Correction du Contrôle Continu du 7 janvier 2014

1. *Soit φ une contradiction et ψ une formule quelconque. Les formules $\psi \vee \varphi$, $\varphi \Leftrightarrow \psi$, φ w ψ, $\psi \uparrow \varphi$ pourraient-elles être tautologiques ? (« w » est la disjonction exclusive et « $\uparrow$ » la barre de Sheffer « et ».)*

   - φ étant contradictoire, la valeur de vérité de la disjonction $\psi \vee \varphi$ ne dépend que de celle de ψ ; si donc ψ était tautologique, la disjonction le serait également.

   - Une bi-implication n'est fausse pour une interprétation que si ses deux membres n'ont pas la même valeur de vérité pour cette interprétation. φ étant contradictoire, il suffirait donc que ψ le soit également pour que la bi-implication ne soit jamais fausse et soit donc tautologique.

   - Une disjonction exclusive n'est fausse pour une interprétation que si ses deux membres ont la même valeur de vérité pour cette interprétation. φ étant contradictoire, il suffirait donc que ψ soit tautologique pour que la disjonction exclusive ne soit jamais fausse et soit donc tautologique.

   - Une barre de Sheffer « et » n'est fausse pour une interprétation que si ses deux membres sont tous les deux vrais pour cette interprétation. φ étant contradictoire, il ne sera jamais le cas que les deux membres de $\psi \uparrow \varphi$ soient vrais pour une interprétation. $\psi \uparrow \varphi$ est donc tautologique, quel que soit ψ.

   Remarque : une bonne partie des copies manifeste une étrange incompréhension de la question (est-ce un effet de copiage/copinage ?). Une formule <u>quelconque</u>, ψ ici, peut être soit tautologique, soit neutre, soit contradictoire et il s'agissait donc de savoir si, pour l'une de ces formes de ψ (taut. neutre, ou contra., donc), <u>il se pourrait</u> que, etc. ... Or, dans la plupart des copies, on admet, sans aucune justification, que ψ est neutre, ce qui va directement à l'encontre *du libellé de la question. Moralité : même en logique, il faut savoir lire !*

2. *Un système axiomatique quelconque pour le calcul des propositions, dans lequel on pourrait déduire la formule* $[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Rightarrow [(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)]$*, serait-il consistant ?*

   Par définition, un système axiomatique pour le calcul des propositions est (sémantiquement) consistant ssi toutes les thèses sont des tautologies.
   Il faut donc déterminer si $[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Rightarrow [(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)]$ est une tautologie. Or on s'assure facilement que ce n'est pas le cas ; pour les interprétations : $i(p)=$ V, $i(q) =$ F, $i(r)=$ F ou $i'(p)=$ F, $i'(q) =$ V, $i'(r)=$ F, cette formule est fausse, comme on peut s'en convaincre en calculant les lignes correspondantes (on ne le fait que pour la première interprétation) :

$[(p$	$\wedge$	$q)$	$\Rightarrow$	$r]$	$\Rightarrow$	$[(p$	$\Rightarrow$	$r)$	$\wedge$	$(q$	$\Rightarrow$	$r)]$
V		F				V		F		F		F
	F			F			F				V	
			V						F			
					F							

   Si donc on pouvait déduire dans un système axiomatique $[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Rightarrow [(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)]$, ce système ne serait pas consistant puisque cette formule en serait une thèse alors qu'elle n'est pas une tautologie.

3. *Soit la règle d'inférence suivante :* $\psi \wedge \theta$ *est dit inféré de* $\varphi \Rightarrow \psi$, $\varphi \Rightarrow \theta$ *et* φ*. Montrez que si* $\varphi \Rightarrow \psi$, $\varphi \Rightarrow \theta$ *et* φ *sont des tautologies, alors* $\psi \wedge \theta$ *est une tautologie.*

   φ et $\varphi \Rightarrow \psi$ constituent les deux prémisses d'un *Modus Ponens* et sont, par hypothèse, des tautologies ; or on a démontré (cf. *Rudiments* p. 36) que si les deux prémisses d'un *M.P.* sont tautologiques, la conclusion l'est également ; on en tire donc que ψ est tautologique. Même chose en considérant les deux formules φ et $\varphi \Rightarrow \theta$. Ainsi les deux formules ψ et θ sont des tautologies, et une conjonction dont les deux membres sont des tautologies, est elle-même une tautologie ; donc $\psi \wedge \theta$ est une tautologie.

4. *En vous inspirant de la procédure pour trouver une déduction pour une formule*

dans le système axiomatique présenté dans le fascicule (p. 37-38), déduisez la formule : $(p \wedge q) \Rightarrow q$.

Attention ! cette déduction est très simple. N'oubliez pas qu'une disjonction seule, comme $r \vee\ p \vee\ \sim q\ \vee s$ *est une forme normale conjonctive « dégénérée ».*

On commence par mettre $(p \wedge q) \Rightarrow q$ en FNC, ce qui donne :

$(p \wedge q) \Rightarrow q \overset{suppression\ de\ ``\Rightarrow"}{\longrightarrow} \sim (p \wedge q) \vee q \overset{de\ Morgan}{\longrightarrow} (\sim p \vee \sim q) \vee q \overset{associativité}{\longrightarrow} \sim p \vee \sim q \vee q.$

Puis on déduit cette FNC, en suivant la démarche indiquée p. 37 des *Rudiments* ; comme cette FNC ne comporte qu'un conjoint, il suffit de déduire ce seul conjoint (ce qui rend les choses très, très simples...). A la suite de quoi, on utilise la règle de remplacement (deux fois) et la définition de « $\Rightarrow$ » pour obtenir la formule $(p \wedge q) \Rightarrow q$, ce qui donne :

$\vdash p \vee \sim p$	(1)	thèse déjà déduite
$\vdash q \vee \sim q$	(2)	$Sub\ {}^{q}/_{p}$ dans (1)
$\vdash p \Rightarrow (p \vee q)$	(3)	Ax. 2
$\vdash (q \vee \sim q) \Rightarrow [(q \vee \sim q) \vee \sim p]$	(4)	$Sub\ {}^{q \vee \sim q}/_{p},\ {}^{\sim p}/_{q}$ dans (3)
$\vdash (q \vee \sim q) \vee \sim p$	(5)	$M.P.$ sur (2), (4)
$\vdash \sim p \vee \sim q \vee q$	(6)	R_p Assoc. $\vee$ et Commut $\vee$ dans (5) $\rightarrow$ FNC.
$\vdash (\sim p \vee \sim q) \vee q$	(7)	R_p Assoc. $\vee$ dans (6)
$\vdash \sim (p \wedge q) \vee q$	(8)	R_p de Morgan dans (7)
$\vdash (p \wedge q) \Rightarrow q$	(9)	Df $\Rightarrow$ dans (8)