N sur une formule ouverte, puisque dans (1), x a une occurrence libre. Or, il est admis en premier ordre qu'une thèse dans laquelle figure une variable libre est équivalente à sa clôture universelle, et n'en est, si l'on peut dire, qu'une abréviation ; autrement dit : $\vdash \varphi[x]$ abrège $\vdash \forall x\varphi[x]$ [2].

Si, maintenant, on remplace (1) par sa clôture universelle, la déduction échoue ; en effet, on aura :

---

[2] Rappel : on a en effet, par la règle de généralisation : si $\vdash \varphi[x]$ alors $\vdash \forall x\varphi[x]$; et on a la déduction suivante à partir de $\vdash \forall x\varphi[x]$:

$\vdash_K \forall x(\forall xPx \Rightarrow Px)$	(1)	Ax. de la théorie de la quantification
$\vdash_K \Box\forall x(\forall xPx \Rightarrow Px)$	(2)	N sur (1)
		ce qui permet d'avoir éventuellement par remplacement :
$\vdash_K \Box(\forall xPx \Rightarrow \forall xPx)$	(3)	et éventuellement par R_1
$\vdash_K \Box\forall xPx \Rightarrow \Box\forall xPx$	(4)	ce qui n'a aucun intérêt !

Pour obtenir $\vdash_K \Box\forall xPx \Rightarrow \forall x\Box Px$ à partir de (2), il faudrait utiliser une thèse de la forme : $\vdash \Box\forall x\varphi[x] \Rightarrow \forall x\Box\varphi[x]$, qui n'est autre que la converse de la Barcan universelle[3].

Kripke mettait ainsi le doigt sur un point important qui peut être présenté plus généralement de la manière suivante.

6.4.2 *N*, *G* et les thèses comportant des variables libres.

On a deux déductions possibles à partir d'une formule ouverte déjà déduite, $\vdash \varphi[x]$, si l'on admet que l'on peut utiliser les règles N et G sans limitation et dans l'ordre que l'on veut :

1. $\vdash \varphi[x]$, puis par G,
   $\vdash \forall x\varphi[x]$, puis par N,
   $\vdash \Box\forall x\varphi[x]$.

$\vdash \forall x\varphi[x]$	(1)	thèse admise
$\vdash \forall x\varphi[x] \Rightarrow \varphi[x]$	(2)	Ax. de la théorie de la quantification
$\vdash \varphi[x]$	(3)	par MP sur (1), (2)

[3] Dans la même veine, on a, dans le système B, une déduction pour la Barcan universelle qui prend la forme suivante (pour une instance simple) :

$\vdash \forall x\Box Px \Rightarrow \Box Px$	(1)	Ax. de la quantification
$\vdash \Box(\forall x\Box Px \Rightarrow \Box Px)$	(2)	N sur (1)
$\vdash \Box(\forall x\Box Px \Rightarrow \Box Px) \Rightarrow (\Diamond\forall x\Box Px \Rightarrow \Diamond\Box Px)$	(3)	thèse de K
$\vdash \Diamond\forall x\Box Px \Rightarrow \Diamond\Box Px$	(4)	MP sur (2), (3) (on aurait pu utilisé R_2 pour aller directement de (1) à (4)
$\vdash \Diamond\Box Px \Rightarrow Px$	(5)	thèse de B (forme de l'Ax. **B**)
$\vdash \Diamond\forall x\Box Px \Rightarrow Px$	(6)	Syll. sur (4), (5)
$\vdash \forall x(\Diamond\forall x\Box Px \Rightarrow Px)$	(7)	G sur (6)
$\vdash \Diamond\forall x\Box Px \Rightarrow \forall xPx$	(8)	"Règle de transport" sur (7)
$\vdash \forall x\Box Px \Rightarrow \Box\forall xPx$	(9)	Barcan U. : par R_4 sur (8)

2. $\vdash \varphi[x]$, puis par N,
   $\vdash \Box\varphi[x]$, puis par G,
   $\vdash \forall x \Box\varphi[x]$.

La première ne semble pas problématique, contrairement à la seconde ; pour le montrer essayons d'expliciter en termes sémantiques (plus ou moins informels) ce que veulent dire les différentes thèses.

1. Pour la déduction 1.

   $\vdash \varphi[x]$ → Dans tout modèle et tout monde, n'importe quel x est φ
   $\vdash \forall x\varphi[x]$ → Dans tout modèle et tout monde, tous les x sont φ
   $\vdash \Box\forall x\varphi[x]$ → Dans tout modèle et tout monde m, dans tous les mondes accessibles de m, tous les x sont φ.

   Cela ne semble pas poser de problème : le passage de la première ligne à la seconde se fait dans chaque monde, si l'on peut dire, et si dans chaque monde, φ vaut de n'importe quel élément, φ vaut de tous. Maintenant, si en vertu de la deuxième ligne, dans tous les mondes, tous les x sont φ, alors *a fortiori* dans tous les mondes accessibles d'un monde m quelconque tous les x sont φ. En d'autres termes, la deuxième ligne ne peut s'interpréter que comme disant que la formule $\forall x\varphi[x]$ est vraie dans chaque monde de chaque modèle (*de dicto*).

   Pour être un peu plus rigoureux, supposons que l'on soit en domaine variable et que l'on admette la nouvelle définition de la validité, à savoir : une formule est valide dans un modèle ssi elle est vraie dans chaque monde m du modèle, pour toute interprétation i des variables d'individu dans m[4].

   A ce moment la validité d'une formule ouverte comme Px (pour simplifier) dans un modèle quelconque tient à ce que, dans un monde m quelconque et quelle que soit l'interprétation $i(x)$ de x dans m, $i(x) \in I(P, m)$. Il s'ensuit bien alors qu'elle est vraie pour toute interprétation i', x-variante dans m d'une interprétation i quelconque : donc l'universelle est vraie dans chaque monde. Et, *a fortiori*, l'universelle est vraie dans chaque monde accessible de chaque monde.

---

[4] Rappel : une interprétation i des variables d'individu est dite "dans m" si, pour toute variable x, $i(x) \in m$.

Il est bien clair, qu'en domaine constant, les choses sont tout autant raisonnables.

2. Pour la déduction 2.

$\vdash \varphi[x]$	→	Dans tout modèle et tout monde, n'importe quel x est φ
$\vdash \Box\varphi[x]$	→	Dans tout modèle et tout monde m, dans tous les mondes accessibles de m, n'importe quel x est φ
$\vdash \forall x\Box\varphi[x]$	→	Dans tout modèle et tout monde m, dans tous les mondes accessibles de m tous les x sont φ

Ce que l'on pourrait réécrire de la manière suivante :

$\vdash \varphi[x]$	→	Dans tout modèle et tout monde, n'importe quel x est φ
$\vdash \Box\varphi[x]$	→	Dans tout modèle et tout monde m, $\underline{\text{n'importe quel } x \text{ est } \varphi}$ dans tous les mondes accessibles de m
$\vdash \forall x\Box\varphi[x]$	→	Dans tout modèle et tout monde m, tous les x sont φ dans tous les mondes accessibles de m

La difficulté gît dans ce qui est souligné : pour que $\Box\varphi[x]$ soit valide il faut que dans tous les mondes accessibles de chaque monde (dans tout modèle), il soit vrai que n'importe quel x est φ ; mais le "n'importe quel x" peut ou bien se lire "n'importe quel x qui est dans m", ou "n'importe quel x qui est dans le monde accessible de m". Et il n'est pas évident que ce soit les mêmes x. Si l'on estime qu'il n'y a pas d'ambiguïté, ce ne peut être que parce que l'on admet que les modèles sont à domaine constant ; c'est donc bien ce supposait subrepticement Prior, puisque dans la déduction qu'il proposait, il appliquait N à la thèse : $\Diamond Px \Rightarrow \exists x \Diamond Px$; ce que l'on retrouve à la deuxième ligne de la déduction de Kripke, ci-dessus, et que Kripke précisément épinglait.

Pour mieux faire apparaître la difficulté, supposons que l'on soit en domaine variable (et que l'on admette la nouvelle définition de la validité). La première thèse s'analyse comme précédemment ; la seconde énonce maintenant que dans tout monde m (d'un modèle quelconque $\mathcal{M}$), $\Box Px$ est vraie quelle que soit l'interprétation $i(x)$ de x $\underline{\text{dans } m}$; ce qui veut dire que dans tous les mondes m' accessibles de m, Px est vraie quelle que soit l'interprétation $i(x)$ de x $\underline{\text{dans } m}$ et non pas $\underline{\text{dans } m'}$. Et il pourrait très bien se faire que dans un m' accessible de m, pour une interprétation i $\underline{\text{dans } m}$ (qui en vertu de la première thèse est telle que $i(x) \in I(P, m)$), $i(x) \notin I(P, m')$, d'où : $m' \not\models_i Px$ et donc $m \not\models_i \Box Px$.

On voit alors qu'il ne suffit pas que Px soit valide dans le modèle quelconque $\mathcal{M}$, pour que $\Box Px$ le soit.
Illustrons cela. Soit, par ex., le modèle $\mathcal{M} =< M, R, D, I >$ suivant :

- $M = \{m_1, m_2, m_3\}$,
- $R = \{< m_1, m_2 >, < m_1, m_3 >\}$
- $D_{m_1} = \{a, b, c\}$, $D_{m_2} = \{a, b, c, d\}$, $D_{m_3} = \{a, c, \}$,
- $I(\langle P, m_1\rangle) = D_{m_1}$, $I(\langle P, m_2\rangle) = D_{m_2}$, $I(\langle P, m_3\rangle) = D_{m_3}$.

Il est clair que dans ce modèle, Px est valide : dans chaque monde $m_i \in M$, Px est vraie pour n'importe quelle interprétation de x $\underline{\text{dans } m_i}$. Mais considérons ce qui se passe dans m_1 : pour que $\Box Px$ soit vraie dans m_1 il faudrait que pour n'importe quelle interprétation i de x $\underline{\text{dans } m_1}$, Px soit vraie aussi bien dans m_2 que dans m_3. Si l'on considère m_2, c'est bien le cas : que $i(x) = a$, ou $= b$, ou $= c$ (seules interprétations de x dans m_1), on a bien que $i(x) \in I(\langle P, m_2\rangle)$. Mais ce n'est pas le cas si l'on considère m_3 : pour l'interprétation j de x dans m_1, telle que $j(x) = b$, puisque $b \notin I(\langle P, m_3\rangle)$, on a $m_3 \not\models_j Px$[5] ; donc $m_1 \not\models_j \Box Px$. Il n'est donc pas le cas que pour n'importe quelle interprétation i, $\underline{\text{dans } m_1}$, on ait : $m_1 \models_i \Box Px$. $\Box Px$ n'est donc pas valide dans $\mathcal{M}$.

Evidemment, rien de tout cela n'arriverait si l'on était en domaine constant : comme il n'y a qu'un même domaine pour tous les mondes, les interprétations sont les mêmes dans tous les mondes et donc si une formule comme Px est valide dans un modèle, elle est vraie dans tous les mondes de ce modèle pour toutes les mêmes interprétations de x dans chaque monde.

De la même manière, on voit facilement que la première déduction n'est en rien invalidée par ce modèle : Px est valide dans ce modèle, et donc $\forall x Px$ l'est également puisque dans chaque monde, le quantificateur ne porte que sur les éléments qui sont dans le domaine de ce même monde ; donc, puisque Px est vraie dans un monde m_i

---

[5] Que b n'appartienne pas à D_{m_3} n'est pas ce qui est en cause ici, puisque l'on a admis que même si un élément "n'existe pas" dans un monde, il appartient ou n'appartient pas à l'interprétation de P dans ce même monde.

pour n'importe quelle interprétation i de x dans m_i, Px est vraie dans m_i pour toute interprétation i de x dans m_i ; autrement dit $\forall x Px$ est vraie aussi bien dans m_2 que dans m_3 et donc $\Box\forall x Px$ est vraie dans m_1

Remarquons encore une chose. Dans notre modèle, on vient de voir que pour toute interprétation i de x dans m_1, Px est vraie dans m_2 ; il est clair que cela tient à la circonstance que tous les éléments de D_{m_1} sont des éléments de D_{m_2} ($D_{m_1} \subseteq D_{m_2}$) ; et donc toutes les interprétations de x dans m_1 sont également des interprétations de x dans m_2 ; et comme Px est vraie dans m_2 pour toute interprétation de x dans m_2, Px est vraie dans m_2 pour toute interprétation de x dans m_1.

A l'inverse, il est clair que l'on n'a pu falsifier Px dans m_3 pour une interprétation i de x dans m_1 que parce qu'il existe un élément (ici b) qui appartient à D_{m_1} mais pas à D_{m_3} ($D_{m_1} \nsubseteq D_{m_3}$) et qui "n'est pas P" dans m_3, même s'il "n'existe pas" dans m_3. Le fait qu'ici $D_{m_3} \subseteq D_{m_1}$ ne change rien à l'affaire.

En d'autres termes, les modèles fondés sur des cadres monotones, valident l'application de N à des thèses comportant des variables libres ; mais pas les modèles non-monotones ; ce qui est assez embarrassant, puisque N est la règle d'inférence par excellence de la logique modale.

6.4.3 Le cas du schéma d'axiome : $\forall x\varphi[x] \Rightarrow \varphi[y]$

L'embarras est surtout apparent lorsque l'on considère l'axiome classique de la quantification utilisé comme point de départ de la déduction de Kripke (à la façon de Prior) de la converse de la Barcan universelle : $\forall x\varphi[x] \Rightarrow \varphi[y]$ (on le note dans ce qui suit : "Q"). Cet axiome est évidemment valide en domaine constant ; mais il ne l'est plus immédiatement en domaine variable. Il faut distinguer ici entre les modèles fondés sur des cadres monotones et ceux qui ne le sont pas.

1. Modèles fondés sur des cadres monotones. Si l'on s'était contenté de conserver la définition de la validité valant pour les modèles à domaine constant (cf. section 5.3.2, p. 96), tout en tenant compte des règles d'évaluation des universelles et des existentielles dans des modèles à domaine variable, Q ne serait pas valide. En effet, soit un modèle $\mathcal{M} =< M, R, D, I >$ avec :

- $M = \{m_1, m_2\}$,

- $R = \{< m_1, m_2 >\}$,
- $D_{m_1} = \{a, b\}$, $D_{m_2} = \{a, b, c, d\}$, (donc $D_{m_1} \subseteq D_{m_2}$),
- $I(\langle P, m_1\rangle) = \{a, b, d\}$, $I(\langle P, m_2\rangle) = \{b\}$

Soit maintenant la formule $\forall x Px \Rightarrow Py$ (instance du schéma Q) et l'interprétation i telle que $i(y) = c$, alors :

- $m_1 \models_i \forall x Px$ puisque pour toute x-variante i' de i dans m_1, on a $m_1 \models_{i'} Px$.
- $m_1 \not\models_i Py$ puisque $i(y) = c$ et $c \notin I(\langle P, m_1\rangle)$.

Il est clair que si cette instance de Q est fausse dans m_1, c'est que l'interprétation de y n'est pas une interprétation de y dans m_1, alors que la règle d'évaluation pour une universelle impose de ne considérer que les x-variantes dans m_1. De ce fait, l'universelle est vraie dans m_1 puisque tout ce qui est dans m_1 est dans $I(\langle P, m_1\rangle)$, alors même qu'il existe des éléments de $D_{m_1} \cup D_{m_2}$ qui n'appartiennent pas à $I(\langle P, m_1\rangle)$ mais qui ne sont pas dans m_1. Par contre, comme d'après la définition de la section 5.3.2 (p. 96), il faudrait que la formule soit vraie dans m_1 pour toute interprétation des variables d'individu, il faudrait qu'elle soit vraie, en particulier, pour l'interprétation $i(y) = c$, ce qui n'est pas le cas[6].

C'est pourquoi il a fallu modifier la définition de la validité dans un modèle à domaine variable, en spécifiant qu'une formule est valide dans un modèle ssi elle est vraie dans chaque monde m du modèle pour toute interprétation des variables dans m[7]. Il est clair qu'alors Q devient valide dans tout modèle.

De plus les considérations précédentes à propos de l'utilisation de N sur des thèses comportant des variables libres, permettent de se convaincre que, si l'on impose aux modèles d'être fondés sur des cadres monotones, de $\vdash_{\mathrm{K}} \forall x Px \Rightarrow Py$, on peut déduire $\vdash_{\mathrm{K}} \Box(\forall x Px \Rightarrow Py)$.

2. Modèles fondés sur des cadres non-monotones.

La situation devient ici plus périlleuse : certes, grâce à la définition modifiée de la

---

[6] On n'a introduit dans le modèle ci-dessus le monde m_2 que "pour la beauté de la chose", puisque ce qui se passe dans m_2 n'a aucune incidence sur la fausseté de Q dans m_1 pour $i(y) = c$; la seule chose qui importe est qu'il "existe" dans le domaine D, des objets qui ne sont pas dans m_1.

[7] Dans l'exemple précédent, on voit bien que ce n'est pas le cas de $i(y) = c$ puisque c n'appartient pas au domaine de m_1.

validité dans un modèle, et pour les mêmes raisons que précédemment, les instances de Q restent valides dans tout modèle, mais on ne peut plus leur appliquer N. Considérons en effet le modèle $\mathcal{M} =< M, R, D, I >$:

- $M = \{m_1, m_2\}$,
- $R = \{< m_1, m_2 >\}$,
- $D_{m_1} = \{a, b, c, \}$, $D_{m_2} = \{a, b, d, \}$
- $I(\langle P, m_1\rangle) = D_{m_1}$, $I(\langle P, m_2\rangle) = D_{m_2}$.

Il est clair que $\forall xPx \Rightarrow Py$ est vraie aussi bien dans m_1 que dans m_2 pour toute interprétation de y dans m_1 et toute interprétation de y dans m_2, respectivement. Mais $\Box(\forall xPx \Rightarrow Py)$ n'est pas vraie dans m_1 pour n'importe quelle interprétation de y dans m_1. En effet pour $i(y) = c$ (et c appartient bien à m_1), comme $c \notin I(\langle P, m_2\rangle)$, $m_2 \nvDash_i Py$; alors qu'évidemment, on a $m_2 \vDash_i \forall xPx$ (puisque selon la clause pour les universelles (voir p. 114), on n'a à prendre en compte que les x-variantes de i dans m_2). Donc pour cette interprétation $i(y) = c$ dans m_1, on a $m_2 \nvDash_i \forall xPx \Rightarrow Py$, d'où : $m_1 \nvDash_i \Box(\forall xPx \Rightarrow Py)$.

> Soulignons bien un point : que l'on ait $m_2 \nvDash_i \forall xPx \Rightarrow Py$, n'affecte pas la validité de $\forall xPx \Rightarrow Py$ dans notre petit modèle $\mathcal{M}$ puisque $i(y) = c$ n'est pas une interprétation de y dans m_2 et que la définition de la validité dans un modèle demande seulement que la formule soit vraie dans m_2 pour toute interprétation de y $\underline{\text{dans } m_2}$. Qu'elle soit fausse pour une interprétation qui ne soit pas dans m_2 n'a donc aucune incidence sur la validité de la formule dans $\mathcal{M}$.

Il n'est pas difficile de voir que cet exemple est exactement du même genre que celui qu'on avait pris pour montrer que N ne préserve pas la validité dans les modèles fondés sur des cadres non-monotones.

6.4.4 Que faire ?

Le bilan des considérations précédentes n'est pas très rassurant pour la modale quantifiée, c'est le moins que l'on puisse dire !

Il est évidemment toujours possible de mettre des rustines pour essayer de boucher les trous, ce que n'ont pas manqué de faire les bons esprits qui se sont occupés de ces questions.

Pour préserver autant que possible le soubassement standard de la modale quantifiée, Kripke proposait tout simplement d'expulser les thèses comportant des variables libres en leur substituant leur "clôture universelle et nécessaire"[8]. De plus, au lieu du schéma d'axiome Q, on adopte le schéma : $\forall y(\forall x\varphi[x] \Rightarrow \varphi[y])$ (avec y libre pour x évidemment), et on n'admet que les "clôtures" des instances des tautologies du calcul des propositions. Il n'y a donc plus lieu de formuler une règle de généralisation, ni une règle de nécessitation ; mais du coup on ne peut plus déduire des choses comme : $\forall x, \forall yRxy \Rightarrow \forall y, \forall xRxy$ (on peut le prendre alors comme axiome !).

Une autre possibilité (une autre rustine !) consiste à introduire un prédicat d'existence "E" (ce qui aurait fait frémir Frege, et pas seulement lui !), défini par $I(E, m) = D_m$, pour tout m (et tout modèle). Le schéma Q s'écrit alors : $(\forall x\varphi[x] \wedge Ey) \Rightarrow \varphi[y]$ et ses instances sont valides dans la sémantique à domaine variable. Il faut, néanmoins, introduire toutes sortes de modifications dans la base axiomatique pour obtenir un système à peu près satisfaisant. Nous n'entrerons pas plus avant dans les détails de ce genre de construction.

Le plus simple est évidemment d'adopter la Barcan universelle à titre d'axiome et d'admettre que la déduction ci-dessus de la converse de Barcan est légitime, ce qui revient donc à adopter une sémantique à domaine constant. En ce cas, les axiomes de la quantification sont valides et les règles de généralisation et de nécessitation préservent la validité. Le prix à payer est qu'il faut accepter une "métaphysique" possibiliste ; mais il y a déjà tant de métaphysique dans la logique modale, que l'on acceptera peut-être ce dernier débordement...

---

[8] Cette "clôture" est définie de telle sorte qu'une clôture de $\varphi[x]$, par ex. (avec x libre dans φ) est $\Box\forall x\varphi[x]$ ou encore $\forall x\Box\varphi[x]$.

Annexe A

$klmn$-formules de Geach et axiomes

Les formules de Geach généralisées sont de la forme :

$$\Diamond^k \Box^l p \Rightarrow \Box^m \Diamond^n p.$$

On a démontré en général que, quels que soient k, l, m et n, une $klmn$-formule de Geach est valide dans les cadres $klmn$-incestueux (pour les même valeurs de k, l, m et n), c'est à dire les cadres dont la relation obéit à la formule :

$$\forall x, \forall y \forall z[(xR^k y \wedge xR^m z) \Rightarrow \exists t(yR^l t \wedge zR^n t)]$$

Chacun des axiomes, **D**, **T**, **B**, **4**, **5** est une formule de Geach pour des valeurs particulières de k, l, m et n. On montre dans ce qui suit que les relations $klmn$-incesteuses correspondantes sont respectivement sérielles, réflexives, symétriques, transitives et euclidiennes. Autrement dit, on montre que les formules exprimant que les relations sont $klmn$-incesteuses, pour les valeurs particulières correspondantes de k, l, m et n sont équivalentes aux formules exprimant la sérialité, la réflexivité, la symétrie, la transitivité et l'euclidianité d'une relation, respectivement.

Comme on va utiliser la méthode des arbres, on introduit auparavant les règles à appliquer pour traiter des identités.

$$\frac{\vdots}{a = a} \quad \text{"}a\text{" sur la branche}$$

$$\frac{\begin{array}{c} a = b \\ \vdots \\ \varphi[a] \\ \vdots \end{array}}{\varphi[b]} \quad \begin{array}{l} \text{Cette règle vaut dans les deux sens :} \\ a \rightarrow b \text{ et } b \rightarrow a \end{array}$$

Par ailleurs, on ferme une branche sur laquelle figure une formule de la forme $a \neq a$.

Dans ce qui suit, on admet que xR^0y est équivalent à $x = y$ et que xR^1y est équivalent à xRy.

A.1 Une relation est 0100-incestueuse ssi elle est réflexive

L'axiome **T** ($\Box p \Rightarrow p$) est une formule de Geach avec $k = 0$, $l = 1$, $m = 0$ et $n = 0$. En vertu du théorème général déjà démontré, elle est valide dans un cadre dont la relation est 0100-incestueuse, c'est à dire obéit à la formule suivante :

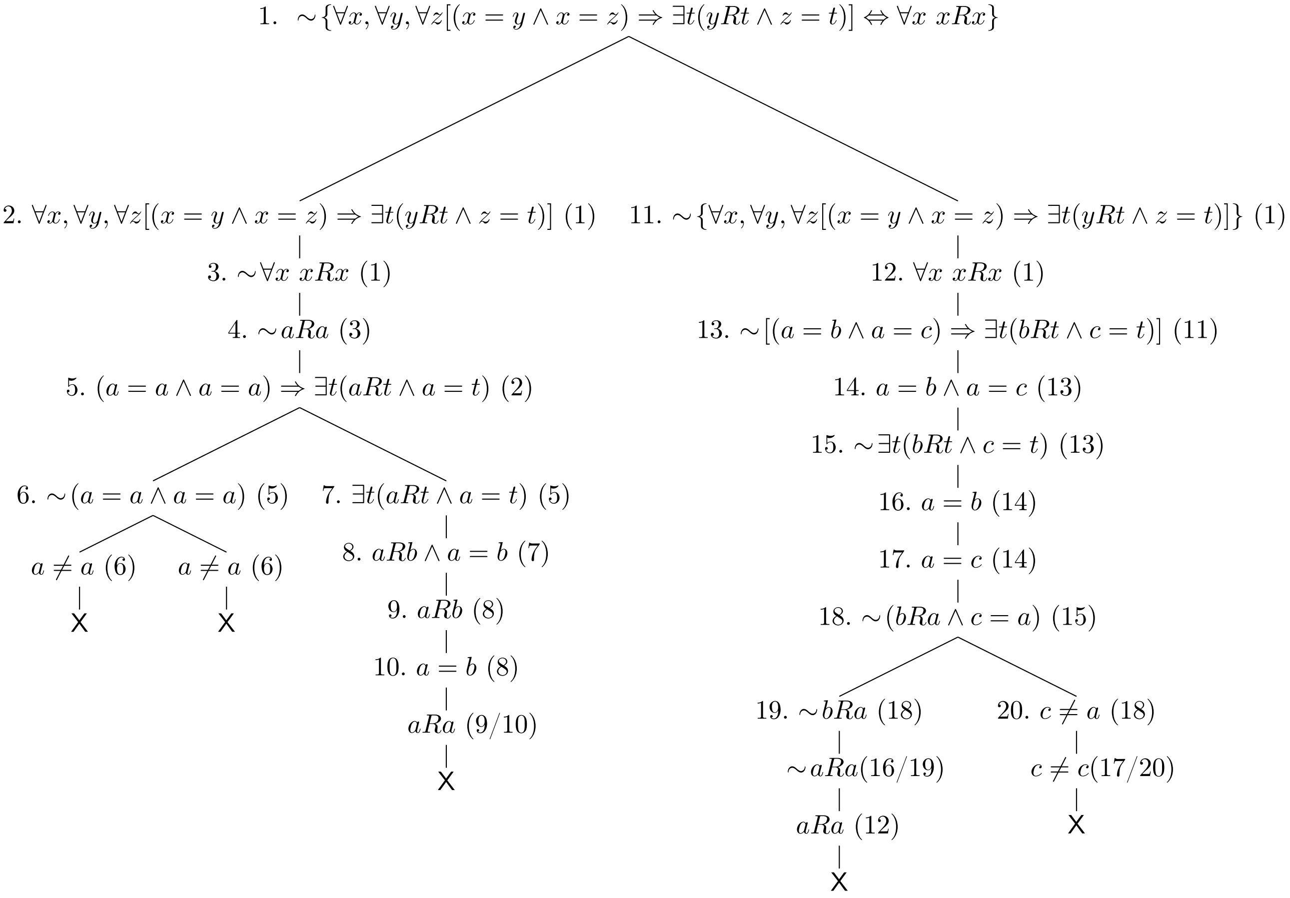
$$\forall x, \forall y, \forall z[(xR^0y \wedge xR^0z) \Rightarrow \exists t(yR^1t \wedge zR^0t)]$$

Cela revient donc à :

$$\forall x, \forall y, \forall z[(x = y \wedge x = z) \Rightarrow \exists t(yRt \wedge z = t)].$$

On montre que cette formule est équivalente à la formule exprimant la réflexivité (totale), i.e. on fait l'arbre pour la formule :

$$\forall x, \forall y, \forall z[(x = y \wedge x = z) \Rightarrow \exists t(yRt \wedge z = t)] \Leftrightarrow \forall x\ xRx.$$



A.2 Une relation est 0011-incestueuse ssi elle est symétrique

L'axiome **B** ($p \Rightarrow \Box\Diamond p$) est une formule de Geach avec $k = 0$, $l = 0$, $m = 1$, et $n = 1$. Elle est donc valide dans un cadre dont la relation est 0011-incesteuse, c'est à dire obéit à la formule suivante :

$$\forall x, \forall y, \forall z[(x = y \wedge xRz) \Rightarrow \exists t(y = t \wedge zRt)]$$

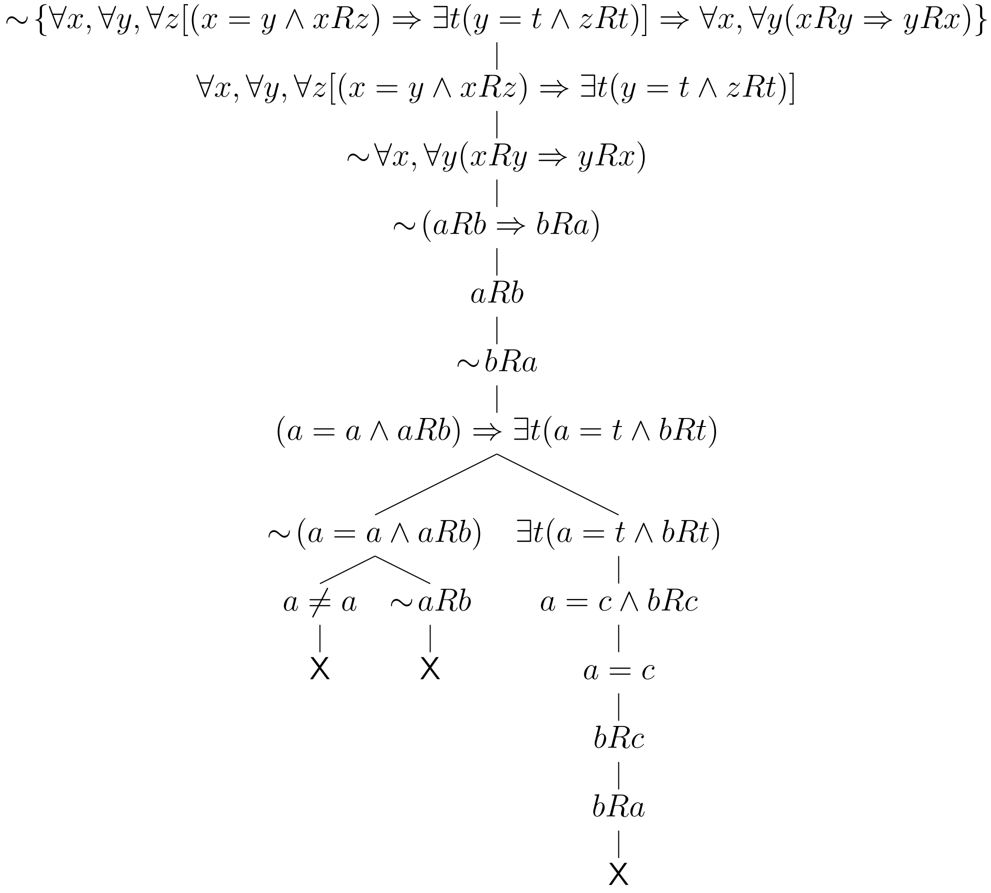
On montre que cette formule est équivalente à la formule exprimant la symétrie, i.e. on fait l'arbre pour la formule :

$$\forall x, \forall y, \forall z[(x = y \wedge xRz) \Rightarrow \exists t(y = t \wedge zRt)] \Leftrightarrow \forall x, \forall y(xRy \Rightarrow yRx)$$

Pour plus de clarté, on fait deux arbres, un pour chacune des implications correspondantes.

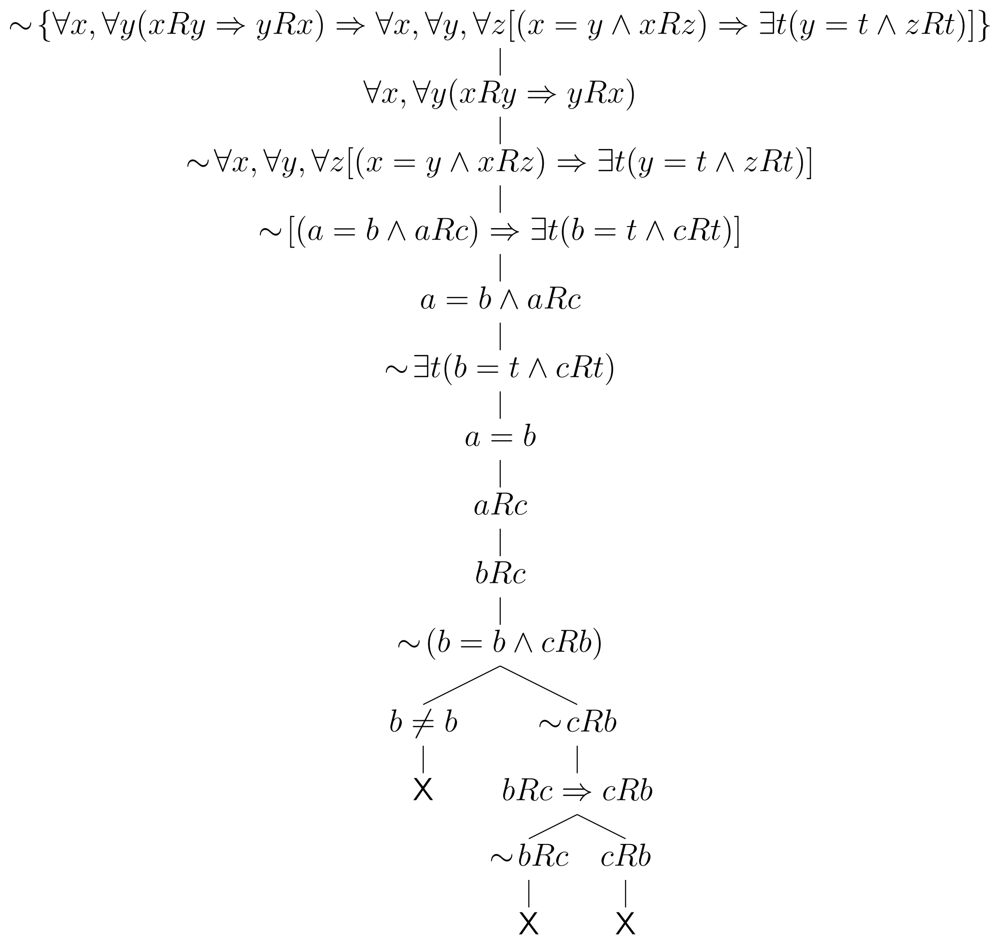
- Arbre pour :

$$\forall x, \forall y, \forall z[(x = y \wedge xRz) \Rightarrow \exists t(y = t \wedge zRt)] \Rightarrow \forall x, \forall y(xRy \Rightarrow yRx)$$



Arbre pour l'autre sens de la bi-implication, i.e. pour :

$$\forall x, \forall y(xRy \Rightarrow yRx) \Rightarrow \forall x, \forall y, \forall z[(x = y \wedge xRz) \Rightarrow \exists t(y = t \wedge zRt)]$$



A.3 Une relation est 0120-incestueuse ssi elle est transitive

L'axiome **4** ($\Box p \Rightarrow \Box\Box p$) est une formule de Geach avec $k = 0$, $l = 1$, $m = 2$ et $n = 0$. Elle est donc valide dans un cadre dont la relation est 0120-incesteuse, c'est à dire obéit à la formule suivante :

$$\forall x, \forall y, \forall z[(x = y \wedge xR^2z) \Rightarrow \exists t(yRt \wedge z = t)]$$

Comme xR^2z signifie : $\exists u(xRu \wedge uRz)$, cette formule devient :

$$\forall x, \forall y, \forall z\{[x = y \wedge \exists u(xRu \wedge uRz)] \Rightarrow \exists t(yRt \wedge z = t)\}$$

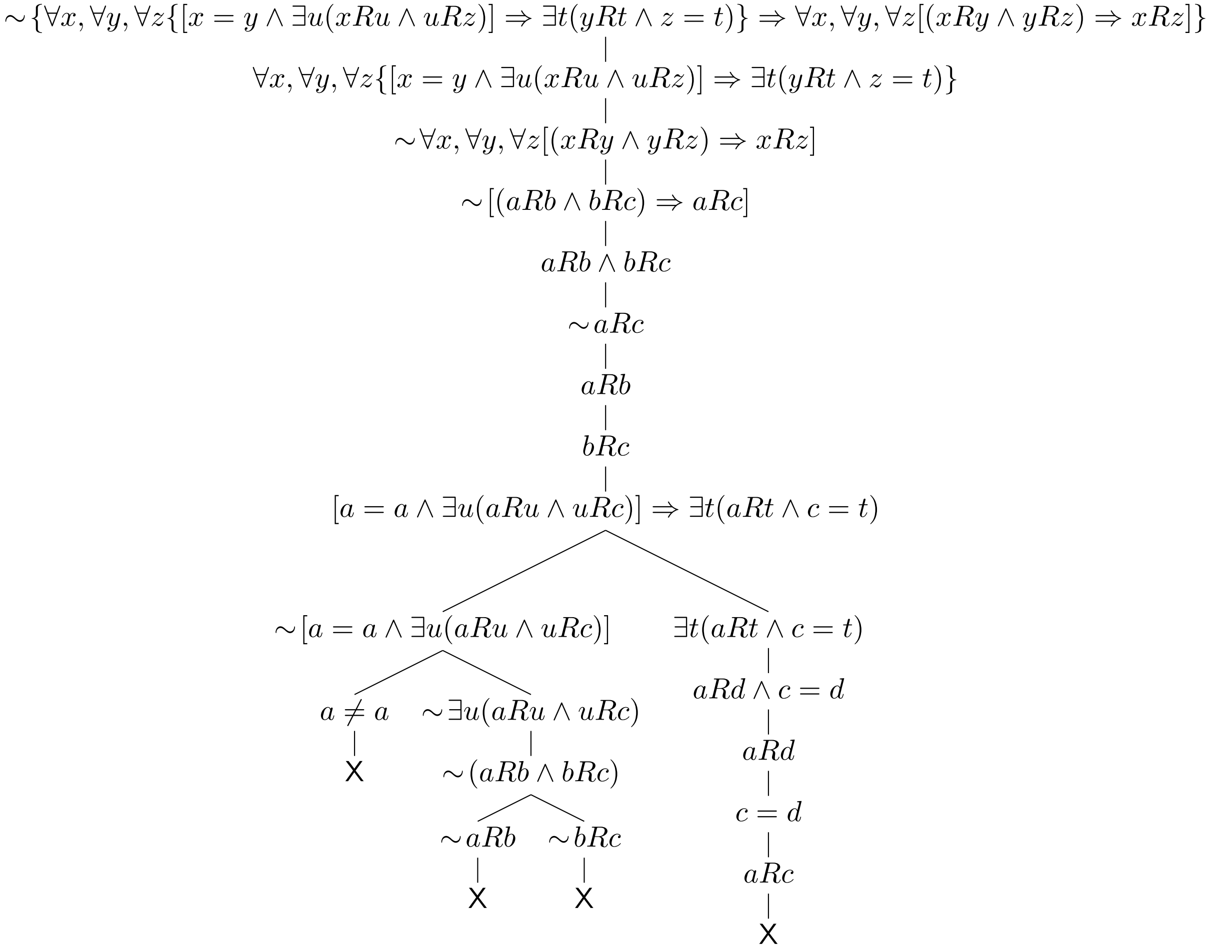
On montre que cette formule est équivalente à la formule exprimant la transitivité, i.e. on fait l'arbre pour la formule :

$$\forall x, \forall y, \forall z\{[x = y \wedge \exists u(xRu \wedge uRz)] \Rightarrow \exists t(yRt \wedge z = t)\} \Leftrightarrow \\ \forall x, \forall y, \forall z[(xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$$

Pour plus de clarté, on fait deux arbres, un pour chacune des implications correspondantes.

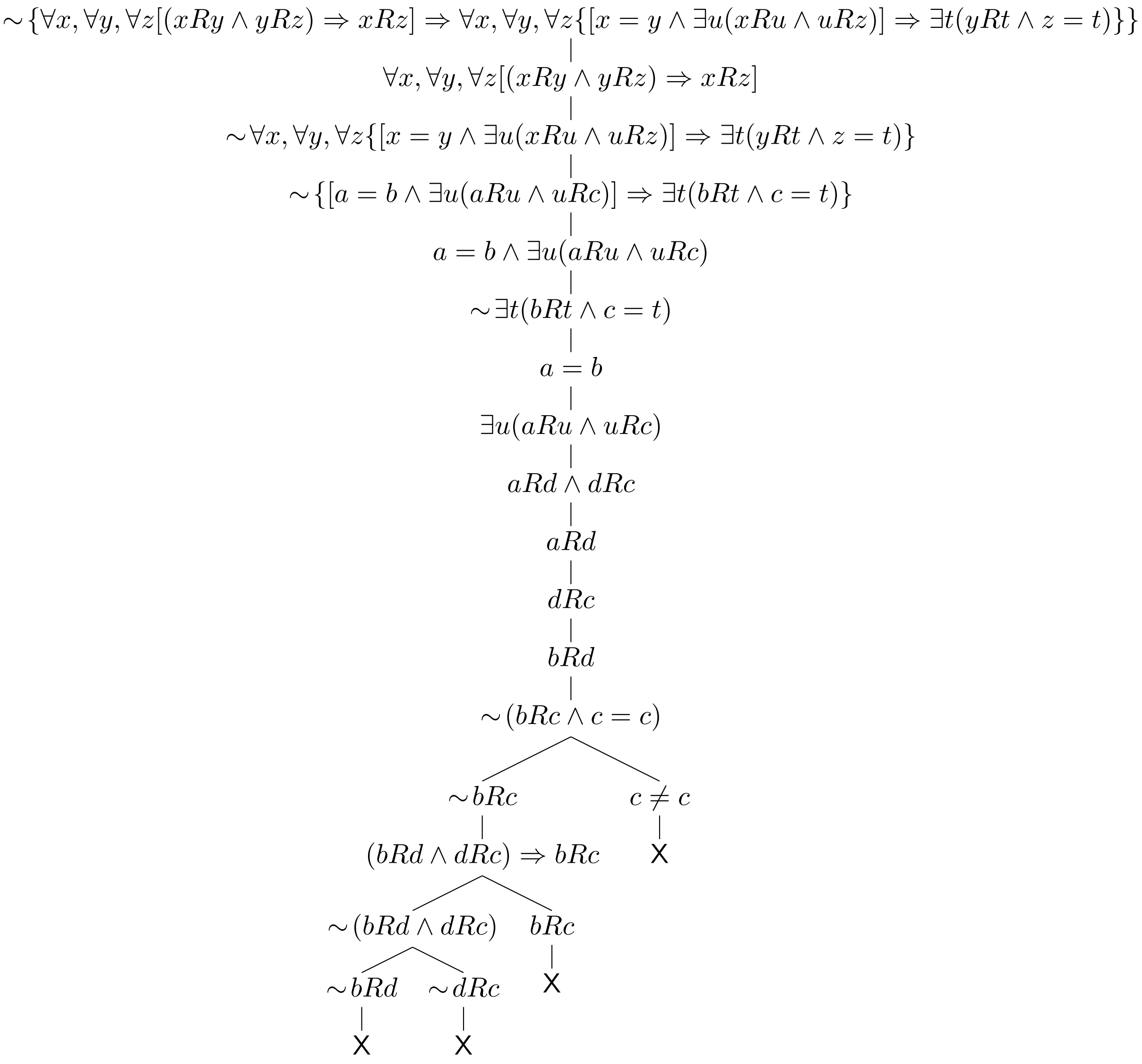
- Arbre pour :

$$\forall x, \forall y, \forall z\{[x = y \wedge \exists u(xRu \wedge uRz)] \Rightarrow \exists t(yRt \wedge z = t)\} \Rightarrow \\ \forall x, \forall y, \forall z[(xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz]$$



- Arbre pour l'autre sens de la bi-implication, i.e. pour :

$$\forall x, \forall y, \forall z[(xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz] \Rightarrow \forall x, \forall y, \forall z\{[x = y \wedge \exists u(xRu \wedge uRz)] \Rightarrow \exists t(yRt \wedge z = t)\}$$



A.4 Une relation est 1011-incestueuse ssi elle est euclidienne

L'axiome **5** ($\Diamond p \Rightarrow \Box\Diamond p$) est une formule de Geach avec $k = 1$, $l = 0$, $m = 1$ et $n = 1$. Elle est donc valide dans un cadre dont la relation est 1011-incesteuse, c'est à dire obéit à la formule suivante :

$$\forall x, \forall y, \forall z[(xRy \wedge xRz) \Rightarrow \exists t(y = t \wedge zRt)]$$

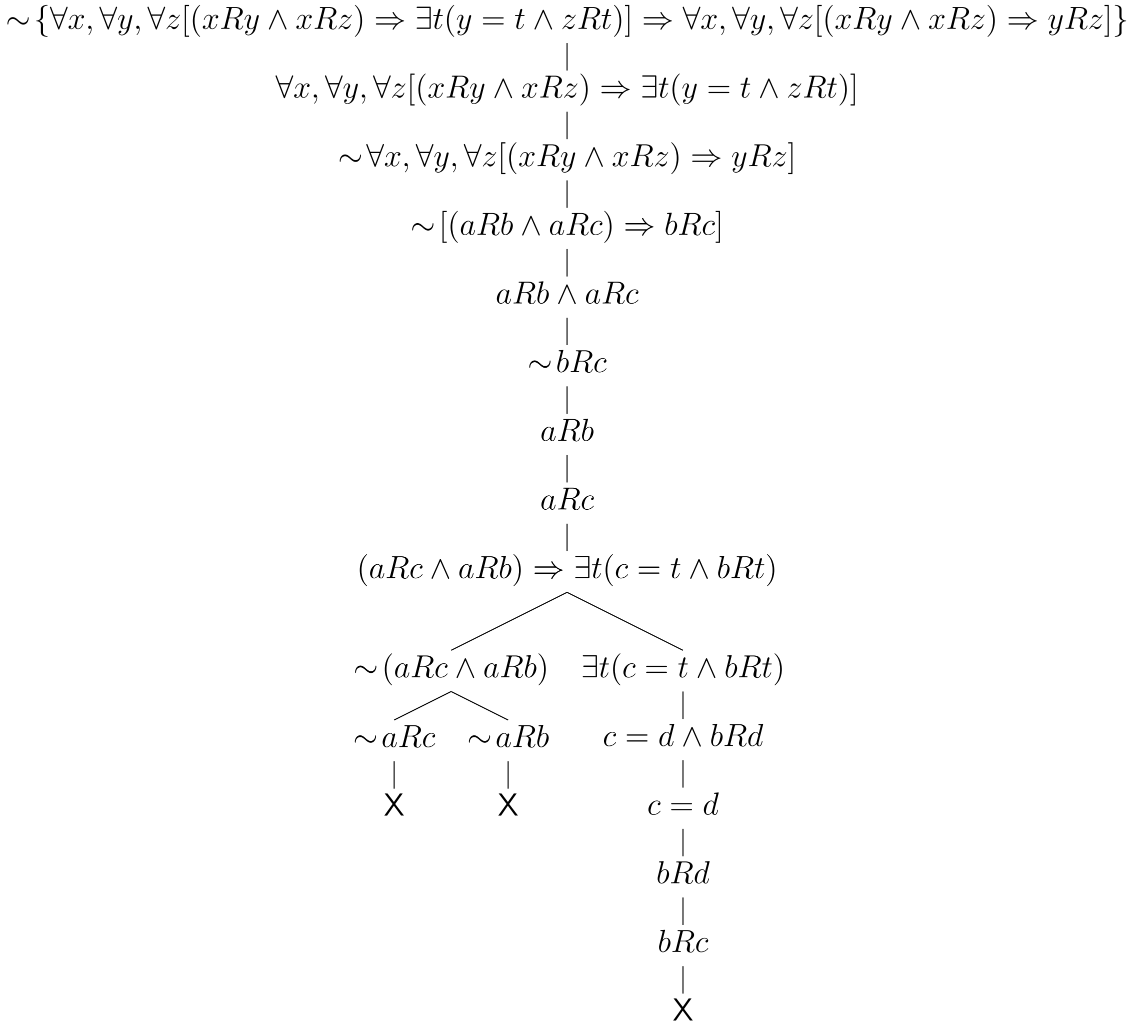
On montre que cette formule est équivalente à la formule exprimant l'euclidianité, i.e. on fait l'arbre pour la formule :

$$\forall x, \forall y, \forall z[(xRy \wedge xRz) \Rightarrow \exists t(y = t \wedge zRt)] \Leftrightarrow \forall x, \forall y, \forall z[(xRy \wedge xRz) \Rightarrow yRz]$$

Pour plus de clarté, on fait deux arbres, un pour chacune des implications correspondantes.

- Arbre pour :

$$\forall x, \forall y, \forall z[(xRy \wedge xRz) \Rightarrow \exists t(y = t \wedge zRt)] \Rightarrow \forall x, \forall y, \forall z[(xRy \wedge xRz) \Rightarrow yRz]$$



- Arbre pour l'autre sens de la bi-implication, i.e. pour :

$$\forall x, \forall y, \forall z[(xRy \wedge xRz) \Rightarrow yRz] \Rightarrow \forall x, \forall y, \forall z[(xRy \wedge xRz) \Rightarrow \exists t(y = t \wedge zRt)]$$

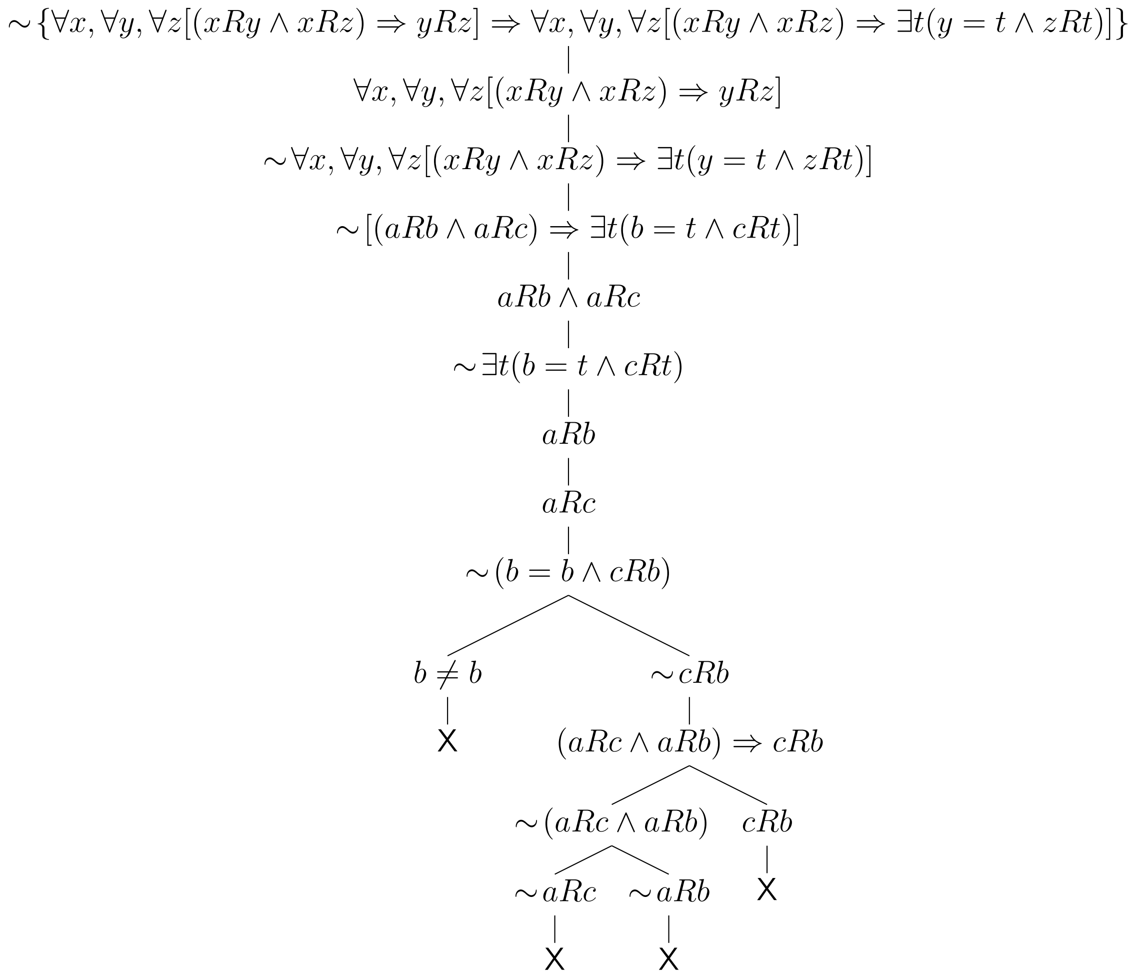

$\sim\{\forall x,\forall y,\forall z[(xRy \wedge xRz) \Rightarrow yRz] \Rightarrow \forall x,\forall y,\forall z[(xRy \wedge xRz) \Rightarrow \exists t(y = t \wedge zRt)]\}$
$\forall x,\forall y,\forall z[(xRy \wedge xRz) \Rightarrow yRz]$
$\sim\forall x,\forall y,\forall z[(xRy \wedge xRz) \Rightarrow \exists t(y = t \wedge zRt)]$
$\sim[(aRb \wedge aRc) \Rightarrow \exists t(b = t \wedge cRt)]$
$aRb \wedge aRc$
$\sim\exists t(b = t \wedge cRt)$
aRb
aRc
$\sim(b = b \wedge cRb)$
$b \neq b$
X
$\sim cRb$
$(aRc \wedge aRb) \Rightarrow cRb$
$\sim(aRc \wedge aRb)$
cRb
X
$\sim aRc$
$\sim aRb$
X
X

Table des matières

I Logique modale propositionnelle 3