Archimède et les quadratures

Pas de cours général sur l'ensemble de l'œuvre d'Archimède, peut-être le plus important mathématicien et physicien de l'antiquité. Cette œuvre considérable marquera la pensée scientifique jusqu'à nos jours.

Archimède de Syracuse fut tué en 212 lors du sac de sa ville par les romains de Marcellus. Il avait 75 ans; on dit qu'il dessinait une figure géométrique sur le sable (voir le récit par Montucla, in Dedron-Itard).

Les écrits parvenus jusqu'à nous sont:

1) Le premier livre De l'équilibre des plans

2) Le mémoire sur *La quadrature de la parabole* avec en préface, une lettre à son ami Dosithée.

3)Le second livre De l'équilibre des plans

4) Les deux livres De la sphère et du cylindre

5) Le traité Des spirales

6) Le traité Sur les conoïdes et les sphéroïdes.

7)Les deux livres Sur les corps flottants

8)La mesure du cercle

9)*L'arénaire*, théorie romancée des nombres immenses, avec exposé du système d'Aristarque de Samos.

10) La lettre à Eratosthène sur *La méthode*. (il y révèle le secret de ses découvertes).

Les travaux mathématiques d'Archimède posent un premier grand problème: ils semblent s'orienter dans deux voies: l'une mécanique, issue de physique des équilibres et l'autre, strictement théorique et logique. Le va et vient de l'une à l'autre posera question pendant 2000 ans. Torricelli exprimera cette tension en soupçonnant l'existence de secrets non dits, de méthode de découverte non révélées, au profit de l'exposé des seules méthodes de preuve.

La découverte du traité de *La méthode* répond à l'aspect historique de la question, mais bien évidemment laisse ouverte la réflexion sur le statut épistémologique de ces deux voies. Le manuscrit est découvert en 1906, par Heiberg, dans un palimpseste byzantin qui cachait ce trésor sous un commentaire religieux.

Le traité de *La quadrature de la parabole* (de titre apocryphe) soulève un coin du voile et marque la préférence méthodologique.

"Je ne sache pas qu'il se soit encore trouvé une seule personne qui ait cherché à quarrer la surface comprise sous une droite et une section de cône rectangle (parabole); ce que nous avons certainement fait aujourd'hui. car nous démontrons qu'un segment quelconque compris par une droite et par une section de cône rectangle est égal à quatre fois le tiers du triangle qui a la même base et la même hauteur que le segment... Tu verras comment il a été résolu d'abord par des considérations mécaniques et ensuite par des raisonnements géométriques".

Remarque sur les mots considérations mécaniques et raisonnements géométriques.

Il ajoute qu'il rappelle les éléments des sections coniques qui sont nécessaires pour démontrer ce théorème.

Nous nous trouvons en fait devant trois versions de cette quadrature.

Une version strictement mécanique

Une version mixte, mécanique et par exhaustion

Une version strictement par exhaustion.

Les deux dernières sont exposées dans *Le traité de la quadrature de la parabole*. Ce sont celles qui sont connues depuis Archimède.

La première n'est présentée que dans *La méthode* ou *Lettre à Erathostène*. Elle demeura inconnue, quoique soupçonnée jusqu'au XX^{e} siècle.

Pour des raisons de clarté de l'exposé nous les examinons dans l'ordre précité.

Méthode mécanique

Elle est donc révélée à Erathostène auquel il écrit:

"En ce qui concerne aussi ces théorèmes (il n'y a pas que cette quadrature dans le traité qui en contient une foule d'autre) que je publie aujourd'hui, j'en ai fait la découverte d'abord par la méthode mécanique. Aussi crois-je devoir nécessairement t'exposer cette méthode et cela pour deux raisons: d'abord, puisque j'y ai ait allusion ailleurs, je ne voudrais pas être accusé par quelques uns d'avoir parlé en l'air; ensuite, je suis convaincu que cette publication ne servira pas médiocrement notre science. car, assurément, des savants actuels ou futurs, par le moyen de cette méthode que je vais t'exposer, seront mis à même de découvrir d'autres théorèmes que je n'ai pas encore rencontrés sur mon chemin".

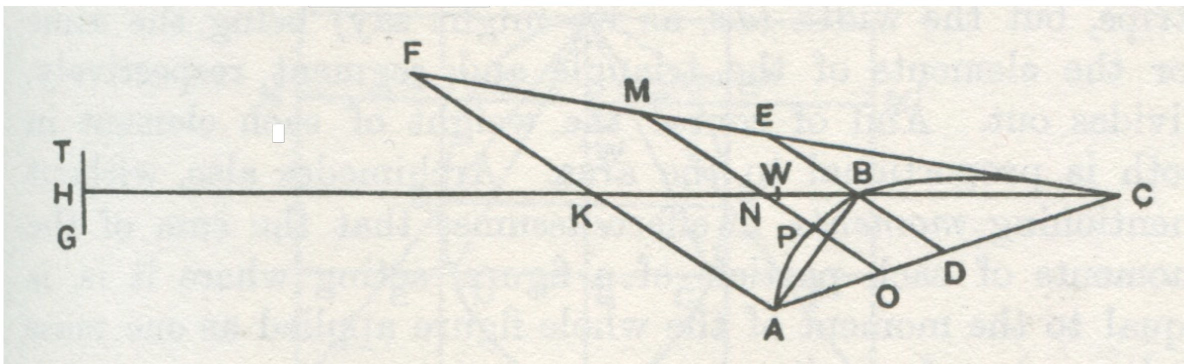
Figures de la méthode mécanique

Dedron-Itard, pp.95-96

D'où il ressort que EF = 3/4 DB

On ne perdra pas de vue que l'ensemble des procédures de calcul est issue de la théorie des proportions et que nous déformons toujours en modernisant.

Mise en place des éléments explicatifs de la figure de l'équilibre.



“transportons Op en TG, avec H pour milieu; c'est-à-dire pour centre de gravité. N sera le centre de gravité de la droite MO restée en place. comme K est le point fixe du levier, on voit que les droites TG et MO se feront équilibre par rapport au point fixe, puisque les distances de leur centre à ce point sont inversement proportionnellesà leurs longueurs. K sera donc le centre de gravité de leurs poids composés. Il en sera de même pour toutes les parallèles menées au diamètres à l'intérieur du triangle du triangle FAC: la parallèle restant en place, fera équilibre à sa portion comprise dans le segment, supposée transportée en H, et le centre de gravité du couple sera toujours le point K. La somme des parallèles en question, c'est l'aire du triangle CAF, la somme de leurs portions comme OP interceptées par le segment, c'est le segment parabolique BAC. Donc, au total le triangle FAC, restant en place, fera équilibre au segment entier transporté en H, et le centre de gravité de leur système sera K.

Et pour finir:

Soit W au tiers de la médiane CK: W est le centre de gravité de CFA. Donc:

triangle ACF : segment ABC :: HK : KW, c'est-à-dire 3 à l'unité.

Comme triangle ACF = 4.triangle ABC (même base, hauteur en rapport4),

on tire 4.triangle ABC est au segment ABC dans un rapport 3

d'où segment ABC = 4/3 triangle ABC.

Commentaire

1)Les lignes des figures géométriques ont des poids-analogie matérielle, sensible, mécanique. Alors, on peut dire comme dans le Taton, *Histoire générale des Sciences* (vol. 1, p.329) *“Archimède n'a pas de préjugé de puriste et saisi les analogies fécondes entre deux domaines différents de la science”*, il n'empêche ceci pose d'importants problèmes. Quelle science est-il en train de bâtir? La géométrie? pas vraiment puisque les méthodes productrices de résultats sont externes à la géométrie, sont loin des réquisits de la science formelle ou strictement logique proposée par la tradition philosophique grecque.

Cet éloignement de ces critères n'est pas sans danger et l'usage d'analogies matérielles est pleine de pièges logiques, notamment dans le recours implicite à l'infini, à la composition du continu.

Est-ce alors la statique? sans doute quoique la démarche consiste ici à se saisir de résultats propre à la statique pour les immerger dans la géométrie, à physiciser les mathématiques. Ce n'est pas tant la statique qui progresse ici, que la géométrie, via la statique.

2) Le principe de l'équilibre des leviers renvoie au traité mécanique *De l'équilibre des plans ou de leurs centres de gravité*,

Prop. I: “Des grandeurs commensurables (GG') sont en équilibre lorsqu'elles sont réciproquement proportionnelles aux longueurs (LL') auxquelles ces grandeurs sont suspendues” [G : G' :: L' : L]. Il est à souligner les manières archimédiennes en physique: elles sont strictement quantitatives, exprimées en théorie des proportions. Il ne s'agit pas, chez Archimède d'une physique des qualités.

3) Les sommations de lignes constituent des aires. Toute la question des indivisibles.

L'enjeu est cependant considérable: il est celui des rapports que peuvent entretenir les mathématiques et la physique. Archimède rompt très profondément avec la séparation aristotélicienne et aussi avec la mathématisation mythique platonicienne du monde. Le galiléisme sera un retour à Archimède.

Archimède fait observer que cette manière manque de la rigueur eudoxo-euclidienne nécessaire en mathématique, il reprend l'affaire en remplaçant les lignes en nombres infinis (dont la somme ferait une aire) par des petits trapèzes et démontre que l'équilibre est obtenu si le triangle CAF n'est ni plus grand ni moindre que le triple du segment.

Commentaire:

1) Les “petites portions en homogènes” remplacent les hétérogènes.

2) Le modèle mécanique de l'équilibre est toujours au cœur de la démonstration.

3) Une déduction est établie sur le mode indiscutable u tiers-exclu.

Méthode géométrique

Mais ceci ne convient toujours pas, et voici exposée la **vraie** méthode de démonstration.

Retour à la Quadrature de la parabole.

Figure de la méthode géométrique

1)Remarque préliminaire: des acquis déjà classiques sont rappelés.

Tout arc de parabole admet un diamètre, c'est-à-dire une ligne coupant toutes les cordes parallèles à la base en leur milieu. De plus, la parallèle à la base du segment au sommet du diamètre est la tangente en ce point à la parabole.

2) Démonstration du rapport: AHC: AMC :: 1 : 4

AHC = AIC (même base AC et même hauteur h) et AI = KH (côtés d'un parallélo.)

AIC : AMC :: IA.MC : AM.MC donc

AHC : AMC :: IA : AM soit AHC : AMC :: KH : AM (a)

Les ordonnées varient comme le carré des abscisses, donc, quand MC est divisée par deux, TC est divisée par 4. Donc, HF : AM :: 3 : 4.

Or, KH = HF - KF = 3/4 AM - 1/2 AM = 1/4 AM (b)

(a) et (b) nous donnent:

AHC : AMC :: 1/4 AM : AM soit, AHC : AMC :: 1 : 4

Les triangles inscrits dans la parabole AHC et AGB valent le quart du triangle ABC.

On appelle ***A*** l'aire du triangle ABC, alors, l'aire du polygone inscrit AGBMCH vaut:

A + A/4.

Archimède, itère le procédé en inscrivant des triangles dans les arcs AH, HC, AG et BG. La proportion est maintenue et les petits triangles valent le quart des précédents, soit le seizième de ***A.***

Le nouveau polygone inscrit BQGRALHPC vaut donc: ***A*** + ***A/4.+ A/16***

Le principe est alors acquis: si l'on poursuit le processus d'itération n fois, on obtient deux objets: un polygone de $2^n + 1$ côtés et un polynome. L'aire du premier étant donnée par: ***A*** $[1 + 1/4 + 1/4^2 + 1/4^3 +...+ 1/4^n]$

La somme des termes d'une progression géométrique.

Il est connu (résultat démontré dans Euclide) qu'une telle somme est donnée par:

$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + ...+ x^n = (1- x^{n+1}) / (1-x)$

x est la raison de cette suite, appliquée à la série d'Archimède, cela donne:

$S_n = 1 + 1/4 + 1/4^2 + 1/4^3 +...+ 1/4^n = (1-1/4^n) / (3/4) = 4/3 - 1/3.\ 1/4^{n-1}$

La différence entre 4/3 et S_n est donc exprimée par $1/3.\ 1/4^{n-1}$.

Archimède sait bien, qu'à l'infini, la différence devient inf. petite et , nous dirions que la série tend vers 4/3. Or, la démonstration n'est pas considérée comme achevée, elle n'est même que préparée. Il y a ici l'expression la plus spectaculaire du recours à la limité, à l'infini dans la mathématique grecque.

L'expression $(1/3.\ 1/4^{n-1})$ peut être rendue “inférieure à toute quantité donnée”, à condition de poursuivre l'itération suffisamment, mais il ne peut être question de négliger ce dernier terme, sauf à pêcher contre la rigueur.

Voici qu'alors est donné le célèbre raisonnement par exhaustion, par double réduction par l'absurde.

Prenons ***A*** comme unité d'aire. S_n désigne donc l'aire du polygone inscrit, au bout de n itérations. On cherche l'aire du segment de parabole qui sera noté $\sum$.

1) Supposons $\sum$ supérieur à 4/3.

Il existe donc une différence, U telle que $\sum = 4/3 + U$

Inscrivons une suite de triangles telle que $\sum - S_n < U$, ce qui est toujours possible.

Alors, $\sum < S_n + U$, et $S_n < 4/3$ (toujours)

donc $\sum < 4/3 + U$, ce qui est absurde (voir trois lignes plus haut).

L'aire n'est donc pas supérieure à 4/3 de ***A***

2) Supposon $\sum$ inférieur à 4/3.

Il existe donc une différence V telle que $\sum = 4/3 - V$

Inscrivons dans le segment une suite de triangles telle que $1/3.\ 1/4^{n-1}$ soit inférieur à V, ce qui est toujours possible

Alors, $\sum + V = 4/3$ et $S_n < \sum$

donc, $S_n + V < 4/3$ soit, $4/3 - 1/3.\ 1/4^{n-1} + V < 4/3$

donc $V < 1/3.\ 1/4^{n-1}$ ce qui est absurde (voir quatre lignes plus haut).

Le segment n'est donc ni plus grand, ni moindre que 4/3 du traingle, il est donc égal. CQFD.

Le commentaire de Dahan-Peifer dans Une histoire des mathématique est fort clair:

“ on voit que dans l'application concrète de la méthode, Archimède évite d'utiliser une notion aussi obscure que celle d'un polygone à un nombre infini de côtés qui coïnciderait, à la limite, avec le segment parabolique...Il y aura toujours un reste. les aires approchées n'épuisent pas exhaustivement l'aire cherchée. C'est pourquoi G. de St V. donne ce nom à la méthode.

La méthode ancienne, avec son double raisonnement par l'absurde évite ingénieusement toute considération infinitésimale même si la démarche sous jacente est une investigation infinitésimale. On ne peut nier la présence d'une idée de limite, même si celle-ci n'est jamais explicite. Une définition rigoureuse présupposerait de toute façon une théorie générale des nombres irrationels. dans tous les cas auxquels les grecs ont appliqué la méthode d'exhaustion, ils ont formulé et démontré la propriété que la grandeur cherchée A diffère de la grandeur approchée U d'aussi peu que l'on voudra; c'est-à-dire, en termes modernes, que A est la limite des grandeurs U. Mais ils répètent la même forme de démonstration dans chaque cas particulier et ignorent l'analogie entre tous ces problèmes. Aucune méthode générale n'a pu se dégager”.

Force et faiblesse de la méthode d'exhaustion

La force est la rigueur logique impeccable qui ne sera jamais remise en cause. L'égalité par impossibilité d'infériorité ou de supériorité est indiscutable. Ce qu'il fut savoir est que cette manière devient un dogme imprescriptible. Il n'y a pas de quadrature acceptable qui ne relève pas de la double réduction.

La “rigueur” archimédienne a fourni le gros des arguments contre toutes les méthodes infinitésimales du moyen-age, de la renaissance et même du XVII^{e} siècle. L'histoire s'amuse puisque le traité *De la méthode* nous fera connaître un Archimède utilisateurs d'indivisibles. Si cette découverte modifie le caractère trop dogmatique de l'exigence précédente, il reste qu'Archimède maintien que la; preuve n'est administrées que lorsque la double réduction a été développée.

L. Brunschvicg déplore dans Les étapes... (p.159) que la “surévaluation des méthodes du second type soit telle que ceux qui ouvriront la voie véritablement royale de l'intégration se heurteront à l'autorité du nom d'Archimède comme au dogme de l'église”.

La première des faiblesses de cette méthode est son manque de généralité. Pour qu'elle s'applique, il faut à chaque cas, construire une série de polygones inscriptibles adéquats et qui se laissent interpréter par une série dont on connaît la convergence.

Surtout, la principale faiblesse en est qu'elle est une méthode de preuve et pas une méthode de découverte. Il faut déjà connaître le rapport 4/3 pour démontrer qu'il est bien respecté. Il ne peut être découvert par le moyen de la double réduction. A quelle méthode doit-on confier la découverte et surtout quelle valeur a-t-elle? C'est l'une des questions qui ne recoivent pas de réponse dans le premier traité et dans le commentaire qui suivra.

Le refus de infini

Ceci est le point le plus intéressant de la question. Pourquoi le passage à la limite est-il révoqué? Pourquoi est-il impossible de concevoir l'aboutissement de l'itération infinie? Pourquoi la mathématique grecque déploie-t-elle de si grands efforts pour éviter le recours à l'infini?

Il est bien connu que plusieurs obstacles à l'usage inconsidéré de l'infini étaient connus des anciens- rappelons d'abord les paradoxes de Zénon-. Les ensembles infinis pouvaient mettre en difficulté des axiomes aussi assurés que celui du tout et de la partie. Les infinis étaient exclus de la théorie des proportions. Bref, on risquait le paralogisme dès que l'on entendait raisonner sur l'infini.

Il y a encore des arguments plus puissants que l'on peut sans doute réunir sous l'appellation de *négativité de l'infini.*

Aristote: Pas d'infini actuel

La théorie de l'infini s'appuie d'abord sur la considération qui fonde la <u>croyance</u> en la réalité de l'infini; Il recense cinq raisons à cette croyance:

-le temps (course des sphères célestes) n'a ni commencement ni fin.

-la division des grandeurs (lignes, surface, volume) n'a pas de terme.

-la génération et la corruption ne s'épuisent pas

-tout ce qui est limité est limité à autre chose: il y aurait donc une suite infini de limites des choses.

-la représentation du nombre ne l'épuise pas: il paraît donc infini.

L'analyse aristotélicienne aura pour conclusion que les deux premières considérations imposent un infini non actuel et mènera à une réfutation des trois autres raisons de croire en la réalité de l'infini.

La réfutation de la cinquième est centrale pour les connaissances mathématiques: la représentation est critiquée car , si elle peut contribuer à la connaissance vraie de la chose, elle ne donne pas l'essetiel de la chose. Ainsi, la représentation mathématique est <u>abstraite</u> de l'objet physique; elle n'a pas d'existence séparée de celui-ci, même si elle a une certaine autonomie logique. Elle est ontologiquement inférieure et dépendante de la chose physique. <u>lire pp.37-8.</u>

La réfutation des deux précédente découle de l'analyse de la finitude nécessaire du monde. Il n'y a pas de corps infiniment grand. Ceci s'appuie sur la théorie du lieu qui ne peut être illimité et de l'espace qui ne peut être rien, c'est-à-dire vide. Aussi, la grandeur est-elle réellement finie. L'argument de la contradiction inhérente à la notion de substance infinie est de même développé: elle impliquerait un infini plus grand qu'un autre, une partie identique à son tout. Quant à la génération et corruption: *Il est possible que la génération d'une chose soit la corruption d'une autre, le tout restant fini.* (Phys. III)

Les deux premières considérations résistent à ces arguments et d'ailleurs “la nature est principe de mouvement et de changement; notre recherche porte sur la nature, donc sur le mouvement: si on ignore le mouvement, on ignore la nature. Or, le mouvement appartient aux continus , et dans le continu l'infini apparaît en premier lieu. C'est pourquoi, les définitions qu'on donne du continu se trouvent utiliser souvent la notion de l'infini, le continu étant divisible à l'infini” (Phys. III; 1, 200b, 12-21).

Les considérations précédentes ne peuvent donc réfuter absolument l'infini, “en effet, il devrait y avoir un commencement et une fin au temps; les grandeurs ne seraient pas divisibles en grandeurs et le nombre ne sera pas infini”(Phys. III; 6, 206a, 10- 12).

Aristote: *Il n'y a pas d'infini en acte* , or la science n'est science que lorsqu'elle est science des existants. ergo, il n'y a pas de science de l'infini.

Quelques remarques sur Aristote, dont la philosophie imprègne au plus haut point les développements de la science méditerranéenne et occidentale. Entre l'être et le non-être, il doit y avoir une modalité relative d'être sinon, il ne pourrait y avoir de changement, de mouvement (il faut lutter contre la formule parménidienne:*L'être est, le non-être n'est pas"*). Cette modalité est appelée par Aristote,*être en puissance*

Dans tout changement, il y a la possibilité du changement, le changement en train de s'accomplir et le changement accompli. Chez Aristote, l'être en acte s'oppose au premier moment, il revêt une forme stable, actuelle. La puissance dans l'être désigne la possibilité, la tendance qu'il a à acquérir une forme stable et déterminée; mais tant que l'être est en puissance il demeure marqué d'ambiguité et d'indétermination; la puissance suppose aussi et cependant une tendance et une aspiration vers un accomplissement, une forme, mais ne la réalise pas. <u>Citer p.44</u>

Or l'infini en acte n'existe pas, il est en puissance et virtualité. Aristote , notamment dans sa *Physique,* développe une longue argumentation trés serrée pour montrer qu'une substance infinie est contradictoire. On relèvera notamment l'argument du tout et de la partie (qui lui serait égale s'il était réalisé; Voire Dedekind en 1883)

Non seulement l'infini est "en puissance", mais il l'est avec un statut particulier. Les autres modes d'être en puissance (des matériaux de construction pour une maison, un acte que l'on projette de réaliser, un mouvement local vers le lieu naturel...) visent vraiment un mode d'être "en acte", ne sont "en puissance" que transitoirement. pas l'infini qui est et demeure en puissance, sans pouvoir être actualisé, sous peine de n'être plus infini (la seule actualisation concevable de l'infini est le fini). <u>citer p.44 bis</u>

La science doit être celle des existants. Cette position peut être soutenue par des doctrines trés diverses: l'abstraction aristotélicienne ou l'idéalisation platonicienne. En outre, chez Aristote, les objets mathématiques n'ont pas d'existence séparées (un nombre est nombre d'une chose nombrée...). Raison de plus pour qu'il n'y ait pas d'objet mathématique consistant et infini.

L'infini, en tant qu'objet de l'épistémologie est marqué de négativité, par son impuissance à être fini. Il est une virtualité pure. il est la marque d'un manque et d'une approximation <u>Citer p.45.</u>

La finitude est la marque du monde, en particulier dans son étendue (la cosmologie des sphères).

Je ne voudrais pas donner une vision trop homogène de la spéculation grecque sur l'infini. Aristote, qui accepte la thèse de la division infinie de la matière, s'efforce de combattre la thèse de son extension infinie, solidement argumentée par exemple par Anaxagore, thèse soutenue d'une autre manière par les atomistes comme Démocrite.

On ne saurait donc fonder les mathématiques sur un nombre, des lignes, des grandeurs trop marquées d'infinitude actuelle. On sauvera cependant l'infinitude en puissance: dans la puissance de nombrer toujours plus, de diviser la grandeur continue toujours et encore.

La puissance d'itération existe bien, est légitime, mais pas la limite. Ainsi Aristote considère-t-il que "La théorie ne supprime pas les considérations des mathématiciens, en supprimant l'infini qui existerait en acte, dans le sens de l'accroissement, considéré comme ne pouvant être parcouru; car, en réalité, ils n'ont pas besoin et ne font pas usage de l'infini, mais seulement de grandeurs aussi grandes qu'ils voudront, mais limitées".

La méthode d'exhaustion

De tout ceci, on retiendra que les mathématiciens grecs ont déployé des efforts admirables pour aborder les problèmes "à la limite", les problèmes du continu en contournant, en réfutant la présence d'objets infinitésimaux.

Le plus grand de tous, Archimède s'est plongé dans des problèmes qui relèvent de ce que l'on qualifierait aujourd'hui de "calcul infinitésimal", quadratures, centres de gravités.

Voici ce qu'en dit I.G. Bachmakova:

"On sait maintenant qu'Archimède possédait, pour déterminer les aires et les volumes, une méthode générale qui consistait à construire pour figure étudiée, les "Sommes de Riemann" et à déterminer leurs bornes supérieure et inférieure. Comme dans tous les cas considérés par Archimède, ces deux bornes coïncidaient, il affirmait que leur valeur commune était l'expression de la quantité cherchée. l'étape finale se ramenait à démontrer, par la réduction à l'absurde que la quantité cherchée ne pouvait être, ni plus petite, ni plus grande que la valeur annoncée. cette méthode est précisément celle qui se trouve à la base de la notion de d'intégrale définie"

Platon: dans la conception idéale de la dyade, le bien s'opposze au mal comme le fini à l'infini. Selon Aristote (Met. N.4. 1091 b), Platon hérite de la conception pythagoricienne de l'un comme bien et de l'infini comme mal. Ainsi, écrit Brunschvicg *“Les notions de proportion et de nombre n'ont plus un caractère purement mathématique, elles ne possèdent pas seulement cette beauté interne, qui est inséparable de l'ordre intellectuel. Platon leur attribue une valeur affective, une valeur morale”* (*Les étapes*, p.59).

Remarque: des tentatives infinitistes (Antiphon, Bryson ; in C.Boyer, *Caculus,* pp; 31 sqes).

Tous ces débats seront réexaminés à partir du XVII^{e} siècle.

Conoïdes et Sphéroïdes

Révolution d'une ellipse (sphéroïde) ou d'une hyperbole ou parabole (conoïde).

La même double démarche se retrouve. Dans la *Méthode*, des méthodes de statiques sont invoquées, alors que le traité *Sur les Conoïdes et Sphéroïdes*, use d'une méthode stricyement géométrique qui le rapproche singulièrement de la notion d'intégrale définie au sens de Riemann.

Il s'agit d'insérer le volume considéré entre deux séries de cylindres, les ins inscrits, les autres circonscrits.Il montre alors que les deux séries ne diffèrent que du volume du dernier cylindre. Cette différence pouvant être rendue aussi petite que l'on veut.

$c_n < V < C_n$, avec $C_n - c_n = e$

Là encore, il faudra recourir à la double réduction.